# NUMERISCHE FESTKÖRPERMECHANIK

## Computational Mechanics

**Ulrich Langer**
Institut für Mathematik
Johannes Kepler Universität Linz

Linz, Sommersemester 1997

# Vorwort

Das vorliegende Vorlesungsskriptum entstand aus Vorlesungen, die der Autor im Sommersemester 1995 und im Sommersemester 1997 an der Johannes Kepler Universität Linz gehalten hat. Diese Lehrveranstaltung ist eine Spezialvorlesung zur „Numerischen Festkörpermechanik", die sich organisch an den Vorlesungszyklus zur „Höheren Numerischen Mathematik" (Numerik I – III) und an die Vorlesung „Mathematische Methoden der Kontinuumsmechanik" anschließt.

Die Vorlesung „Numerik I" stellt das Handwerkszeug zur numerischen Behandlung linearer und nichtlinearer Operatorgleichungen in Banach- bzw. Hilbert–Räumen bereit und gibt eine Einführung in die Theorie moderner Funktionenräume (Sobolev-Räume, Räume von Distributionen) [21]. In der Vorlesung „Numerik II" [22] werden Randwertaufgaben (RWA) für partielle Differentialgleichungen (PDgl.) und die wichtigsten Techniken (FEM, FDM, FVM) zu ihrer Diskretisierung betrachtet, sowie ein Überblick über moderne Verfahren zur Auflösung der bei der Diskretisierung entstehenden Gleichungssysteme gegeben (siehe auch Spezialvorlesung [20]). In der Vorlesung „Numerik III" werden Anfangswertaufgaben (AWA) und Anfangsrandwertaufgaben (ARWA) für gewöhnliche und partielle Differentialgleichungen und die wichtigsten Methoden zu ihrer numerischen Lösung betrachtet. Die Vorlesung „Mathematische Methoden der Kontinuumsmechanik" [11] meines Kollegen, Herrn Engl, vermittelt die wichtigsten Prinzipien in der Kontinuumsmechanik, entwickelt daraus die mathematischen Modelle und führt die Analysis dieser Modelle durch.

Die vorliegende Vorlesung setzt Kenntnisse aus den Grundvorlesungen zur linearen Algebra, zur Analysis und zur Numerischen Mathematik, sowie die in den Vorlesungen „Numerik I" [21], „Numerik II" [22] und „Mathematische Methoden der Kontinuumsmechanik" [11] vermittelten Lehrinhalte voraus. Lehrinhalte aus der Vorlesung „Numerik III" werden nur am Rand benötigt, d.h. die Vorlesung „Numerik III" wird für diese Vorlesung nicht vorausgesetzt. Das Hauptanliegen der Vorlesung „Numerische Festkörpermechanik" besteht in der Konstruktion und Analysis spezieller numerischer Verfahren für festkörpermechanische Probleme, einschließlich strukturmechanischer Probleme. Im Kapitel 1 der Vorlesung werden die wichtigsten, hier benötigten Lehrinhalte der Vorlesungen „Numerik I" und „Numerik II" wiederholt. Die Kapitel 2 – 4 bzw. 3 und 5 benutzen zum großen Teil Material aus den Büchern *„Finite Elemente: Theorie, schnelle Löser und Anwendungen in der Elastizitätstheorie"* von D. Braess [4] bzw. *„Approximate Solution of Plastic Flow Theory Problems"* von V. G. Korneev und U. Langer [18]. Diese Lehrveranstaltung liefert Vorkenntnisse für nachfolgende Spezialvorlesungen zur Numerischen und Angewandten Mathematik als auch zur Industriemathematik.

Das Skriptum wurde bewußt im Stile eines Vorlesungsmanuskriptes gehalten. Im Gegensatz zu vielen Lehrbüchern wurde auf „belletristische" Ausschmückungen verzichtet. Die Lehrinhalte sollen schnell und kompakt erfaßbar sein. Es wird eine Vielzahl von Abkürzungen eingeführt. Die Abkürzungen **Ü x.x** und **(mms)** bedeuten harte Arbeit an der Materie. Das Lösen von Übungsaufgaben und das „Mach-Mal-Selbst" ist angesagt. Das vorliegende Skriptum ist ein Arbeitspapier, es ist kein Ersatz für den Vorlesungsbesuch und auch kein Ersatz für ein Lehrbuch, aber eine gute Vorbereitung auf die allfällige Prüfung. Die jeweils aktualisierte Variante des Vorlesungsskriptums findet der interessierte Leser im WWW: http://www.numa.uni-linz.ac.at.

Der Autor möchte an dieser Stelle Frau Doris Holzer für die Erstellung des LaTeX–Files und für die umfangreichen technischen Überarbeitungen recht herzlich danken.

Ulrich Langer
Linz, den 31. Dezember 1997

# Inhaltsverzeichnis

# Kapitel 1

# Einleitung

## 1.1 Variationsformulierungen (Wh. Numerik I und II)

### 1.1.1 Primale Variationsformulierung und ihre FE-Approximation

- **Primale Variationsformulierung:** (Nu I: Pkt. 2.3 [21]; Nu II: Pkt. 3.1 [22])

$$(1.1)\qquad \begin{array}{rcl} \text{Ges. } u \in V_g \overset{\uparrow}{\underset{\text{homogenisiert}}{=}} V_0 : a(u,v) & = & < f, v > \quad \forall\, v \in V_0 \\ Au & = & f \qquad\qquad \text{in } V_0^* \end{array}$$

- **Hauptresultat:** Satz von Lax & Milgram (Satz I.2.9 [21]):

Vor.: 0. $V_0 \subset V$ – abgeschlossener, nichttrivialer Unterraum des $H$–Raumes $V$, $\|\cdot\|$, $(\cdot,\cdot)$.

$$(1.2)\quad \begin{cases} 1. & f \in V_0^*. \\ 2. & a(\cdot,\cdot) : V_0 \times V_0 \longmapsto \mathbb{R}^1 \text{ – Bilinearform:} \\ 2a) & V_0 \text{ – elliptisch} : \mu_1 \|v\|^2 \le a(v,v) \quad \forall\, v \in V_0, \\ 2b) & V_0 \text{ – beschränkt} : |a(u,v)| \le \mu_2 \|u\|\,\|v\| \quad \forall\, u, v \in V_0. \end{cases}$$

Bh.: $\exists!\, u \in V_0$: (1.1) und Fixpunkt–Iteration.

- **Beispiele:**

  1. RWA für skalare elliptische PDgl. 2. Ordnung (Nu II, Pkt. 3.1.2.1 [22]):
     $V = W_2^1(\Omega)$ ⤵ o.k. !
  2. Lineares Elastizitätsproblem (Nu II, Pkt. 3.1.2.2 [22]):
     $V = [W_2^1(\Omega)]^3$ ⤵ siehe Kap. 3: Modellierung + Analysis + Numerik !
  3. Kirchhoff–Platte (Nu II, Pkt. 3.1.2.3 [22]):
     $V = W_2^2(\Omega)$ ⤵ siehe Kap. 4: Strukturmechanische Modelle !

- **FE–Approximation:** (Nu II, Kap. 4 [22])

  $(1.1)_h$ Ges. $u_h \in V_{0h} : a(u_h, v_h) = < f, v_h > \quad \forall\, v_h \in V_{0h}$

- **Resultate:**
  1. Cea–Satz I.4.3 (siehe [21])
  2. Approximationssatz II.4.5 (siehe [22])
  3. Konvergenzsätze II.4.7 – II.4.12 ($H^1$, $L_2$, $L_\infty$) (siehe [22])
  4. Schnelle Auflösungsverfahren (Nu II, Kap. 7 [22])

### 1.1.2 Gemischte Variationsformulierung und gemischte FE-Approximation

- **Gemischte Variationsformulierung:** (Nu II, Pkt. 3.2.1 [22])

$$(1.3) \qquad \boxed{\begin{array}{lcll} \text{Ges. } (u,\lambda) \in X \times M & & & \\ a(u,v) + b(v,\lambda) & = & < f, v > & \forall\, v \in X \\ b(u,\mu) & = & < g, \mu > & \forall\, \mu \in M \end{array}}$$

- **Hauptresultat:** Satz von Brezzi (Satz II.3.6 [22])
  ⤵ Kap. 2 (Beweis und Verallgemeinerungen)

- **Beispiele:** (Nu II, Pkt. 3.2.2 [22])

  1. Stokes–Problem ⤵ (fast) inkompressibles Elastizitätsproblem.
  2. Plattengleichung ⤵ Kap. 4.
  3. Poisson–Gleichung ⤵ Kap. 3 ⤵ lineares Elastizitätsproblem.

- **Gemischte FE-Approximation:** ⤵ Kap. 2.

- **Auflösung gemischter FE-Gleichungen:** ⤵ Kap. 2.

### 1.1.3 Abstraktes Variationsproblem in gemischten Räumen

■ **Variationsproblem in gemischten Räumen:**

- Seien
  $U$ – Hilbert–Raum, $\|\cdot\|_U$, $(\cdot,\cdot)_U$
  $V$ – Hilbert–Raum, $\|\cdot\|_V$, $(\cdot,\cdot)_V$
  und
  (1.4) $$a(\cdot,\cdot) : U \times V \longrightarrow \mathbb{R}^1$$
  eine stetige Bilinearform und $f \in V^*$ geg.

- Btr. das folgende Variationsproblem

  (1.5) $$\boxed{\text{Ges. } u \in U : a(u,v) = < f, v > \quad \forall\, v \in V}$$

- Falls $U = V = V_0$ ↳ (1.5) $\equiv$ (1.1) !

- Def. Operator $A : U \longrightarrow V^*$:

  (1.6) $$< Au, v > := a(u,v) \quad \forall\, u \in U \quad \forall\, v \in V.$$

  Dann ist (1.5) äquivalent zur Operatorgleichung

  (1.7) $$\boxed{\text{Ges. } u \in U : Au = f \text{ in } V^*}$$

- Frage: Unter welchen Bedingungen ist $A : U \longmapsto V^*$ ein Isomorphismus (bijektiv, $A$ und $A^{-1}$ stetig) ?
  ($\Leftrightarrow$ (1.7) ist korrekt gestellt !)

■ **Hilfsmittel:** = "Closed Range Theorem" (Analysis III [9])

- **Satz 1.1:** (Closed Range Theorem)

  Vor.: 1) $X, Y$ – Banach-Räume, reflexiv.
  2) $A \in [X,Y] = L(X,Y)$, d.h. $A : X \longmapsto Y$ – linear, stetig.

  Bh.: Dann sind die folgenden beiden Aussagen äquivalent:
  (i) Das Bild $A(X)$ ist abgeschlossen in $Y$.
  (ii) $$\underset{\text{im } A}{\overset{\|}{A(X)}} = (\ker A^*)^0 := \{y \in Y : < l, y > = 0 \quad \forall\, l \in \ker A^* \subset Y^*\}$$
  $$= \text{Polare von } \ker A^* \subset Y.$$

- **Beweis:** siehe [4], S. 117.

## Der Existenz- und Eindeutigkeitssatz von Babuška und Aziz (1972):

- **Satz 1.2:** (Babuška und Aziz, 1972)

> Seien $U, V$ – Hilbert-Räume.
> Dann ist die lineare Abbildung $A : U \longmapsto V^*$ genau dann ein Isomorphismus, wenn die zugehörige Bilinearform $a(\cdot,\cdot) : U \times V \to I\!R^1$ die folgenden Bedingungen erfüllt:
>
> 1) Stetigkeit, d.h. $\exists\, \mu_2 = \text{const.} > 0$:
>
> $$(1.8) \qquad |a(u,v)| \le \mu_2 \, \|u\|_U \, \|v\|_V \quad \forall\, u \in U \quad \forall\, v \in V$$
>
> 2) Inf-sup-Bedingung, d.h. $\exists\, \mu_1 = \text{const.} > 0$:
>
> $$(1.9) \qquad \inf_{\substack{u \in U \\ u \neq \mathbf{O}}} \; \sup_{\substack{v \in V \\ v \neq \mathbf{O}}} \frac{a(u,v)}{\|u\|_U \, \|v\|_V} \ge \mu_1 = \text{ const. } > 0.$$
>
> 3) Zu jedem $v \in V$ mit $v \neq \mathbf{O}$ gibt es ein $u \in U$:
>
> $$(1.10) \qquad a(u,v) \neq 0.$$

**Beweis:**

a) $\Leftarrow$ Hinlänglichkeit:

- $(1.8) \underset{(1.6)}{\Longleftrightarrow} A : U \longmapsto V^*$ – stetig, d.h. $A \in L(U, V^*)$ #
- $A$ ist injektiv (eineindeutig). Tatsächlich,

$$\begin{aligned} Au_1 = Au_2 \quad &\Rightarrow \quad a(u_1, v) = a(u_2, v) \quad \forall\, v \in V \\ &\Rightarrow \quad a(u_1 - u_2, v) = 0 \quad \forall\, v \in V \\ &\Rightarrow \quad 0 = \sup_{v \in V} \frac{a(u_1 - u_2, v)}{\|v\|_V} \underset{\substack{\uparrow \\ (1.9)}}{\ge} \mu_1 \, \|u_1 - u_2\|_U \\ &\Rightarrow \quad u_1 = u_2 \quad \# \end{aligned}$$

- $A : U \underset{\substack{\uparrow \\ \text{eineindeutig}}}{\leftrightarrow} A(U) \; \Rightarrow \; \exists\, A^{-1} : A(U) \longmapsto U$

- $A^{-1} : A(U) \mapsto U$ – stetig, tatsächlich

$$\begin{aligned} \mu_1 \|u\|_U \underset{(1.9)\nearrow}{\leq} \sup_{v \in V} \frac{a(u,v)}{\|v\|_V} = \sup_{v \in V} \frac{< Au, v >}{\|v\|_V} \overset{Au = f \in A(U) \downarrow}{=} \\ = \sup_{v \in V} \frac{< f, v >}{\|v\|_V} \overset{Au}{=} \|f\|_{V^*}, \text{ d.h.} \end{aligned}$$

$\mu_1 \|A^{-1} f\|_U \leq \|f\|_{V^*} \quad \forall\, f \in A(U)$, d.h. $A^{-1}$ ist stetig.

- $A : U \to A(U),\ A^{-1} : A(U) \longrightarrow U$–stetig $\overset{\text{(mms)}}{\Rightarrow}$ $A(U) = \overline{A(U)}$.

- Satz 1.1: $\Rightarrow$ $A(U) = \overline{A(U)} \overset{!}{=} (\ker A^*)^0 = \{\mathbf{O}\}^0 = V^*$

  $\ker A^* = \{v \in V : \underset{\underset{< Au, v >_{V^* \times V}}{\|}}{< A^* v, u >_{U^* \times U}} = a(u,v) = 0 \quad \forall\, u \in U\} \underset{\underline{\underline{\text{(1.10) Vor. 3)}}}}{\overset{\uparrow}{=}} \{\mathbf{O}\} \subset V$ #

b) $\Rightarrow$ Notwendigkeit: (mms)
   Zu zeigen: $A \in L(U, V^*)$ – Isomorphismus $\Longrightarrow$ Vor. 1) – 3) #

- **Folgerung 1.3:**

> Werden nur die Bedingungen
> 1) Stetigkeit: (1.8)
> 2) Inf-sup-Bedingung: (1.9)
>
> des Satzes 1.2 vorausgesetzt, dann ist
>
> (1.11) $\quad A : U \longmapsto \{v \in V : a(u,v) = 0 \quad \forall\, u \in U\}^0 = (\ker\ A^*)^0 \subset V^*$
>
> ein Isomorphismus und (1.9) = Inf-sup-Bedingung ist äquivalent zu
>
> (1.12) $\qquad \|Au\|_{V^*} \geq \mu_1 \|u\|_U \quad \forall\, u \in U.$

**Beweis:** folgt sofort aus Beweis von Satz 1.2. **q.e.d.**

- **Folgerung 1.4:** (Lax & Milgram–Satz)

| | | |
|---|---|---|
| Vor.: | 0) | $U = V$ – $H$–Raum, $\|\cdot\|$, $(\cdot,\cdot)$ |
| | 1) | $\|a(u,v)\| \leq \mu_2 \|u\| \, \|v\| \quad \forall\, u, v \in V$ |
| | 2) | $a(v,v) \geq \mu_1 \|v\|^2 \quad \forall\, v \in V$ |
| Bh.: | | $A : V \to V^*$ ist ein Isomorphismus. |

**Beweis:**

1) $\Rightarrow$ (1.8).

2) $\Rightarrow$ (1.9) $\quad \displaystyle\sup_{v \in V} \frac{a(u,v)}{\|u\| \, \|v\|} \geq \frac{a(u,u)}{\|u\|^2} \geq \mu_1 = \text{const.} > 0$

2) $\Rightarrow$ (1.10) $\quad$ Wähle $u = v \in U = V$.

**q.e.d.**

## Abstrakter Konvergenzsatz (Verallgem. Cea–Lemma):

- Seien

$$U_h := \text{span}\,\{p^{(i)} : i \in \omega_h\} \subset U$$
$$V_h := \text{span}\,\{q^{(i)} : i \in \omega_h\} \subset V$$

endlichdimensionale Teilräume von $U$ und $V$. Dann kann man das zu (1.5) gehörige Galerkin–Petrov–Schema wie folgt aufschreiben:

(1.13)= $(1.5)_h$ $\quad \boxed{\text{Ges. } u_h \in U_h : a(u_h, v_h) = \, < f, v_h > \quad \forall\, v_h \in V_h}$

- Für die Übertragung des Cea–Lemmas ist es jetzt erforderlich, daß die Räume $U_h$ und $V_h$ „ausbalanciert“ (diskrete Inf-sup-Bed.) sind:

**Satz 1.5:** (Verallgemeinertes Cea–Lemma)

Vor.: 1) Die Bilinearform $a : U \times V \to \mathbb{R}^1$ erfülle die im Satz 1.2 genannten Bedingungen 1) – 3) = (1.8) – (1.10).

2) Die Unterräume $U_h \subset U$ und $V_h \subset V$ werden so gewählt, daß

$(1.9)_h \quad \displaystyle\inf_{u_h \in U_h} \sup_{v_h \in V_h} \frac{a(u_h, v_h)}{\|u_h\|_U \, \|v_h\|_V} \geq \tilde{\mu}_1 = \text{const.} > 0$

(diskrete „Inf-sup-Bed.“)

$(1.10)_h \quad \forall\, v_h \in V_h : v_h \neq \mathbf{O}, \;\; \exists\, u_h \in U_h : a(u_h, v_h) \neq 0.$

Bh.: $\exists !\, u_h \in U_h$: (1.13), und es gilt die Fehlerabschätzung

$$(1.14) \qquad \|u - u_h\| \leq \left(1 + \frac{\mu_2}{\tilde{\mu}_1}\right) \inf_{w_h \in U_h} \|u - w_h\|$$

**Beweis:**

- $\exists!$ analog zu Satz 1.2 !
- $$\begin{array}{llcll} (1.5) & a\,(u, v_h) & = & < f, v_h > & \forall\, v_h \in V_h \subset V \\ (1.5)_h & a\,(u_h, v_h) & = & < f, v_h > & \forall\, v_h \in V_h \\ \hline & a\,(u - u_h, v_h) & = & 0 & \forall\, v_h \in V_h \end{array}$$
- $\forall\, w_h \in U_h$ erhält man offenbar die Identität $a\,(\underbrace{u_h - w_h}_{\in U_h}, v_h) = a\,(u - w_h, v_h) \quad \forall\, v_h \in V_h$
- Aus $(1.9)_h$ folgt:

  $$\tilde{\mu}_1\, \|u_h - w_h\|_U \le \sup_{v_h \in V_h} \frac{a\,(u_h - w_h, v_h)}{\|v_h\|_V} =$$

  $$= \sup_{v_h \in V_h} \frac{a\,(u - w_h, v_h)}{\|v_h\|_V} \overset{(1.8)}{\le} \mu_2\, \|u - w_h\|, \text{ d.h.}$$

  $$\|u_h - w_h\|_U \le \frac{\mu_2}{\tilde{\mu}_1}\, \|u - w_h\|_U \quad \forall\, w_h \in U_h \subset U.$$
- Daraus erhalten wir trivialerweise

  $$\begin{array}{rcl} \|u - u_h\|_U & \le & \|u - w_h\|_U + \|u_h - w_h\|_U \le \\ & \le & \left(1 + \dfrac{\mu_2}{\tilde{\mu}_1}\right) \|u - w_h\|_U \quad \forall\, w_h \in U_h \subset U \\ \curvearrowright\ \|u - u_h\|_U & \le & \left(1 + \dfrac{\mu_2}{\tilde{\mu}_1}\right) \inf\limits_{w_h \in U_h} \|u - w_h\|_U \end{array}$$

**q.e.d.**

## 1.2 Nichtlineare Variationsprobleme

### 1.2.1 Nichtlineare Variationsprobleme mit monotonen und Lipschitz-stetigen Operatoren

#### ■ Nichtlineare Variationsprobleme im $H$–Raum

$$(1.15) \qquad \text{Ges. } u \in V_0 : \quad \begin{array}{rcll} a\,(\underset{\text{nichtlinear}}{u}, \underset{\text{linear}}{v}) & = & < f, v > & \forall\, v \in V_0 \\ A\,(u) & = & f & \text{in } V_0^* \end{array}$$

mit $A : V_0 \longmapsto V_0^*$:

$$(1.16) \qquad < A\,(u), v > := a\,(u, v) \quad \forall\, u, v \in V_0$$

■ **Hauptresultat:** ($\widehat{=}$ Lax & Milgram: Nu I [21], $\boxed{\text{Ü 4.2}}$):

Vor.: 0. $V_0 \subset V$ – UR des $H$–Raumes $V$, $\|\cdot\|$, $(\cdot,\cdot)$

1. $f \in V_0^*$

2. $A : V_0 \mapsto V_0^*$ sei

2a) stark monoton, d.h. $\exists\, \mu_1 = \text{const.} > 0$:

$$< A(u) - A(v), u - v > \equiv a(u, u-v) - a(v, u-v) \geq$$
$$\geq \mu_1 \|u-v\|^2 \quad \forall\, u, v \in V_0,$$

2b) Lipschitz-stetig, d.h. $\exists\, \mu_2 = \text{const.} > 0$:

$$\|A(u) - A(v)\|_{V_0^*} := \sup_{w \in V_0} \frac{< A(u) - A(v), w >}{\|w\|} \equiv$$
$$\equiv \sup_{w \in V_0} \frac{a(u,w) - a(v,w)}{\|w\|} \leq \mu_2 \|u-v\| \quad \forall\, u, v \in V_0$$

Bh.: $\exists!\, u \in V_0$: (1.15) und Fixpunktiteration:

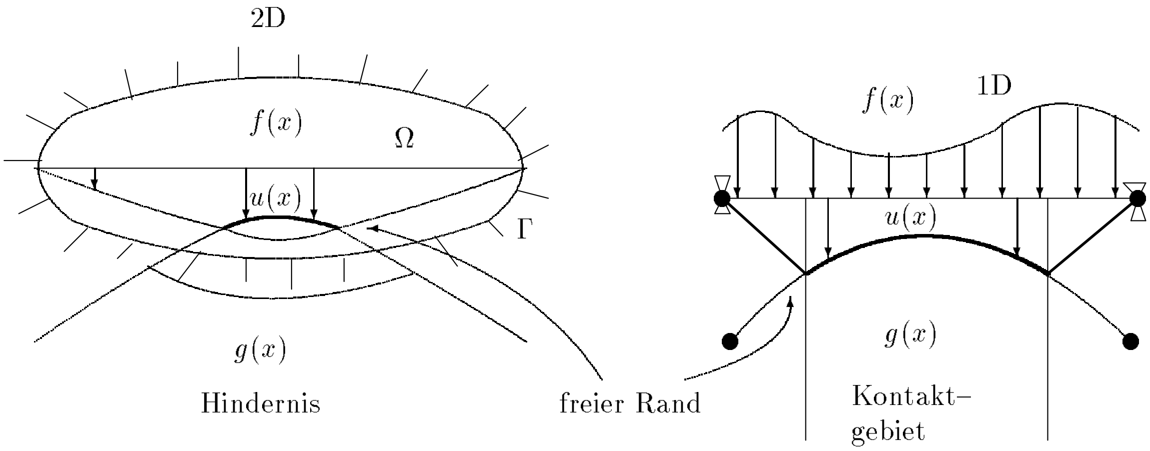
$$u_{n+1} = u_n - \rho\, J^{-1}(A(u_n) - f) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} u \text{ in } V_0, \tag{1.17}$$

wobei $J^{-1} \in [V_0^* \to V_0]$ – Riesz'scher Isomorphismus.

### 1.2.2 Variationsungleichungen als nichtlineare Fixpunktgleichung

■ **Beispiel:** Hindernisproblem

- Problemstellungsbeschreibung:
  Ges. Auslenkung $u(\cdot)$ einer am Rand $\Gamma$ fixierten, durch eine Flächenkraft(dichte) $f(\cdot)$ belasteten Membran über einem Hindernis $g(\cdot)$:



- Modell: Restringiertes Minimumproblem

  (MP) Ges. $u \in U := \{v \in V = \overset{\circ}{H}{}^1(\Omega) : v(x) \geq g(x) \quad \forall$ f.ü. $x \in \Omega\}$:

  $$J(u) = \inf_{v \in U} J(v),$$

  mit $J(v) := \frac{1}{2} \int\limits_{\Omega} |\nabla v|^2 \, dx - \int\limits_{\Omega} f v \, dx$ und geg.

  $f \in L_2(\Omega)$, $g \in \{v \in H^1(\Omega) : v(x) \leq 0 \quad \forall$ f.ü. $x \in \Gamma\}$.

- MP ist offenbar äquivalent zur Variationsungleichung (VU):

  (VU) Ges. $u \in U : \int\limits_{\Omega} \nabla^T u \nabla (v - u) \, dx \geq \int\limits_{\Omega} f (v - u) \quad \forall v \in U$.

- $\boxed{\textbf{Ü 1.1}}$ Zeigen Sie, daß eine Lösung $u \in U \cap H^2(\Omega)$ des MP $\equiv$ VP dem folgenden System von Differentialungleichungen genügt:

  $$\left\{ \begin{array}{l} -\Delta u \geq f, \ u \geq g, \ (\Delta u + f)(u - g) = 0 \text{ in } \Omega \\ u = 0 \text{ auf } \Gamma \end{array} \right\}$$

- **Sei $V$ $(V_0)$ – Hilbert-Raum $(\|\cdot\|, (\cdot,\cdot))$ und $U \subset V$ eine Teilmenge von $V$:**

$$(1.18) \qquad \left\{ \begin{array}{ll} \text{a)} & U \neq \emptyset, \\ \text{b)} & U = \bar{U} \text{ – abgeschlossen,} \\ \text{c)} & U \text{ – konvex, d.h. mit } u, v \in U \text{ ist auch} \\ & \lambda u + (1 - \lambda) v \in U \quad \forall \lambda \in [0, 1]. \end{array} \right.$$

Desweiteren sei $f \in V^*$ und $a(\cdot,\cdot) : V \times V \longrightarrow I\!R^1$ eine $V$-elliptische und $V$-beschränkte Bilinearform.

- **Dann hat die Variationsungleichung**

$$(1.19) \qquad \text{Ges. } u \in U : \quad \underset{\displaystyle < Au, v - u >}{\underset{|||}{a(u, v - u)}} \quad \geq \quad < f, v - u > \quad \forall v \in U, \qquad A \in [V \mapsto V^*]$$

eine eindeutig bestimmte Lösung $u \in U$. Falls $U$ ein Unterraum von $V$ ist, dann ist (1.19) offenbar äquivalent zu (1.1).

- **Falls die Bilinearform $a(\cdot,\cdot)$ zusätzlich symmetrisch ist, dann ist das Variationsungleichungsproblem (1.19) äquivalent zu folgendem restringierten Minimumproblem**

$$(1.20) \qquad \text{Ges. } u \in U : J(u) = \inf_{v \in U} J(v)$$

mit dem Ritzschen Energiefunktional $J(v) = \frac{1}{2} a(v, v) - < f, v >$.

__Beweis:__ mms mit dem Hinweis

$$\begin{array}{ccccc} (1.20) & \Longleftrightarrow & J\,(u+t\,(v-u)) \geq J\,(u) & \Longleftrightarrow & (1.19) \\ & \uparrow & & \uparrow & \\ & \text{o.k.} & \forall\, t \in [0,1]\ \forall\, v \in U & \text{mms (vgl. Nu I [21])} & \end{array}$$

- **Der Existenz- und Eindeutigkeitsbeweis für (1.19) beruht darauf, daß (1.19) auf eine Fixpunktgleichung zurückgeführt werden kann:**

1. Definieren Projektor $P : V \mapsto U$:

   (1.21) $$J_0(Pu) = \inf_{v \in U} J_0(v)$$

   mit $J_0(v) := \frac{1}{2}\,\|v\|^2 - (u,v) \equiv \frac{1}{2}\,\|v-u\|^2 - \frac{1}{2}\,\|u\|^2$.

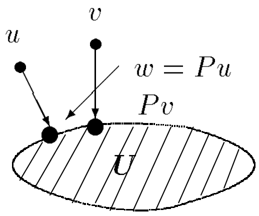
2. Das Minimumproblem (1.21) ist offenbar äquivalent zur Variationsungleichung (mms)

   (1.22) $$\text{Ges. } w \equiv Pu \in U : (Pu, v - Pu) \geq (u, v - Pu) \quad \forall\, v \in U, \quad \forall\, u \in V$$

3. Das Minimumproblem

   (1.23) $$\text{Ges. } w \in U : \tilde{J}_0(w) = \inf_{v \in U} \tilde{J}_0(v)$$

   mit $\tilde{J}_0(v) := \frac{1}{2}\,\|v-u\|^2$ ist äquivalent zum MP (1.21) $\equiv$ VU (1.22).

4. Das MP (1.23) hat eine eindeutig bestimmte Lösung $w \equiv Pu \in U$, und der (nichtlineare) Operator $P$ ist <u>nichtexpansiv</u>, d.h.

   $$\|Pu - Pv\| \leq \|u - v\| \quad \forall\, u, v \in V$$

   (Beweis siehe [13], Lemma 8.2).

5. Die Variationsungleichung (1.19) ist äquivalent zur nichtlinearen Fixpunktgleichung (mms)

   (1.24) $$\text{Ges. } u \in V : u = B_\rho\,(u) := P\,[(I - \rho\,J^{-1}A)\,u + \rho\,J^{-1}\,f] \text{ in } V.$$

6. Für hinreichend kleine $\rho \in (0, \rho_0)$ ist der Operator $B_\rho : V \mapsto V$ kontraktiv (vgl. Nu I [21]), und folglich hat die Fixpunktgleichung (1.24) nach dem Banachschen Fixpunktsatz I.6.1 (siehe Nu I [21]) eine eindeutig bestimmte Lösung $u \in U \subset V$, die durch die Fixpunktiteration $u_{n+1} = B_\rho\,(u_n)$ konstruktiv bestimmt werden kann.

### 1.2.3 Nichtlineare Variationsprobleme in der Plastizitätstheorie (siehe Kap. 5)

- **Elastisch–plastische Torsion eines Stabes (vgl. auch Courant–Problem: Nu II, PA 4 [22]):**

(1.25) Ges. Spannungsfkt. $u \in U := \{v \in V_0 := \overset{\circ}{H}{}^1(\Omega) : |\nabla v| \; \begin{matrix} < \text{elastisch} \\ \leq K\}: \\ = \text{plastisch} \end{matrix}$

$$J(u) = \inf_{v \in U} J(v)$$

mit $J(v) := \frac{1}{2} \int\limits_\Omega |\nabla v|^2 \, dx - \int\limits_\Omega f v \, dx.$

(1.14) ≡ (VU): $\int\limits_\Omega \nabla^T u \, \nabla(v - u) \, dx \geq \int\limits_\Omega f(v - u) \, dx \quad \forall \, v \in U.$
(1.19)

- **Elastisch–plastische Fließtheorie (Nu III, Bsp. 3.7 [23]):**

(1.26) Ges. $u \in C^1(\mathbf{T}, V_0)$, $\sigma \in C^1(\mathbf{T}, S)$, $\kappa \in C^1(\mathbf{T}, H)$:

$$A(\sigma(t), \kappa(t)) \, \dot{u}(t) = F(t) \text{ in } C(\mathbf{T}, V_0^*)$$

mit den Evolutionsgleichungen

$$\dot{\sigma}(t) = D\varepsilon(\dot{u}(t)) - Da(\sigma(t), \kappa(t), \varepsilon(\dot{u})) \text{ in } C(\mathbf{T}, S)$$
$$\dot{\kappa}(t) = b(\sigma(t), \kappa(t), \varepsilon(\dot{u}(t))) \text{ in } C(\mathbf{T}, H)$$

und den AB: $u(0) = \mathbf{O}$, $\sigma(0) = \mathbf{O}$, $\kappa(0) = \mathbf{O}$,
wobei $F \in C(\mathbf{T}, V_0^*)$ geg. und $\varepsilon_{ij}(v) := \frac{1}{2}(v_{i,j} + v_{j,i})$.

Eine Zusammenstellung von Ergebnissen zur Analysis und Numerik der Anfangsrandwertaufgabe (1.26) findet der Leser im Kapitel 5.

## 1.3 Literatur

- **In der Vorlesung werden im wesentlichen folgende Bücher genutzt:**


[4] Braess D.: Finite Elemente.
Springer–Lehrbuch, 1992, (1. Auflage).
2. Auflage: [5].
→ Kap. 2, Kap. 3, Kap. 4

[13] Großmann Ch., Roos H.-G.:
Numerik partieller Differentialgleichungen.
Teubner–Studienbücher Mathematik, 1992.
→ Variationsungleichungen (Kap. 5)

[18] Korneev V.G., Langer U.:
Approximate Solution of Plastic Flow Theory Problems.
Teubner–Texte zur Mathematik, 1984.
→ Kap. 3, Kap. 5.

# Kapitel 2

# Analysis und Numerik gemischter Variationsprobleme

## 2.1 Gemischte Variationsprobleme

### 2.1.1 Formulierungen und Voraussetzungen

■ **Btr. reelle $\boldsymbol{H}$–Räume**

$$\begin{array}{llll} X, \ \ \|\cdot\|_X,\ (\cdot,\cdot)_X; & X^*, \ \ \|\cdot\|_{X^*}, & <\cdot,\cdot>_{X^*\times X}: & X^*\times X \mapsto I\!R^1; \\ M, \ \ \|\cdot\|_M,\ (\cdot,\cdot)_M; & M^*, \ \ \|\cdot\|_{M^*}, & <\cdot,\cdot>_{M^*\times M}: & M^*\times M \mapsto I\!R^1, \end{array}$$

wobei die Raumindizes auch gelegentlich weggelassen werden.

Seien desweiteren

$$(2.1) \qquad \left\{ \begin{array}{ll} a\,(\cdot,\cdot): & X\times X \longrightarrow I\!R^1 \\ b\,(\cdot,\cdot): & X\times M \longrightarrow I\!R^1 \end{array} \right.$$

zwei stetige Bilinearformen.

■ **Btr. folgendes abstraktes gemischtes Variationsproblem (GV):**

$$(2.2) \qquad \boxed{\begin{array}{lcll} \text{Ges. } (u,\lambda)\in X\times M: & & & \\ a\,(u,v)+b\,(v,\lambda) & = & <f,v> & \forall\, v\in X \\ b\,(u,\mu) & = & <g,\mu> & \forall\, \mu\in M \end{array}}$$

unter den folgenden Standardvoraussetzungen:

(2.3)
$$\left\{\begin{array}{ll}
1) & f \in X^*,\ g \in M^* \text{ geg.} \\
2) & \text{Bilinearformen } a(\cdot,\cdot) : X \times X \to I\!R^1 \text{ und} \\
 & b(\cdot,\cdot) : X \times M \to I\!R^1 \text{ seien stetig, d.h.} \\
 & \exists\ \alpha_2, \beta_2 = \text{ const. } > 0 : \\
 & \quad |a(u,v)| \le \alpha_2 \|u\|_X \|v\|_X \quad \forall\, u, v \in X, \\
 & \quad |b(v,\mu)| \le \beta_2 \|v\|_X \|\mu\|_M \quad \forall\, v \in X \quad \forall\, \mu \in M. \\
3) & \text{LBB (Ladyšhenskaja–Babuška–Brezzi)–Bedingung:} \\
 & \exists\ \beta_1 = \text{ const. } > 0 : \\
 & \quad \sup\limits_{\substack{v \in X \\ v \neq \mathbf{O}}} \dfrac{b(v,\mu)}{\|v\|_X} \ge \beta_1 \|\mu\|_M \quad \forall\, \mu \in M, \\
 & \quad \Updownarrow \\
 & \quad \inf\limits_{\substack{\mu \in M \\ \mu \neq \mathbf{O}}} \sup\limits_{\substack{v \in X \\ v \neq \mathbf{O}}} \dfrac{b(v,\mu)}{\|v\|_X \|\mu\|_M} \ge \beta_1 = \text{const.} > 0, \\
 & \quad \text{(inf–sup–Bedingung)} \\
4) & V_0\text{–Elliptizität, d.h. } \exists\ \alpha_1 = \text{const.} > 0\text{:} \\
 & \quad a(v,v) \ge \alpha_1 \|v\|_X^2 \quad \forall\, v \in V_0
\end{array}\right.$$

wobei

$$V_0 = V(0) := \{v \in X : b(v,\mu) = 0 \quad \forall\, \mu \in M\},$$
$$V_g = V(g) := \{v \in X : b(v,\mu) = < g, \mu > \quad \forall\, \mu \in M\}.$$

■ **Bemerkung 2.1:**

1. Anstelle der Voraussetzung 4) kann man auch fordern:

   4a) $\sup\limits_{\substack{u \in V_0 \\ u \neq \mathbf{O}}} \dfrac{a(u,v)}{\|u\|_X} \ge \alpha_1' \|v\|_X \quad \forall\, v \in V_0,$

   4b) $\sup\limits_{\substack{v \in V_0 \\ v \neq \mathbf{O}}} \dfrac{a(u,v)}{\|v\|_X} \ge \alpha_1'' \|u\|_X \quad \forall\, u \in V_0.$

   Falls $a(\cdot,\cdot)$ auf $V_0$ symmetrisch ist, dann folgt 4a) $\equiv$ 4b), und $\alpha_1' = \alpha_2''$.

2. In einigen, praktisch wichtigen Beispielen (z.B. Stokes–Problem) kann Voraussetzung $(2.3)_{4)}$ auf ganz $X$ (anstelle des UR $V_0$) gezeigt werden.

3. In Nu II, Pkt. 3.2.2 [22] wurden bereits Beispiele gemischter Variationsprobleme vorgestellt:
   - Pkt. 3.2.2.1: Stokes–Problem
   - Pkt. 3.2.2.2: 1. biharmonisches RWP (gem. VF)
   - Pkt. 3.2.2.3: Dirichlet–Problem für die Poisson–Gleichung (gem. VF)

## ■ <u>Formulierung des GV (2.2) als Operatorgleichung:</u>

- Def. die folgenden linearen Operatoren:

$$A : X \longrightarrow X^* : < Au, v > := a\,(u, v) \quad \forall\, u, v \in X, \tag{2.4}$$

$$B : X \longrightarrow M^* : < Bu, \mu > := b\,(u, \mu) \quad \forall\, u \in X \quad \forall\, \mu \in M. \tag{2.5}$$

  Aufgrund der Stetigkeit der Bilinearformen $a\,(\cdot,\cdot)$ und $b\,(\cdot,\cdot)$ sind auch die Operatoren $A$ und $B$ stetig, d.h. $A \in [X, X^*] \equiv L\,(X, X^*)$, $B = [X, M^*] \equiv L\,(X, M^*)$.

- Der zu $B$ adjungierte (duale) Operator $B^* : M \equiv M^{**} \to X^*$ (vgl. Nu I, Def. I.2.9 und Korollar I.2.4 [21]) wird durch die Beziehung

$$< B^*\lambda, v > := b\,(v, \lambda) \quad \forall\, v \in X \quad \forall\, \lambda \in M \tag{2.6}$$

  eindeutig definiert $\curvearrowright$ $B^* \in L\,(M, X^*)$, (mms).

- Folglich ist das GV (2.2) äquivalent zur Operatorgleichung:

$$\boxed{\begin{array}{lcl} \text{Ges. } (u, \lambda) \in X \times M : & & \\ Au + B^*\lambda & = & f \text{ in } X^* \\ Bu & = & g \text{ in } M^* \end{array}} \tag{2.7}$$

$$\text{bzw.} \Updownarrow$$

$$\boxed{\text{Ges. } (u, \lambda) \in X \times M : L \begin{pmatrix} u \\ \lambda \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f \\ g \end{pmatrix} \text{ in } X^* \times M^*}$$

mit $L := \begin{bmatrix} A & B^* \\ B & \mathbf{O} \end{bmatrix} : X \times M \longmapsto X^* \times M^*$ – linear, stetig.

## ■ Zur LBB–Bedingung:

- **Lemma 2.2:**

> Die folgenden Aussagen sind äquivalent:
>
> 1. $\exists\, \beta_1 = \text{const.} > 0$: $(2.3)_{3)}$, d.h.
>
> (2.8) $$\inf_{\mu \in M} \sup_{v \in X} \frac{b(v,\mu)}{\|v\|_X \, \|\mu\|_M} \geq \beta_1 = \text{const.} > 0.$$
>
> 2. Der Operator $B : V_0^\perp \mapsto M^*$ ist ein Isomorphismus, und es gilt:
>
> (2.8)' $$\|Bv\|_{M^*} \geq \beta_1 \, \|v\|_X \quad \forall\, v \in V_0^\perp,$$
>
> wobei $V_0^\perp := \{u \in X : (u,v)_X = 0 \quad \forall\, v \in V_0 = \ker B\}$.
>
> 3. Der Operator $B^* : M \longmapsto V_0^0 \equiv (\ker B)^0 \subset X^*$ ist ein Isomorphismus, und es gilt:
>
> (2.8)” $$\|B^*\mu\|_{X^*} \geq \beta_1 \, \|\mu\|_M \quad \forall\, \mu \in M,$$
>
> wobei $V_0^0 = (V_0)^0$ die Polare von $V_0$ ist, d.h.
> $V_0^0 = (\ker B)^0 := \{l \in X^* : < l, v > = 0 \quad \forall\, v \in V_0 = \ker B\}$.

**Beweis:**

a) 1. $\Longrightarrow$ 3.

$\widehat{=}$ Aussage von Folgerung 1.3 ! (mms)
$< B^*\mu, v > := b(v,\mu) \equiv \underline{\underline{a(\mu, v), \;\; A = B^*}}$

b) 3. $\Longrightarrow$ 2.

- $v \in V_0^\perp \subset X :$ $\quad w \in X \longmapsto (v,w)_X \in I\!R^1 :$
  $(v,w)_X = 0 \quad \forall\, w \in V_0$
  $\Updownarrow$
  $g_V \in V_0^0 \subset X^* :$ $\quad < g_V, w >_{X^* \times X} := (v,w)_X$

- $B^* : M \mapsto V_0^0$ ist wegen 3. Isomorphismus, d.h. $\exists!\, \lambda \in M : g_V = B^*\lambda$

$\curvearrowright$ $b(w,\lambda) = < B^*\lambda, w > = < g_V, w > = (v,w) \quad \forall\, w \in X$

$\curvearrowright$ $\|v\|_X = \|g_V\|_{X^*} = \|B^*\lambda\|_{X^*} \underset{3.}{\geq} \beta_1 \, \|\lambda\|_M$

$\curvearrowright$ Für $\underline{\underline{w = v}} \in V_0^\perp \subset X$ folgt:

$$\|Bv\|_{M^*} := \sup_{\mu \in M} \frac{b(v,\mu)}{\|\mu\|_M} \geq \frac{b(v,\lambda)}{\|\lambda\|} = \frac{(v,v)}{\|\lambda\|} \geq \beta_1 \, \|v\|_X$$

- Folglich gelten für

  $B : V_0^\perp \equiv (\ker B)^\perp \longrightarrow M^*$

  die Vor. 1) – 3) von Satz 1.2. ⇒ 2. $\underline{\underline{\text{Isomorphismus + Ungleichung}}}$ #

c) 2. $\Longrightarrow$ 1.

2. $B : V_0^\perp \to M^*$ Isomorphismus, $\|Bv\|_{M^*} \geq \beta_1 \|v\|_X \quad \forall\, v \in V_0^\perp$

Dann gilt für bel., fix. $\mu \in M$:

$$
\begin{aligned}
\|\mu\|_M \; &:= \sup_{g \in M^*} \frac{< g, \mu >_{M^* \times M}}{\|g\|_{M^*}} \overset{\exists!\, v \in V_0^\perp : Bv = g}{=} \\
&= \sup_{v \in V_0^\perp} \frac{< Bv, \mu >}{\|Bv\|_{M^*}} = \sup_{v \in V_0^\perp} \frac{b\,(v,\mu)}{\|Bv\|_{M^*}} \leq \frac{1}{\beta_1} \sup_{v \in V_0^\perp} \frac{b\,(v,\mu)}{\|v\|_X}
\end{aligned}
$$

**q.e.d.**

- **Ü 2.1** Man zeige, daß die inf–sup–Bedingung (2.8) äquivalent zur folgenden Zerlegungseigenschaft ist:

  $\forall\, u \in X \quad \exists\, v \in V_0$ und $w \in V_0^\perp$:

  a) $u = v + w$

  b) $\|w\|_X \leq \dfrac{1}{\beta_1} \|Bu\|_{M^*}$

### 2.1.2 Der Satz von Brezzi

■ **Satz 2.3:** (F. Brezzi, 1974)

Vor.: Es seien die Standardvor. 3) erfüllt, d.h.

1) $f \in X^*$, $g \in M^*$ geg.
2) $|a(u,v)| \leq \alpha_2 \|u\|_X \|v\|_X \quad \forall\, u, v \in X$
   $|b(v,\mu)| \leq \beta_2 \|v\|_X \|\mu\|_M \quad \forall\, v \in X \quad \forall\, \mu \in M$
3) LBB–Bedingung (2.8):
   $$\inf_{\mu \in M} \sup_{v \in X} \frac{b(v,\mu)}{\|v\|_X \|\mu\|_M} \geq \beta_1 = \text{const.} > 0$$
4) $V_0$–Elliptizität: $a(v,v) \geq \alpha_1 \|v\|_X^2 \quad \forall\, v \in V_0 = \ker B$

Bh.: Dann $\exists!\, (u,\lambda) \in X \times M$: (2.2), und es gelten die A-priori–Abschätzungen:

$$(2.9)\quad \begin{cases} \|u\|_X \leq \dfrac{1}{\alpha_1} \|f\|_{X^*} + \dfrac{1}{\beta_1}\left(1 + \dfrac{\alpha_2}{\alpha_1}\right) \|g\|_{M^*}, \\[2ex] \|\lambda\|_M \leq \dfrac{1}{\beta_1}\left(1 + \dfrac{\alpha_2}{\alpha_1}\right) \|f\|_{X^*} + \dfrac{\alpha_2}{\beta_1^2}\left(1 + \dfrac{\alpha_2}{\alpha_1}\right) \|g\|_{M^*}, \end{cases}$$

d.h. der lineare Operator

$$L = \begin{bmatrix} A & B^* \\ B & \mathbf{O} \end{bmatrix} : X \times M \longrightarrow X^* \times M^*$$

ist ein Isomorphismus.

■ **Beweis:**

- $g \in M^* \quad \curvearrowright \quad V_g = V(g) := \{u \in X : Bu = g\} \neq \emptyset$,
  da aus Lemma 2.2: 2) $B : V_0^\perp \to M^*$ Isomorphismus folgt:
  - $\exists!\, u_g \in V_0^\perp \subset X : Bu_g = g$
  - (2.10) $\|u_g\|_X \leq \beta_1^{-1} \|Bu_g\|_{M^*} = \beta_1^{-1} \|g\|_{M^*} \quad$ (2.8)”

- Mit dem Ansatz

  $$w = u - u_g$$

  ist (2.2) äquivalent zu

$$(2.11)\quad \begin{cases} a(w,v) + b(v,\lambda) &= \; < f, v > - a(u_g, v) & \forall\, v \in X \\ b(w,\mu) &= \; 0 & \forall\, \mu \in M \end{cases}$$

- Wegen Vor. 4), d.h. $\underline{V_0\text{–Elliptizität von } a(\cdot,\cdot)}$, gilt (Lax–Milgram):

  - $\exists!\, w \in V_0 : a(w,v) = \langle f, v\rangle - a(u_0, v) \quad \forall\, v \in V_0$

    $$\Downarrow$$

    $$\boxed{b(w,\mu) = 0 \ \forall\, \mu \in M}$$

  (2.12) • $\|w\|_X \underset{\substack{\uparrow \\ \text{Vor. 2)}}}{\leq} \alpha_1^{-1}\left(\|f\|_{X^*} + \alpha_2 \|u_g\|_X\right)$

- Die Gleichungen (2.11) sind erfüllt, falls

  $$(?)\ \exists\, \lambda \in M : b(v,\lambda) = \underbrace{\langle f, v\rangle - a(u_g + w, v)}_{=:\langle l, v\rangle :} \quad \forall\, v \in X$$

  a) $l \in X^*$

  b) $\langle l, v\rangle = 0 \ \forall\, v \in V_0$, d.h. $\underline{\underline{l \in V_0^0}}$

<u>Lemma 2.2; 3):</u> $B^* : M \mapsto V_0^0 = (\ker B)^0 \subset X^*$ Isomorphismus

$\Longrightarrow$ • $\exists!\, \lambda \in M : B^*\lambda = l$, d.h. $b(v,\lambda) = \langle l, v\rangle \quad \forall\, v \in X$

(2.13) • 
$$\begin{aligned} \|\lambda\|_M &\leq \beta_1^{-1}\|B^*\lambda\|_{X^*} = \beta_1^{-1}\|l\|_{X^*} \leq \\ &\leq \beta_1^{-1}\left(\|f\|_{X^*} + \alpha_2\|u_g + w\|\right) \end{aligned}$$

- <u>Resultat:</u>

  1. $\exists!\, u_g \in V_0^\perp,\ \exists!\, w \in V_0,\ \exists!\, \lambda \in M$:

     $u = u_g + w \in X = V_0 \oplus V_0^\perp,\ \lambda \in M$:

     $$\left.\begin{aligned} a(u,v) + b(v,\lambda) &= \langle f, v\rangle \quad \forall\, v \in X \\ b(u,\mu) &= \langle g, \mu\rangle \quad \forall\, \mu \in M \end{aligned}\right\}\ (2.2)$$

     #

  2. $$\begin{aligned} \|u\|_X &= \|u_g + w\|_X \overset{(2.10),(2.12)}{\leq} \\ &\leq \|u_g\|_X + \|w\|_X \leq \\ &\leq \beta_1^{-1}\|g\|_{M^*} + \alpha_1^{-1}\left(\|f\|_{X^*} + \alpha_2\|u_g\|_X\right) \overset{(2.10)}{\leq} \\ &\leq \beta_1^{-1}\|g\|_{M^*} + \alpha_1^{-1}\left(\|f\|_{X^*} + \frac{\alpha_2}{\beta_1}\|g\|_{M^*}\right) = \\ &= \frac{1}{\alpha_1}\|f\|_{X^*} + \frac{1}{\beta_1}\left(1 + \frac{\alpha_2}{\alpha_1}\right)\|g\|_{M^*} \qquad \# \end{aligned}$$

  3. $$\begin{aligned} \|\lambda\|_M &\overset{(2.13)}{\leq} \beta_1^{-1}\left(\|f\|_{X^*} + \alpha_2\|u\|_X\right) \leq \\ &\leq \frac{1}{\beta_1}\left(1 + \frac{\alpha_2}{\alpha_1}\right)\|f\|_{X^*} + \frac{\alpha_2}{\beta_1^2}\left(1 + \frac{\alpha_2}{\alpha_1}\right)\|g\|_{M^*} \end{aligned}$$

**q.e.d.**

■ $\boxed{\textbf{Ü 2.2}}$ Zeigen Sie <u>direkt</u>, daß die homogene gemischte Variationsgleichung

$$(2.2)_0 \quad \left\{ \begin{array}{lcl} a\,(u,v) + b\,(v,\lambda) & = & 0 \quad \forall\, v \in X \\ b\,(u,\mu) & = & 0 \quad \forall\, \mu \in M \end{array} \right.$$

unter den Voraussetzungen von Satz 2.2 nur die triviale Lösung $(u,\lambda) \equiv (0,0) \in X \times M$ hat (d.h. Eindeutigkeit).

<u>Lösung:</u>

- Aus $b\,(u,\mu) = 0 \quad \forall\, \mu \in M \;\curvearrowright\; u \in V_0$
- Setzen in $(2.2)_0$ $v = u$ und $\mu = -\lambda$:

$$\begin{array}{c|lcl} & a\,(u,u) + b\,(u,\lambda) & = & 0 \\ + & -b\,(u,\lambda) & = & 0 \\ \hline & a\,(u,u) & = & 0, \quad u \in V_0 \end{array}$$

$\curvearrowright\; 0 = a\,(u,u) \geq \alpha_1\,\|u\|_X^2$, d.h. $\underline{\underline{u = 0}}$

- $0 = \underset{\substack{\| \\ 0}}{a\,(u,v)} + \underline{\underline{b\,(v,\lambda) = 0 \quad \forall\, v \in X}}$

  inf–sup–Bedingung liefert

  $$\beta_1\,\|\lambda\|_M \leq \sup_{v \in X} \frac{b\,(v,\lambda)}{\|v\|_X} = 0, \quad \text{d.h. } \underline{\underline{\lambda = 0}}$$

**q.e.d.**

### 2.1.3 Gemischte FE-Approximation

■ **Seien**

$$\begin{aligned} X_h &:= \text{ span } \{p^{(i)} : i \in \omega_{X_h}\} \subset X, \quad \dim\, X_h = n_h \\ M_h &:= \text{ span } \{q^{(i)} : i \in \omega_{M_h}\} \subset M, \quad \dim\, M_h = m_h \end{aligned}$$

endlichdimensionale Teilräume von $X$ und $M$.

- **Dann kann das zu (2.2) gehörige Galerkin–Schema (gFEM) offenbar wie folgt aufgeschrieben werden:**

(2.14) $= (2.2)_h$

$$\boxed{\begin{array}{lcll} \text{Ges. } (u_h, \lambda_h) \in X_h \times M_h : & & & \\ a\,(u_h, v_h) + b\,(v_h, \lambda_h) & = & < f, v_h > & \forall\, v_h \in X_h \\ b\,(u_h, \mu_h) & = & < g, \mu_h > & \forall\, \mu_h \in M_h \end{array}}$$

$$u_h = \sum_{i \in \omega_{X_h}} u^{(i)}\, p^{(i)}, \quad \lambda_h = \sum_{i \in \omega_{M_h}} \lambda^{(i)}\, q^{(i)}$$

($\underline{2.14}$) $= (\underline{2.2})_h$

$$\boxed{\begin{array}{l} \text{Ges. } \underline{u}_h = \left[u^{(i)}\right]_{i \in \omega_{X_h}} \in \mathbb{R}^{n_h}, \ \underline{\lambda}_h = \left[\lambda^{(i)}\right]_{i \in \omega_{M_h}} \in \mathbb{R}^{m_h} : \\ \begin{bmatrix} A_h & B_h^T \\ B_h & \mathbf{O} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{u}_h \\ \underline{\lambda}_h \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{f}_h \\ \underline{g}_h \end{bmatrix} \end{array}}$$

mit $\underline{f}_h = \left[< f, p^{(k)} >\right]_{k \in \omega_{X_h}} \in \mathbb{R}^{n_h}, \ \underline{g}_h = \left[< g, q^{(k)} >\right]_{k \in \omega_{M_h}} \in \mathbb{R}^{m_h},$

$$\underbrace{A_h = \left[a\left(p^{(i)}, p^{(k)}\right)\right]_{k,i \in \omega_{X_h}}}_{n_h \times n_h\text{–Matrix}}, \quad \underbrace{B_h = \left[b\left(p^{(i)}, q^{(k)}\right)\right]_{k \in \omega_{M_h}, i \in \omega_{X_h}}}_{m_h \times n_h\text{–Matrix}}$$

- **Es seien**

$$(2.15) \qquad \begin{cases} V_{0h} \equiv V_h(0) := \{v_h \in X_h : b\,(v_h, \mu_h) = 0 \ \forall\, \mu_h \in M_h\} \subset X_h \subset X \\ V_{gh} \equiv V_h(g) := \{v_h \in X_h : b\,(v_h, \mu_h) = < g, \mu_h > \ \ \forall\, \mu_h \in M_h\} \subset X_h \subset X \end{cases}$$

die diskreten Analoga zu $V_0 = V(0)$ und $V_g = V(g)$.
Obwohl $X_h \subset X$ gilt, hat man im allgemeinen

$$V_{0h} \not\subset V_0, \quad V_{gh} \not\subset V_g.$$

Man sagt, daß die Gleichgewichtsbedingung erfüllt ist, wenn

$$(2.16) \qquad V_{0h} \subset V_0,$$

d.h. wenn aus $b\,(v_h, \mu_h) = 0 \quad \forall\, \mu_h \in M_h$ stets folgt
$b\,(v_h, \mu) = 0 \quad \forall\, \mu \in M$ !

■ **Aus der stetigen LBB–Bedingung (2.3)$_{3)}$** für $b(\cdot,\cdot)$ folgt offenbar nicht das diskrete Analogon, genauso wie aus der $V_0$–Elliptizität $(2.3)_{4)}$ im allgemeinen nicht die $V_{0h}$–Elliptizität folgen muß, da im allgemeinen $V_{0h} \not\subset V_0$ !
Diese Bedingungen müssen extra vorausgesetzt werden:

(2.17) • Diskrete LBB–Bedingung:
$\exists\, \tilde{\beta}_1 = \text{const.} > 0 : \tilde{\beta}_1 \neq \tilde{\beta}_1(h)$ und

$$\sup_{v_h \in X_h} \frac{b(v_h,\mu_h)}{\|v_h\|_X} \geq \tilde{\beta}_1 \|\mu_h\|_M \quad \forall\, \mu_h \in M_h$$
$$\Updownarrow$$
$$\inf_{\mu_h \in M_h} \sup_{v_h \in X_h} \frac{b(v_h,\mu_h)}{\|v_h\|_X \|\mu_h\|_M} \geq \tilde{\beta}_1 = \text{const.} > 0$$

(2.18) • $V_{0h}$–Elliptizität von $a(\cdot,\cdot)$:
$\exists\, \tilde{\alpha}_1 = \text{const.} > 0 : \tilde{\alpha}_1 \neq \tilde{\alpha}_1(h)$ und

$$a(v_h,v_h) \geq \tilde{\alpha}_1 \|v_h\|_X^2 \quad \forall\, v_h \in V_{0h}.$$

■ **Satz 2.4:** (Diskreter Satz von Brezzi)

Vor.: $(2.3)_{1)}$ $f \in X^*$, $g \in M^*$.
$(2.3)_{2)}$ $|a(u,v)| \leq \alpha_2 \|u\|_X \|v\|_X \quad \forall\, u,v \in X$,
$|b(v,\mu)| \leq \beta_2 \|v\|_X \|\mu\|_M \quad \forall\, v \in X \quad \forall\, \mu \in M$.
(2.17) Diskrete LBB–Bedingung: $\tilde{\beta}_1$.
(2.18) $V_{0h}$–Elliptizität von $a(\cdot,\cdot)$: $\tilde{\alpha}_1$.

Bh.: Dann $\exists\,!\ (u_h,\lambda_h) \in X_h \times M_h$: $(2.14) \equiv (2.2)_h$, und es gelten analog zu (2.9) die A-priori–Abschätzungen:

$$(2.19)\quad \begin{cases} \|u_h\|_X \leq \dfrac{1}{\tilde{\alpha}_1} \|f\|_{X^*} + \dfrac{1}{\tilde{\beta}_1}\left(1 + \dfrac{\alpha_2}{\tilde{\alpha}_1}\right) \|g\|_{M^*}, \\[2ex] \|\lambda_h\|_M \leq \dfrac{1}{\tilde{\beta}_1}\left(1 + \dfrac{\alpha_2}{\tilde{\alpha}_1}\right) \|f\|_{X^*} + \dfrac{\alpha_2}{\tilde{\beta}_1^2}\left(1 + \dfrac{\alpha_2}{\tilde{\alpha}_1}\right) \|g\|_{M^*} \end{cases}$$

**Beweis:** analog zum Beweis von Satz 2.3 !

$$\hookrightarrow \begin{bmatrix} A_h & B_h \\ B_h^T & \mathbf{O} \end{bmatrix} \text{ ist regulär !}$$

■ **Satz 2.5:** (Konvergenzsatz)

Vor.: 1. Es seien die Standardvor. (2.3) mit den Konstanten $\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2$ erfüllt.
2. Diskrete LBB–Bedingung (2.17): $\tilde{\beta}_1$.
3. $V_{0h}$–Elliptizität von $a(\cdot,\cdot)$, d.h. (2.18): $\tilde{\alpha}_1$.

Bh.: Dann $\exists$ Konstante $c = \text{const.} > 0$, $c \neq c(h)$:

$$(2.20)\quad \underbrace{\|u-u_h\|_X + \|\lambda-\lambda_h\|_M}_{\text{Diskretisierungsfehler}} \leq \underbrace{c\left\{\inf_{w_h\in X_h}\|u-w_h\|_X + \inf_{\gamma_h\in M_h}\|\lambda-\gamma_h\|_M\right\}}_{\text{Approximationsfehler}}$$

**Beweis:**

- $(2.2)_h$ – (2.2):
$$\begin{aligned} a(u_h-u,v_h)+b(v_h,\lambda_h-\lambda) &= 0 \quad \forall\, v_h\in X_h\subset X,\\ b(u_h-u,\mu_h) &= 0 \quad \forall\, \mu_h\in M_h\subset M.\end{aligned}$$
- Daraus folgt offenbar für beliebige
  $w_h \in X_h$ und $\gamma_h \in M_h$
  die Identität

$$(2.21)\begin{cases} a(u_h-w_h,v_h)+b(v_h,\lambda_h-\gamma_h) = \overbrace{a(u-w_h,v_h)+b(v_h,\lambda-\gamma_h)}^{=:<F,v_h>_{X^*\times X}} \quad \forall\, v_h\in X_h\\ b(u_h-w_h,\mu_h) = \underbrace{b(u-w_h,\mu_h)}_{=:<G,\mu_h>_{M^*\times M}} \quad \forall\, \mu_h\in M\end{cases}$$

- Wenden Satz 2.4 auf (2.21) an und erhalten analog zu (2.19) die A-priori–Abschätzungen:

$$\|u_h-w_h\|_X \leq \frac{1}{\tilde{\alpha}_1}\|F\|_{X^*} + \frac{1}{\tilde{\beta}_1}\left(1+\frac{\alpha_2}{\tilde{\alpha}_1}\right)\|G\|_{M^*} \leq$$

$$\leq \frac{1}{\tilde{\alpha}_1}\left(\alpha_2\|u-w_h\|_X + \beta_2\|\lambda-\gamma_h\|_M\right) +$$

$$+\frac{1}{\tilde{\beta}_1}\left(1+\frac{\alpha_2}{\tilde{\alpha}_1}\right)\beta_2\|u-w_h\|_X =$$

$$= \left(\frac{\alpha_2}{\tilde{\alpha}_1}+\frac{\beta_2}{\tilde{\beta}_2}\left(1+\frac{\alpha_2}{\tilde{\alpha}_1}\right)\right)\|u-w_h\|_X + \frac{\beta_2}{\tilde{\alpha}_1}\|\lambda-\gamma_h\|_M$$

$$\|\lambda_h - \gamma_h\|_M \leq \frac{1}{\tilde{\beta}_1} \left(1 + \frac{\alpha_2}{\tilde{\alpha}_1}\right) \|F\|_{X^*} + \frac{\alpha_2}{\tilde{\beta}_1^2} \left(1 + \frac{\alpha_2}{\tilde{\alpha}_1}\right) \|G\|_{M^*} =$$

$$= \left[\frac{\alpha_2}{\tilde{\beta}_1} \left(1 + \frac{\alpha_2}{\tilde{\alpha}_1}\right) + \frac{\alpha_2}{\tilde{\beta}_1} \frac{\beta_2}{\tilde{\beta}_1} \left(1 + \frac{\alpha_2}{\tilde{\alpha}_1}\right)\right] \|u - w_h\|_X + \frac{\beta_2}{\tilde{\beta}_1} \left(1 + \frac{\alpha_2}{\tilde{\alpha}_1}\right) \|\lambda - \gamma_h\|_M$$

Daraus folgt:

$$\|u - u_h\|_X + \|\lambda - \lambda_h\|_M \leq$$
$$\leq \|u - w_h\|_X + \|u_h - w_h\|_X + \|\lambda - \gamma_h\|_M + \|\lambda_h - \gamma_h\|_M$$
$$\leq c\,\{\|u - w_h\|_X + \|\lambda - \gamma_h\|_M\} \quad \forall\, w_h \in X_h \quad \forall\, \gamma_h \in M_h,$$

mit $c = c\,(\tilde{\alpha}_1, \tilde{\beta}_1, \alpha_2, \beta_2)$. **q.e.d.**

■ **Lemma 2.6:**

Vor.: 1) Die Räume $X_h$ und $M_h$ erfüllen die diskrete LBB–Bedingung (2.17): $\tilde{\beta}_1$.

2) $g \in M^*$.

3) $|b\,(v, \mu)| \leq \beta_2\, \|v\|_X\, \|\mu\|_M \quad \forall\, v \in X \quad \forall\, \mu \in M$.

Bh.: Dann gilt für bel. $u \in V_g = V(g)$:

$$\text{(2.22)} \qquad \inf_{\tilde{v}_h \in V_{gh}} \|u - \tilde{v}_h\| \leq 2 \left(1 + \frac{\beta_2}{\tilde{\beta}_1}\right) \inf_{z_h \in X_h} \|u - z_h\|.$$

**Beweis:**

- Btr. zu geg. $u \in V_g$ restringiertes Minimumproblem (MP)

$$\text{(2.23)} \qquad \inf_{\tilde{v}_h \in V_{gh}} \|u - \tilde{v}_h\| \underset{\text{(mms)}}{\iff} \inf_{\tilde{v}_h \in V_{gh}} \left\{\frac{1}{2}\,(\tilde{v}_h, \tilde{v}_h) - (u, \tilde{v}_h)\right\}$$

- Das MP (2.23) ist äquivalent zum VP (2.24) (mms bzw. Pkt. 2.2)

$$\text{(2.24)} \qquad \left\{ \begin{array}{lcll} (v_h, w_h) + b\,(w_h, \lambda_h) & = & (u, w_h) & \forall\, w_h \in X_h \\ b\,(v_h, \mu_h) & = & < g, \mu_h > & \forall\, \mu_h \in M_h \end{array} \right.$$

- Dann gilt für beliebiges $\underline{\underline{z_h \in X_h}}$ offenbar:

$$\begin{aligned} (v_h - z_h, w_h) + b(w_h, \lambda_h) &= (u - z_h, w_h) \quad \forall\, w_h \in X_h \\ b(v_h - z_h, \mu_h) &= \underbrace{b(u - z_h, \mu_h)}_{=:<g,\mu_h>-b(z_h,\mu_h)} \quad \forall\, \mu_h \in M_h \end{aligned}$$

- Nach Satz 2.4 ($a(\cdot,\cdot) \mapsto (\cdot,\cdot)$) gilt dann (2.19):

$$\|v_h - z_h\| \le \|u - z_h\| + \frac{1}{\tilde{\beta}_1}\left(1 + \frac{1}{1}\right)\beta_2 \|u - z_h\| \quad \forall\, z_h \in X_h,$$

da hier $\alpha_1 = \tilde{\alpha}_1 = 1$ und $\alpha_2 = 1$.

- Mit der Dreiecksungleichung erhalten wir für die Lösung $v_h \in V_{gh}$ von (2.20):

$$\begin{aligned} \inf_{\tilde{v}_h \in V_{gh}} \|u - \tilde{v}_h\| &= \|u - v_h\| \le \|u - z_h\| + \|z_h - v_h\| \le \\ &\le \left(1 + 1 + \frac{\beta_2}{\tilde{\beta}_1}\, 2\right) \|u - z_h\| \quad \forall\, z_h \in X_h. \end{aligned}$$

<u>Resultat:</u>

$$\inf_{\tilde{v}_h \in V_{gh}} \|u - \tilde{v}_h\| \le 2\left(1 + \frac{\beta_2}{\tilde{\beta}_1}\right) \inf_{z_h \in X_h} \|u - z_h\|.$$

**q.e.d.**

■ **<u>Satz 2.7:</u>** (Der Fall $V_{0h} \subset V_0$)

<u>Vor.:</u> 1. Die Voraussetzungen von Satz 2.4 seien erfüllt.
2. Gleichgewichtsbedingung: $V_{0h} \subset V_0$ $(\curvearrowright \tilde{\alpha}_1 = \alpha_1)$.

<u>Bh.:</u> Dann gilt die Fehlerabschätzung

$$(2.25) \quad \|\underset{\substack{\cap \\ V_g}}{u} - \underset{\substack{\cap \\ V_{gh}}}{u_h}\|_X \le 2\left(1 + \frac{\alpha_2}{\alpha_1}\right)\left(1 + \frac{\beta_2}{\tilde{\beta}_1}\right) \inf_{v_h \in X_h} \|u - v_h\|_X$$

**<u>Beweis:</u>**

- Sei $v_h \in V_{gh}$. Dann gilt $\forall\, w_h \in V_{0h}$:

$a(u_h - v_h, w_h) = a(u_h, w_h) - a(u, w_h) + a(u - v_h, w_h)$

$$\begin{array}{c|lcll} + & a(u_h, w_h) + b(w_h, \lambda_h) & = & < f, w_h > & \forall\, w_h \in V_{0h} \subset X_h \\ - & a(u, w_h) + b(w_h, \lambda) & = & < f, w_h > & \forall\, w_h \in V_{0h} \subset X_h \subset X \\ \hline & a(u_h, w_h) - a(u, w_h) & = & \underbrace{b(w_h, \lambda - \lambda_h)}_{=0} & \forall\, w_h \in V_{0h} \end{array}$$

da $w_h \in \underline{\underline{V_{0h} \subset V_0}} := \{w \in X : b(w, \mu) = 0 \ \forall\, \mu \in M\}$

$$= a(u - v_h, w_h) \leq \alpha_2 \|u - v_h\| \, \|w_h\|.$$

- Setzen $w_h = \underset{\displaystyle u_h}{\overset{V_{gh}}{\Psi}} - \underset{\displaystyle v_h}{\overset{V_{gh}}{\Psi}} \in V_{0h}$ $\Rightarrow$

$\alpha_1 \|u_h - v_h\|^2 \leq \alpha_2 \|u - v_h\| \, \|u_h - v_h\|,$

$\Rightarrow \|u_h - v_h\| \leq \dfrac{\alpha_2}{\alpha_1} \|u - v_h\| \quad \forall\, v_h \in V_{gh}.$

- $$\|u - u_h\| \underset{\|u-u_h\| \leq \|u-v_h\| \cdot \|v_h - u_h\|}{\overset{}{\underset{\uparrow}{\leq}}} \left(1 + \frac{\alpha_2}{\alpha_1}\right) \inf_{v_h \in V_{gh}} \|u - v_h\| \underset{\text{Lemma 2.6}}{\underset{\uparrow}{\leq}} \left(1 + \frac{\alpha_2}{\alpha_1}\right) 2 \left(1 + \frac{\beta_2}{\tilde{\beta}_1}\right) \inf_{v_h \in X_h} \|u - v_h\|.$$

**q.e.d.**

## ■ Nützlicher Hilfssatz zur Überprüfung der diskreten Inf-sup–Bedingung:

**Lemma 2.8:**

<u>Vor.:</u> 1) Die Bilinearform $b(\cdot,\cdot) : X \times M \to \mathbb{R}^1$ erfülle die Inf-Sup–Bedingung $(2.3)_{3)}$: $\beta_1$ und sei stetig $(2.3)_{2)}$: $\beta_2$.

2) Zu den Unterräumen $X_h \subset X$ und $M_h \subset M$ existiere „Projektor" $\prod_h \in L(X, X_h)$:

a) $b(v - \Pi_h v, \mu_h) = 0 \quad \forall\, \mu_h \in M_h \quad \forall\, v \in X$

b) $\| \prod_h \|_{L(X, X_h)} \leq c = \text{const.} \neq c(h)$.

<u>Bh.:</u> Dann erfüllen auch die Räume $X_h$ und $M_h$ die (diskrete) Inf-Sup–Bedingung mit $\tilde{\beta}_1 = \beta_1 / c$.

**Beweis:**

Für bel. $\mu_h \in M_h \subset M$ gilt:

$$\beta_1 \|\mu_h\|_M \overset{1)}{\leq} \sup_{v \in X} \frac{b(v, \mu_h)}{\|v\|_X} \overset{2)a)}{=} \sup_{v \in X} \frac{b(\Pi_h v, \mu_h)}{\|v\|_X} \leq$$

$$\leq c \sup_{v \in X} \frac{b(\Pi_h v, \mu_h)}{\|\Pi_h v\|_X} \leq c \sup_{v_h \in X_h} \frac{b(v_h, \mu_h)}{\|v_h\|_X},$$

2)b) $\|\Pi_h v\|_X \leq c \|v\|_X \ \forall\, v \in X$

d.h. $\tilde{\beta}_1 = \beta_1 / c$. **q.e.d.**

## 2.2 Formulierungen im Fall einer symmetrischen und positiven Bilinearform $a(\cdot,\cdot)$

■ **Es seien die Voraussetzungen**

$$
(2.26) \qquad \begin{cases} \bullet \ (2.3)_{1)} \quad f \in X^*, \ \ g \in M^* \text{ gegeben}, \\ \bullet \ (2.3)_{2)} \quad a(\cdot,\cdot), \ b(\cdot,\cdot)\text{– stetig: } \alpha_2, \beta_2, \\ \bullet \ (2.3)_{4)} \quad a(\cdot,\cdot) - V_0\text{–elliptisch: } \alpha_1, \\ \bullet \ V_g \equiv V(g) := \{ v \in X : b(v,\mu) = < g, \mu > \quad \forall\, \mu \in M \} \neq \emptyset \end{cases}
$$

erfüllt, d.h (2.3) ohne LBB–Bedingung + $V_g \neq \emptyset$, und die Bilinearform $a(\cdot,\cdot) : X \times X \to I\!R^1$ sei symmetrisch und positiv, d.h.

$$
(2.27) \qquad \begin{cases} \bullet \ a(u,v) = a(v,u) \quad \forall\, u, v \in X, \\ \bullet \ a(v,v) > 0 \quad \forall\, v \in X : v \neq \mathbf{O}. \end{cases}
$$

■ **Btr. nun folgendes restringiertes Minimumproblem (RMP)**

(2.28)

$$
\boxed{\begin{array}{l} \text{Ges. } u \in V_g : J(u) = \inf\limits_{v \in V_g} J(v) \\ \qquad\qquad\qquad\qquad \downarrow \\ \qquad\qquad\qquad\quad \boxed{v \in X : b(v,\mu) = < g, \mu > \quad \forall\, \mu \in M} \\ \qquad\qquad\qquad\quad = \text{Nebenbedingung in Gleichungsform} \\[1em] \text{Ges. } u \in X: \ \ J(u) = \inf\limits_{v \in X} J(v) \\ \qquad\qquad\quad \text{unter der Nebenbedingung} \\ \qquad\qquad\quad b(u,\mu) = < g, \mu > \quad \forall\, \mu \in M \end{array}}
$$

mit dem Energiefunktional

$$
(2.29) \qquad J(v) = \frac{1}{2}\, a(v,v) - < f, v > .
$$

■ **Offenbar ist das RMP (2.28) äquivalent zu dem folgenden restringierten Variationsproblem (RVP):**

$$
(2.30) \qquad \boxed{\text{Ges. } u \in V_g : a(u,v) = < f, v > \quad \forall\, v \in V_0}
$$

Dies folgt sofort aus Satz I.2.10, da

- $a(\cdot,\cdot)$ auf $X$ stetig,
- $a(\cdot,\cdot)$ auf $V_0$ symmetrisch (sogar auf $X$) ist,
- $a(\cdot,\cdot)$ auf $V_0 \subset X$ positiv (sogar elliptisch) ist,
- $V_0 \subset X$ – Unterraum, $V_g = w_g + V_0$ – Hyperebene.

■ **Ü 2.3**

> Unter den Voraussetzungen (2.26) hat das RVP (2.30) eine eindeutig bestimmte Lösung $u \in V_g$ $(\exists\,!)$, und es gilt die A-priori–Abschätzung:
>
> $$\|u\|_X \leq \frac{1}{\alpha_1}\,\|f\|_{X^*} + \left(1 + \frac{\alpha_2}{\alpha_1}\right)\,\|w\|_X \quad \forall\ w \in V_g$$

Lösung:

- Sei $w \in V_g \neq \emptyset$ beliebig, aber fest gewählt:
  $\Longrightarrow w + z \in V_g \quad \forall\ z \in V_0$, da $b(\cdot,\cdot)$ bilinear ist !
- Ansatz für $u \in V_g$ (Homogenisieren):
  $u = w + z^*$ mit fixiertem $w \in V_g$ und ges. $z^* \in V_0$ $(\exists\,!\ ?)$:
  $\Longrightarrow$ (2.30) $\Leftrightarrow$ $(2.30)_0$: Ges. $z^* \in V_0 : a(z^*, v) = \underbrace{< f, v > - \, a(w, v)}_{< f,\cdot > - a(w,\cdot) \in V_0^*} \quad \forall\ v \in V_0$

  $\Longrightarrow$ Lax–Milgram (Satz I.2.9) $\curvearrowright$ $\underline{\underline{\exists\,!\ z^* \in V_0.}}$
- A-priori–Abschätzung: $v = z^* \in V_0$ in $(2.30)_0$ $\curvearrowright$
  $\alpha_1\,\|z^*\|_X^2 \leq a(z, z^*) \leq (\|f\|_{X^*} + \alpha_2\,\|w\|_X)\,\|z^*\|_X$
  $\Longrightarrow \|u\|_X \leq \|w\|_X + \|z^*\|_X \leq \dfrac{1}{\alpha_1}\,\|f\|_{X^*} + \left(1 + \dfrac{\alpha_2}{\alpha_1}\right)\,\|w\|_X.$

**q.e.d.**

■ **Btr. das Lagrange–Funktional**

(2.31) $$\begin{cases} L(\cdot,\cdot) : X \times M \longrightarrow \mathbb{R}^1, \\ L(u,\lambda) := J(u) + [b(u,\lambda) - < g, \lambda >] \end{cases}$$

und das dazugehörige Sattelpunktproblem (SP):

(2.32) $$\boxed{\begin{array}{l} \text{Ges. } (u,\lambda) \in X \times M : \\ L(u,\mu) \underset{(l)}{\leq} L(u,\lambda) \underset{(r)}{\leq} L(v,\lambda) \quad \forall\ v \in X \quad \forall\ \mu \in M \end{array}}$$

■ **Satz 2.9:**

| | |
|---|---|
| Vor.: | Es seien die Bedingungen (2.26) und (2.27) erfüllt. |
| Bh.: | 1. GVP (2.2) $\equiv$ SP (2.32) |
| | 2. $(u,\lambda) \in X \times M$: $\underset{\text{GVP}}{(2.2)} \equiv \underset{\text{SP}}{(2.32)} \Rightarrow u \in X$: $\underset{\text{RVP}}{(2.30)} \equiv \underset{\text{RMP}}{(2.28)}$ |

**Beweis:**

a) $\boxed{\text{SP} \Rightarrow \begin{array}{c}\underline{\text{GVP}}\\ \text{RVP}\\ \text{RMP}\end{array}}$

- Sei $(u,\lambda) \in X \times M$: (2.32) SP, d.h.

$$\text{(r)} \quad \tfrac{1}{2}\, a\,(u,u) - < f, u > + [b\,(u,\lambda) - < g, \lambda >] \le \tfrac{1}{2}\, a\,(v,v) - < f, v > + \\ + [b\,(v,\lambda) - < g, \lambda >] \quad \forall\, v \in X,$$

$$\text{(l)} \quad \tfrac{1}{2}\, a\,(u,u) - < f, u > + [b\,(u,\mu) - < g, \mu >] \le \tfrac{1}{2}\, a\,(u,u) - < f, u > + \\ + [b\,(u,\lambda) - < g, \lambda >] \quad \forall\, \mu \in M.$$

- $$\begin{array}{lll} \text{(l)} \Leftrightarrow & b\,(u,\mu) - < g, \mu > \le b\,(u,\lambda) - < g, \lambda > & \forall\, \mu \in M \\ \Leftrightarrow & 0 \le b\,(u, \lambda - \mu) - < g, \lambda - \mu > & \forall\, \mu \in M \\ \Leftrightarrow & 0 \le b\,(u,\nu) - < g, \nu > & \forall\, \nu = \lambda - \mu \in M \\ \overset{\nu \mapsto -\nu}{\Leftrightarrow} & 0 = b\,(u,\nu) - < g, \nu > & \forall\, \nu \in M \\ \Leftrightarrow & \boxed{b\,(u,\mu) = < g, \mu > \quad \forall\, \mu \in M} \Leftrightarrow \boxed{u \in V_g} & \end{array}$$

- $$\text{(r)} \Leftrightarrow \tfrac{1}{2}\, a\,(u,u) - < f, u > + \overset{\overset{\text{(l)} \iff b(u,\lambda) - <g,\lambda> = 0}{\|}}{0} \le \underbrace{\frac{1}{2}\, a\,(v,v) - < f, v > + [b\,(v,\lambda) - < g, \lambda >]} \quad \forall v \in X$$

1) $\Big\Downarrow\ V_g \subset X$ 2)

$$\tfrac{1}{2}\, a\,(u,u) - < f, u > \le \tfrac{1}{2}\, a\,(v,v) - < f, v > \quad \forall\, v \in V_g$$

$$\text{(l)} \Leftrightarrow u \in V_g \quad \Big\Updownarrow$$

$$\boxed{u \in V_g :\ J\,(u) \le J\,(v) \quad \forall\, v \in V_g} \Leftrightarrow \underline{\underline{(2.28) \equiv (2.30)}}$$

2. #

2) $\frac{1}{2}\,a\,(v,v) - < f,v > + [b\,(v,\lambda) - < g,\lambda >] \underset{v\in X}{\longrightarrow} \min$

$$\Updownarrow$$

$$\frac{1}{2}\,a\,(v,v) - < f,v > + b\,(v,\lambda) \underset{v\in X}{\longrightarrow} \min$$

$$\Updownarrow \longleftarrow \boxed{\text{Satz I.2.10}}$$

$$a\,(u,v) \;= < f,v > - \,b\,(v,\lambda) \quad \forall\, v \in X$$

$$\Updownarrow$$

$$\boxed{u \in X :\; a\,(u,v) + b\,(v,\lambda) = < f,v > \quad \forall\, v \in X}$$

- Resultat:

(2.32) $\Rightarrow$ (2.2)

$$\boxed{\begin{array}{lcll} (u,\lambda) \in X \times M : & & & \\ a\,(u,v) + b\,(v,\lambda) & = & < f,v > & \forall\, v \in X \\ b\,(u,\mu) & = & < g,\mu > & \forall\, \mu \in M \end{array}}$$

b) $\boxed{\text{GVP} \Longrightarrow \text{SP}}$ (folgt aus a), da „$\Leftrightarrow$“ !)

- $b\,(u,\nu) - < g,\nu > = 0 \quad \forall\, \nu = \underset{\substack{\cup\\ M\\ \text{fix.}}}{\lambda} - \underset{\substack{\cup\\ M\\ \text{bel.}}}{\mu} \in M$

$$\Updownarrow \qquad\qquad \geq$$

$$b\,(u,\lambda) - < g,\lambda > \geq \; b\,(u,\mu) - < g,\mu > \quad \forall\, \mu \in M$$

$$\Updownarrow$$

$$L\,(u,\lambda) \geq L\,(u,\mu) \quad \forall\, \mu \in M \Leftrightarrow \text{(l)} \;\#$$

- $u \in X :\; a\,(u,v) + b\,(v,\lambda) = < f,v > \quad \forall\, v \in X;\; \lambda \in M.$

$$\Updownarrow \longleftarrow \text{siehe a)}$$

$$u \in X :\; \frac{1}{2}\,a\,(u,u) - < f,u > + \Big[b\,(u,\lambda) \; - \underline{< g,\lambda >}\Big] \leq$$

$$\Updownarrow \qquad \leq \frac{1}{2}\,a\,(v,v) - < f,v > + \Big[b\,(v,\lambda) \; - \underline{< g,\lambda >}\Big] \quad \forall\, v \in X$$

$$L\,(u,\lambda) \leq L\,(v,\lambda) \quad \forall\, v \in X \;\Leftrightarrow\; \text{(r)} \quad \#$$

**q.e.d.**

- **Aus der $\exists!$ der Lösung $\boldsymbol{u} \in \boldsymbol{V_g}$ des RMP (2.28) $\equiv$ RVP (2.30) folgt nicht notwendig $\exists!$ Lagrangescher Parameter $\boldsymbol{\lambda} \in \boldsymbol{M}$:** $(u, \lambda) \in X \times M$ löst eindeutig GVP (2.2) $\equiv$ SP (2.32) !

  $\Longrightarrow$ Gegenbeispiel:

  a) Btr. RMP in $X = \mathbb{R}^2$:
  $$\boxed{\begin{array}{r} \text{Ges. } \binom{x}{y} \in \mathbb{R}^2 : (x^2 + y^2) \longrightarrow \min \\ \text{NB: } x + y = 2 \end{array}}$$

  $$x^2 + (2 - x)^2 = x^2 + 4 - 4x + x^2 \to \min$$
  $\Longrightarrow \underline{\underline{\exists!\ \text{Lsg. } x = y = 1\ !}}$ $\quad \Longleftrightarrow 4x - 4 = 0 : \underline{\underline{x = 1,\ y = 2 - x = 1}}.$

  Lagrangesche Fkt.: $L\left(\binom{x}{y}, \underset{M = \mathbb{R}^1}{\overset{}{\lambda}}\right) := x^2 + y^2 + \lambda\,(x + y - 2)$ $\quad (\lambda \in M = \mathbb{R}^1)$

  $\Longrightarrow \exists!$ SP $x = y = 1,\ \lambda = -2$ (mms)

  b) Btr. RMP in $X = \mathbb{R}^2$:
  $$\boxed{\begin{array}{r} \text{Ges. } \binom{x}{y} \in \mathbb{R}^2 : (x^2 + y^2) \longrightarrow \min \\ \underline{\text{NB:}}\ \ x + y = 2 \\ 3x + 3y = 6 \end{array}}$$

  $\Longrightarrow \underline{\underline{\exists!\ \text{Lsg. } x = y = 1\ !}}$ $\qquad b\left(\binom{x}{y}, \binom{\lambda}{\mu}\right) = \lambda\,(x + y) + \mu\,(3x + 3y)$

  Lagrangesche Fkt.: $L\left(\binom{x}{y}, \binom{\lambda}{\mu}\right) := (x^2 + y^2) + \lambda\,(x + y - 2) + \mu\,(3x + 3y - 6)$ $\quad \left(\binom{\lambda}{\mu} \in M = \mathbb{R}^2\right)$

  $\Longrightarrow$ SP $x = y = 1$ und alle $\binom{\lambda}{\mu} \in \mathbb{R}^2 : \lambda + 3\,\mu = 2$ (mms), d.h. $\exists \not!$.

- **Falls jedoch zusätzlich die LBB–Bedingung erfüllt ist**, d.h. falls die
  - Standardvoraussetzungen (2.3) und die
  - Zusatzvoraussetzungen (2.27)

  erfüllt sind, dann sind alle Formulierungen äquivalent:

$$\begin{array}{ccccc} \boxed{(\text{GVP})} \equiv (\text{SP}) & \underset{\underset{\exists!\,\lambda \in M}{\Longleftarrow}}{\overset{\overset{\text{o.k.}}{\Longrightarrow}}{\Longleftrightarrow}} & (\text{RVP}) \equiv (\text{RMP}) \\ \Downarrow & & \Downarrow \\ \exists!\ (u, \lambda) \in X \times M & & \exists!\ u \in V_g \end{array}$$

## 2.3 Gemischte Variationsprobleme mit Störterm (Strafterm)

■ **Es seien**

(2.33)
$$\begin{cases} \bullet\ M_c \subset M \text{ – dichter Teilraum, d.h. } \overline{M_c}^{\|\cdot\|_M} = M, \text{ und} \\ \bullet\ c(\cdot,\cdot) : M_c \times M_c \to I\!R^1 \text{ – nichtneg., symmetrische Bilinearform, d.h.} \\ \qquad c(\mu,\mu) \geq 0 \quad \forall\, \mu \in M_c,\ c(\mu,\nu) = c(\nu,\mu) \quad \forall\, \nu,\mu \in M_c. \\ \qquad |c(\mu,\nu)| \leq (c(\mu,\mu))^{0.5}(c(\nu,\nu))^{0.5} \text{ (folgt aus obigen Beziehungen)} \end{cases}$$

Btr. nun das folgende gemischte Variationsproblem (GVP($t$)) mit Störterm:

(2.34)
$$\boxed{\begin{array}{lcll} \text{Ges. } (u,\lambda) \in X \times M_c : & & & \\ a(u,v) + b(v,\lambda) & = & < f, v > & \forall\, v \in X \\ b(u,\mu) - t^2 c(\lambda,\mu) & = & < g, \mu > & \forall\, \mu \in M_c \end{array}}$$

unter den Voraussetzungen (2.3) und (2.33), wobei $t \geq 0$ ein „kleiner" reeller Parameter ist.

■ **Folgende Formulierungen sind offenbar zum GVP($t$) (2.34) äquivalent:**

1. Variationsformulierung im Produktraum $X \times M_c$:

(2.35)
$$\boxed{\text{Ges. } (u,\lambda) \in X \times M_c : A(u,\lambda;v,\mu) = < f, g; v, \mu > \quad \forall\, (v,\mu) \in X \times M_c}$$

wobei $A(u,\lambda;v,\mu) := a(u,v) + b(v,\lambda) + b(u,\mu) - t^2 c(\lambda,\mu)$,
$< f, g; v, \mu > := < f, v > + < g, \mu >$ .

2. Operatorformulierung ($M_c = M$):

(2.36)
$$\boxed{\text{Ges. } (u,\lambda) \in X \times M_c : \begin{array}{r} Au + B^*\lambda = f \text{ in } X^* \\ Bu - t^2 C\lambda = g \text{ in } M_c^* \end{array}}$$

$$\Updownarrow$$

(2.37)
$$\boxed{\text{Ges. } (u,\lambda) \in X \times M_c : L\binom{u}{\lambda} = \binom{f}{g} \text{ in } X^* \times M_c^*}$$

mit $L := \begin{bmatrix} A & B^* \\ B & -t^2 C \end{bmatrix} : X \times M_c \longmapsto X^* \times M_c^*$:

(2.38)
$$\left\langle L \begin{pmatrix} u \\ \lambda \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} v \\ \mu \end{pmatrix} \right\rangle := A(u,\lambda;v,\mu) \quad \forall\, (u,\lambda),(v,\mu) \in X \times M_c.$$

■ **Definieren Seminorm**

(2.39) $$|\mu|_c := \sqrt{c\,(\mu,\mu)}, \quad \forall\, \mu \in M_c$$

auf $M_c$ und auf $X \times M_c$ die Graphennorm

(2.40) $$|||(v,\mu)||| := \|v\|_X + \|\mu\|_M + t\,|\mu|_c.$$

Dann kann das folgende Lemma von Kirmse (1990) bewiesen werden:

**Lemma 2.10:** (Kirmse, 1990)

Vor.: 1) Es seien die Standardvoraussetzung (2.3) und die Voraussetzung (2.33) bzgl. $M_c$ und $c\,(\cdot,\cdot)$ erfüllt, und $\underline{\underline{a\,(v,v) \geq 0\ \forall\, v \in X}}$.

2) Ferner $\exists\, \alpha = \text{const.} > 0 : \alpha \neq \alpha\,(t)$ für $0 < t \leq 1$ und

(2.41) $$\frac{a\,(u,u)}{\|u\|_X} + \sup_{\mu \in M_c} \frac{b\,(u,\mu)}{\|\mu\|_M + t\,|\mu|_c} \geq \alpha\,\|u\|_X \quad \forall\, u \in X.$$

Bh.: Dann erfüllt die Bilinearform $A\,(\cdot,\cdot)$ im Produktraum $X \times M_c$ die inf-sup–Bedingung

(2.42) $$\inf_{(u,\lambda) \in X \times M_c} \ \sup_{(v,\mu) \in X \times M_c} \frac{A\,(u,\lambda;v,\mu)}{|||(u,\lambda)||| \cdot |||(v,\mu)|||} \geq \beta > 0$$

mit einer von $t$ unabhängigen Konstanten $\beta = \text{const.} > 0$ für $t \in (0,1]$.

**Beweis:**

Wir unterscheiden 3 Fälle:

- Fall 1: $(u,\lambda) \in X \times M_c : \|u\|_X + \|\lambda\|_M \leq \varepsilon^{-1}\,t\,|\lambda|_c \quad (*)$,
  wobei $\varepsilon \in (0,1]$ später noch fixiert wird.

Dann gilt:

$$
\begin{aligned}
A(u,\lambda;u,-\lambda) &= \overbrace{a(u,u)}^{\geq 0} + t^2 c(\lambda,\lambda) \underset{(*)}{\geq} \\
&\geq \tfrac{1}{2} t^2 |\lambda|_c^2 + \tfrac{1}{2} t^2 |\lambda|_c^2 \geq \\
&\geq \tfrac{1}{2}\varepsilon^2 (\|u\|_X + \|\lambda\|_M)^2 + \tfrac{1}{2} t^2 |\lambda|_c^2 \geq \\
&\geq \tfrac{1}{2}\varepsilon^2 \{(\|u\|_X + \|\lambda\|_M)^2 + t^2 |\lambda|_c^2\} \geq \\
&\underset{(a+b)^2 \leq 2a^2+2b^2}{\geq} \tfrac{1}{4}\varepsilon^2 \{(\|u\|_X + \|\lambda\|_M) + t\,|\lambda|_c\}^2 = \tfrac{1}{4}\varepsilon^2 |||(u,\lambda)|||^2
\end{aligned}
$$

$$
\Longrightarrow \boxed{\tfrac{1}{4}\varepsilon^2 |||(u,\lambda)||| \underset{|||(u,\lambda)|||=|||(u,-\lambda)|||}{\leq} \frac{A(u,\lambda;u,-\lambda)}{|||(u,-\lambda)|||} \leq \sup_{(v,\mu)\in X\times M_c} \frac{A(u,\lambda;v,\mu)}{|||(v,\mu)|||}} \qquad \#
$$

- <u>Fall 2.1:</u> $(u,\lambda) \in X \times M_c :\quad \|u\|_X + \|\lambda\|_M \geq \varepsilon^{-1}\, t\, |\lambda|_c \quad (**)$

$$\|u\|_X \leq \frac{\beta_1}{2\alpha_2} \|\lambda\|_M \qquad (+)$$

<u>Dann gilt:</u>

$$
\begin{aligned}
\beta_1 \|\lambda\|_M &\underset{(2.3)\text{ LBB}}{\leq} \sup_{v\in X} \frac{b(v,\lambda)}{\|v\|_X} = \sup_{v\in X} \frac{A(u,\lambda;v,0) - a(u,v)}{\|v\|_X} \\
&\underset{(2.3)\ a\ \dagger}{\leq} \sup_{(v,\mu)\in X\times M_c} \frac{A(u,\lambda;v,\mu)}{|||(v,\mu)|||} + \alpha_2 \|u\|_X \leq \\
&\underset{(+)}{\leq} \sup_{(v,\mu)} \frac{A(u,\lambda;v,\mu)}{|||(v,\mu)|||} + \frac{\beta_1}{2} \|\lambda\|_M
\end{aligned}
$$

$$\Longrightarrow \frac{\beta_1}{2} \|\lambda\|_M \leq \sup_{(v,\mu)} \frac{A(u,\lambda;v,\mu)}{|||(v,\mu)|||}$$

Resultat:

$$|||(u,\lambda)||| = \|u\|_X + \|\lambda\|_M + t\,|\lambda|_c \underset{(**)}{\leq} (1+\varepsilon)(\|u\|_X + \|\lambda\|_M) \underset{(+)}{\leq} (1+\varepsilon)\left(1 + \frac{\beta_1}{2\,\alpha_2}\right)\|\lambda\|_M \leq$$

$$\leq \left[(1+\varepsilon)\left(1+\frac{\beta_1}{2\,\alpha_1}\right)\frac{2}{\beta_1}\right] \sup_{(v,\mu)} \frac{A\,(u,\lambda;v,\mu)}{|||(v,\mu)|||}, \text{ d.h.}$$

$$\boxed{\left[(1+\varepsilon)\left(1+\frac{\beta_1}{2\,\alpha_1}\right)\frac{2}{\beta_1}\right]^{-1} |||(u,\lambda)||| \overset{<}{\leq} \sup_{(v,\mu)\,\in\, X\times M_c} \frac{A\,(u,\lambda;v,\mu)}{|||(v,\mu)|||}}$$

- Fall 2.2: $(u,\lambda) \in X \times M_c: \quad \|u\|_X + \|\lambda\|_M > \varepsilon^{-1}\,t\,|\lambda|_c \quad (**)$

$$\|u\|_X \geq \frac{\beta_1}{2\,\alpha_2}\,\|\lambda\|_M \qquad (++)$$

  - $$\begin{aligned} |||(u,\lambda)||| &= \|u\|_X + \|\lambda\|_M + t\,|\lambda|_c \leq \\ &\leq (1+\varepsilon)(\|u\|_X + \|\lambda\|_M) \leq \\ &\leq \left[\underset{\substack{\| \\ \delta^{-1}}}{(1+\varepsilon)\quad\left(1+\frac{2\,\alpha_2}{\beta_1}\right)}\right]\|u\|_X = \delta^{-1}\,\|u\|_X \end{aligned}$$

  - $$\alpha\,\delta\,|||(u,\lambda)||| \leq \Bigg[\alpha\,\|u\|_X \overset{(2.41)}{\leq} \frac{a\,(u,u)}{\|u\|_X} + \sup_{\mu\,\in\, M_c} \frac{b\,(u,\mu)}{\|\mu\|_M + t\,|\mu|_c} =$$

$$= \frac{a\,(u,u)}{\|u\|_X} + \sup_{\mu\,\in\,M_c} \frac{A\,(u,\lambda;0,\mu) + t^2 c\,(\lambda,\mu)}{\|\mu\|_M + t\,|\mu|_c} \leq$$

$$\leq \frac{A\,(u,\lambda;u,-\lambda)}{\|u\|_X} + \sup_{\mu\,\in\,M_c} \frac{A\,(u,\lambda;0,\mu)}{|||(0,\mu)|||} + t\,|\lambda|_c \leq$$

$$\underset{\substack{\uparrow \\ \|u\|\geq\delta\,|||(u,\lambda)|||}}{\leq} \frac{1}{\delta}\,\frac{A\,(u,\lambda;u,-\lambda)}{|||(u,-\lambda)|||} + \sup_{\mu\,\in\,M_c} \frac{A\,(u,\lambda;0,\mu)}{|||(0,\mu)|||} + t\,|\lambda|_c \leq$$

$$\leq \left(1+\frac{1}{\delta}\right) \sup_{(v,\mu)\,\in\,X\times M_c} \frac{A\,(u,\lambda;v,\mu)}{|||(v,\mu)|||} + t\,|\lambda|_c\Bigg]$$

- $$t\,|\lambda|_c \underset{(**)}{\overset{}{\underset{\uparrow}{\le}}} \varepsilon\,(\|u\|_X + \|\lambda\|_M) \le \underbrace{\varepsilon\left(1+\frac{2\,\alpha_2}{\beta_1}\right)}_{\le \frac{\alpha}{2}} \|u\|_X \le \frac{\alpha}{2}\,\|u\|_X$$

  d.h. $\varepsilon \;\le\; \dfrac{\alpha}{2}\;\dfrac{\beta_1}{\beta_1 + 2\,\alpha_2} = \dfrac{\alpha\,\beta_1}{2\,\beta_1 + 4\,\alpha_2}$

- $$\frac{\alpha}{2}\,\|u\|_X \le \left(1+\frac{1}{\delta}\right) \sup_{(v,\mu)} \frac{A\,(u,\lambda;v,\mu)}{|||(v,\mu)|||}$$

$$\boxed{\frac{\alpha\,\delta}{2\left(1+\frac{1}{\delta}\right)}\;|||(u,\lambda)||| \le \sup_{(v,\mu)\,\in\, X\times M_c} \frac{A\,(u,\lambda;v,\mu)}{|||(v,\mu)|||}}$$

wobei $\delta^{-1} = (1+\varepsilon)\left(1+\dfrac{2\,\alpha_2}{\beta_1}\right)$,

$$0 < \varepsilon \le \min\left\{1, \frac{\alpha\,\beta_1}{2\,\beta_1 + 4\,\alpha_2}\right\}.$$

- <u>Resultat:</u> Fälle 1 – 3:

$$\sup_{(v,\mu)\,\in\, X\times M_c} \frac{A\,(u,\lambda;v,\mu)}{|||(v,\mu)|||} \ge \beta\,|||(u,\lambda)||| \quad \forall\,(u,\lambda) \in X \times M_c, \tag{2.43}$$

mit $\beta = \min\left\{\dfrac{\varepsilon^2}{4}, \left[(1+\varepsilon)\left(1+\dfrac{\beta_1}{2\,\alpha_1}\right)\dfrac{2}{\beta_1}\right]^{-1}, \dfrac{\alpha\,\delta^2}{2\,(1+\delta)}\right\}$.

**q.e.d.**

■ **Ü 2.4**

> Man zeige, daß die Bedingung (2.41) äquivalent ist zur Babuška–Bedingung für die $X$-Komponente, d.h.
>
> $$\sup_{(v,\mu)\,\in\, X\times M_c} \frac{A\,(u,0;v,\mu)}{|||(v,\mu)|||} \ge \alpha'\,\|u\|_X \quad \forall\, u \in X.$$

■ **Satz 2.11:** ($c\,(\cdot,\cdot)\,\dagger$ bzgl. $\|\cdot\|_M$ $\curvearrowright$ $M_c = M$)

<table><tr><td>

Vor.: 1) Es seien die Standardvoraussetzungen (2.3) erfüllt.

2) $a\,(v,v) \geq 0 \;\; \forall\, v \in X$ und $|a\,(u,v)| \leq (a\,(u,u))^{1/2} (a\,(v,v))^{1/2} \;\; \forall\, u,v \in X$

$|a\,(u,v)| \leq (\alpha_2\, \|u\|_X)^{1/2} (a\,(v,v))^{1/2}$

3) $c\,(\cdot,\cdot) : M \times M \to I\!R^1$:

- $c\,(\mu,\mu) \geq 0 \quad \forall\, \mu \in M$,
- $c\,(\mu,\nu) = c\,(\nu,\mu) \quad \forall\, \nu,\mu \in M$,
- $|c\,(\mu,\nu)| \leq |\mu|_c\, |\nu|_c \quad \forall\, \nu,\mu \in M$,
- stetig ($\dagger$): $|c\,(\mu,\nu)| \leq \gamma_2\, \|\mu\|_M\, \|\nu\|_M \quad \forall\, \mu,\nu \in M$.

Bh.: Dann wird durch (2.37) – (2.38) ein Isomorphismus $L : X \times M \longmapsto X^* \times M^*$ erklärt ($\exists\,!$), und $L^{-1}$ ist für $t \in [0,1]$ gleichmäßig beschränkt.

</td></tr></table>

**Beweis:**

- Wenden Satz 1.2 von Babuška und Aziz auf das Problem (2.35) an:

(2.35)

$$\boxed{\begin{array}{l} \text{Ges. } (u,\lambda) \in U = V = X \times M : \\ A\,(u,\lambda;v,\mu) = \, < f,g;v,\mu > \quad \forall\, (v,\mu) \in V = U = X \times M \end{array}}$$

Satz 1.2: $L : U \to V^*$–Isom. $\overset{\Longleftarrow}{\text{gdw.}}$ 1) $A\,(\cdot,\cdot)$ stetig: o.k.

2) inf-sup: $\beta$

$\curvearrowright$ $\|L^{-1}\| \leq 1/\beta$

3) —, da $U = V$

- Verbleibt zu zeigen:

$$\inf_{(u,\lambda)} \; \sup_{(v,\mu)} \; \frac{A\,(u,\lambda;v,\mu)}{|||(u,\lambda)|||\; |||(v,\mu)|||} \geq \beta = \text{const.} > 0, \quad \beta \neq \beta\,(t)$$

$$\underset{t=0}{\|u\|_X + \|\lambda\|_M} \leq \underset{0 \leq t \leq 1}{|||(u,\lambda)||| := \|u\|_X + \|\lambda\|_M + t\,|\lambda|_c} \overset{3)}{\leq} (1 + \sqrt{\gamma_2})\,(\|u\|_X + \|\lambda\|_M)$$

- Wegen Satz 2.2 von Brezzi ist $L$ für $t = 0$ ein Isomorphismus !

Folglich gilt nach Satz 1.2 von Babuška und Aziz $\left( \text{Isomorphismus gdw. } \begin{array}{l} 1)\ A(\cdot,\cdot)\dagger \\ 2)\ \text{inf-sup.} \\ 3)\ \text{—} \end{array} \right)$ die inf-sup–Bedingung für $t = 0$, d.h. $\exists\ \mu_1 = \text{const.} > 0 \quad (\mu_1 \neq \mu_1(t)\ !)$:

$$\mu_1 \left(\|u\|_X + \|\lambda\|_M\right) \leq \sup_{(v,\mu)} \frac{a(u,v) + b(v,\lambda) + b(u,\mu)}{\|v\|_X + \|\mu\|_M}$$

für alle $(u,\lambda) \in X \times M$. Für $\underline{\lambda = 0}$ erhalten wir speziell:

$\lambda = 0$

$$\mathbf{a} = \mu_1 \|u\|_X \leq \sup_{(v,\mu)} \frac{a(u,v) + b(u,\mu)}{\|v\|_X + \|\mu\|_M} \leq$$

$$\leq \sup_{v \in X} \frac{a(u,v)}{\|v\|_X} + \sup_{\mu \in M} \frac{b(u,\mu)}{\|\mu\|_M} \leq$$

$$\overset{1),2)}{\leq} \underbrace{\left[\alpha_2\, a(u,u)\right]^{1/2}}_{\mathbf{b}} + \underbrace{(1+\sqrt{\gamma_2}) \sup_{\mu \in M} \frac{b(u,\mu)}{\|\mu\|_M + t\,|\mu|_c}}_{\mathbf{c}}$$

3) Stetigkeit $\quad \|\mu\|_M + t\,|\mu|_c \leq (1+\sqrt{\gamma_2})\,\|\mu\|_M$

$\Big\Downarrow \leftarrow \boxed{\text{Ü } 2.5}$

$$\boxed{\underset{a,b,c>0}{a \leq b + c} \implies a \leq \frac{b^2}{a} + 2c}$$

$1 \leq \frac{b}{a} + \frac{c}{a} \qquad 1 \leq \left(\frac{b}{a}\right)^2 + 2\left(\frac{c}{a}\right)$

$$\mu_1 \|u\|_X \leq \frac{\alpha_2}{\mu_1} \frac{a(u,u)}{\|u\|_X} + 2(1+\sqrt{\gamma_2}) \sup_{\mu \in M} \frac{b(u,\mu)}{\|\mu\|_M + t\,|\mu|_c}$$

Folglich gilt Bedingung (2.41) aus Lemma 2.10 von Kirmse:

$$\underbrace{\frac{\mu_1}{\max\left\{\frac{\alpha_2}{\mu_1}, 2(1+\sqrt{\gamma_2})\right\}}}_{=\alpha \neq \alpha(t)} \|u\|_X \leq \frac{a(u,u)}{\|u\|_X} + \sup_{\mu \in M} \frac{b(u,\mu)}{\|\mu\|_M + t\,|\mu|_c} \quad \forall\ u \in X$$

- Nach <u>Lemma 2.10</u> gilt inf-sup–Bedingung (2.42) mit $\beta \neq \beta(t)$ für $t \in [0,1]$.

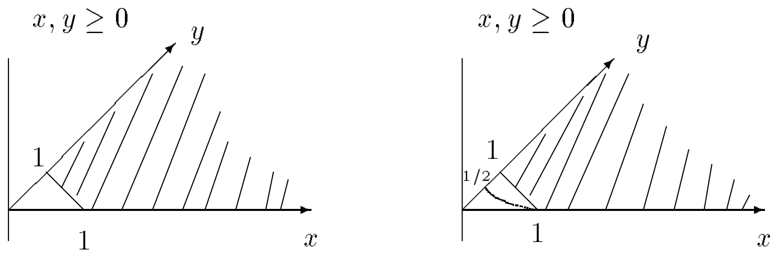
**q.e.d.**

■ $\boxed{\textbf{Ü 2.5}}$

> Seien $a, b, c$ – positive reelle Zahlen.
> Dann gilt:
>
> $$a \leq b + c \implies a \leq \frac{b^2}{a} + 2c$$

Lösung: $1 \leq \frac{b}{a} + \frac{c}{a} \implies 1 \leq \left(\frac{b}{a}\right)^2 + 2\left(\frac{c}{a}\right)$

$1 \leq x + y \implies 1 \leq x^2 + 2y$




■ **Satz 2.12:** $(c(\cdot,\cdot) : M_c \times M_c \to \mathbb{R}^1$ – nicht stetig, $\overline{M_c}^{\|\cdot\|_M} = M)$

> Vor.: 1) Es seien die Standardvoraussetzungen ($* =$ Änd.)
>
> $(2.3)^*_{1)}$ $f \in X^*,\ g \in M_c^*$
>
> $(2.3)_{2)}$ $a(\cdot,\cdot),\ b(\cdot,\cdot)$ – stetig: $\alpha_2, \beta_2$
>
> $(2.3)_{3)}$ LBB–Bedingung: $\beta_1$
>
> $(2.3)^*_{4)}$ $a$ sei auf $X$ elliptisch, d.h. $a(v,v) \geq \bar{\alpha}_1 \|v\|_X^2 \quad \forall\, v \in X$
>
> 2) $M_c$ und $c(\cdot,\cdot) : M_c \times M_c \to \mathbb{R}^1$ erfülle die Voraussetzungen (2.33).
>
> Bh.: Dann wird durch (2.37) – (2.38) ein Isomorphismus $L : X \times M_c \longmapsto X^* \times M_c^*$ erklärt ($\exists\,!$), und $L^{-1}$ ist für $t \in [0,1]$ gleichmäßig beschränkt.

**Beweis:**

- Wenden wieder Satz 1.2 von Babuška und Aziz auf das Problem (2.35) $\equiv$ (2.37) – (2.38) an:

  Satz 1.2:

  $L : U = X \times M_c \longrightarrow V^* = U^*$ Isomorphismus $\overset{\Longleftarrow}{\text{gdw.}}$ 1) $A(\cdot,\cdot)$ stetig
  2) inf-sup: $\beta$
  $\|L^{-1}\| \leq 1/\beta$

- zu 1) $A(\cdot,\cdot)$ – stetig: $|A(u,\lambda; v,\mu)| \leq \mu_2 \,|||(u,\lambda)|||\, |||(v,\mu)|||$ o.k.

zu 2) inf-sup folgt wegen $(2.3)^*_{4)}$ sofort aus Lemma 2.10, da

$$\frac{a(u,u)}{\|u\|_X} + \underbrace{\sup_{\mu \in M_c} \frac{b(u,\mu)}{\|\mu\|_M + t\,|\mu|_c}}_{\geq 0} \geq \frac{a(u,u)}{\|u\|_X} \underset{(2.3)^*_{4)}}{\geq} \frac{\bar{\alpha}_1\,\|u\|_X^2}{\|u\|_X} = \bar{\alpha}_1\,\|u\|_X$$

$\forall\, u \in X$, d.h. $\alpha = \bar{\alpha}_1$. **q.e.d.**

## 2.4 Auflösung gemischter FE-Gleichungen

- **Gemischte FE-Schemata führen auf GS der Art (2.14):**

(2.44)

$$\boxed{\begin{array}{l}\text{Ges. } \underline{u}_h = \left[u^{(i)}\right]_{i\in\omega_{X_h}} \in I\!R^{n_h},\ \underline{\lambda}_h = \left[\lambda^{(i)}\right]_{i\in\omega_{M_h}} \in I\!R^{m_h}: \\ \begin{bmatrix} A_h & B_h^T \\ B_h & \mathbf{O} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{u}_h \\ \underline{\lambda}_h \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{f}_h \\ \underline{g}_h \end{bmatrix}\end{array}}$$

mit
$$\begin{aligned} (A_h\,\underline{u}_h, \underline{v}_h) &= a(u_h, v_h) \quad \forall\ \underline{u}_h, \underline{v}_h \longleftrightarrow u_h, v_h \in X_h, \\ (B_h\,\underline{u}_h, \underline{\lambda}_h) &= b(u_h, \lambda_h) \quad \forall\ \underline{u}_h \leftrightarrow u_h \in X_h, \quad \forall\ \underline{\lambda}_h \leftrightarrow \lambda_h \in M_h, \end{aligned}$$

bzw. für gemischte Variationsprobleme mit Störterm erhalten wir:

(2.45)

$$\boxed{\begin{array}{l}\text{Ges. } \underline{u}_h \in I\!R^{n_h},\ \underline{\lambda}_h \in I\!R^{m_h}: \\ \begin{bmatrix} A_h & B_h^T \\ B_h & -t^2\,C_h \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{u}_h \\ \underline{\lambda}_h \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{f}_h \\ \underline{g}_h \end{bmatrix}\end{array}}$$

mit $(C_h\,\underline{\lambda}_h, \underline{\mu}_h) = c(\lambda_h, \mu_h) \quad \forall\ \underline{\lambda}_h, \underline{\mu}_h \longleftrightarrow \lambda_h, \mu_h \in M_h$.

- **Falls $A_h = A_h^T$ p.d. ($\Leftarrow a(\cdot,\cdot)$ auf $\overset{X}{X_h}$ symmetrisch und elliptisch !), und ker $B_h \neq I\!R^{n_h}$ ($\Leftarrow$ diskrete LBB), dann sind die GS (2.44) und (2.45) regulär und**

$$\boxed{\text{symmetrisch, aber indefinit}}\ ,$$

da $C_h = C_h^T \geq 0$ ($\Leftarrow c(\cdot,\cdot)$ auf $M_h \subset M_c$ symmetrisch und nichtnegativ !).

- **Btr. deshalb das GS (Index $h$ wird weggelassen !)**

(2.46)

| Ges. $\underline{u} \in \mathbb{R}^n,\ \underline{\lambda} \in \mathbb{R}^m$ : | Schur–Komplement–Formulierung |
|---|---|
| $\begin{bmatrix} A & B^T \\ B & -C \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{u} \\ \underline{\lambda} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{f} \\ \underline{g} \end{bmatrix}$ | $(BA^{-1}B^T + C)\,\lambda = BA^{-1}f - g$<br>$u = A^{-1}\,(f - B^T\lambda)$ |

unter den Voraussetzungen

$$
(2.47)\qquad \begin{cases} A = A^T \text{ p.d.,} & \text{d.h. s.p.d., rang } \overset{B-(m,n)-\text{Matrix}}{B} = \underbrace{\min\{m,n\}}_{=m\leq n} - \text{Vollrang,} \\ C = C^T \geq 0, & \text{d.h. symmetrisch und nichtnegativ, z.B. } \underline{\underline{C = \mathbf{O}}} \\ & (C := t^2 C_h). \end{cases}
$$

- $\boxed{\textbf{Ü 2.6}}$

> <u>Man zeige:</u>
>
> a) Unter den Vor. (2.47) ist die Systemmatrix $\begin{bmatrix} A & B^T \\ B & -C \end{bmatrix}$ des GS (2.46) symmetrisch, aber <u>indefinit</u> !
>
> b) $BA^{-1}B^T = [\quad]_{m\times m}$ ist unter den Voraussetzungen (2.47) spd !
>
> c) Unter den Vor. $A$ und $C$ s.p.d. ist die Matrix $\begin{bmatrix} A & B^T \\ -B & C \end{bmatrix}$ positiv definit !

<u>Lösung:</u> a)

$$
\left(\begin{bmatrix} A & B^T \\ B & -C \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \underline{u} \\ \underline{\lambda} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \underline{u} \\ \underline{\lambda} \end{bmatrix}\right) = \left(\begin{pmatrix} A\underline{u} + B^T\underline{\lambda} \\ B\underline{u} - C\underline{\lambda} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \underline{u} \\ \underline{\lambda} \end{pmatrix}\right) =
$$

$$
= (A\underline{u},\underline{u}) + (B^T\underline{\lambda},\underline{u}) + (B\underline{u},\underline{\lambda}) - (C\underline{\lambda},\underline{\lambda}) =
$$

$$
= \begin{cases} (A\underline{u},\underline{u}) > 0 \text{ für } \underline{\lambda} = 0 \text{ und } \underline{u} \neq 0, \\ (A\underline{u},\underline{u}) - [2\,\alpha\,(B\underline{u}, B\underline{u}) + \alpha^2\,(CB\underline{u}, B\underline{u})] < 0 \end{cases}
$$

für $\lambda = -\alpha B u \neq 0$ und $\alpha$ hinreichend groß !

b) trivial

c)

$$
\left(\begin{bmatrix} A & B^T \\ -B & C \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \underline{u} \\ \underline{\lambda} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \underline{u} \\ \underline{\lambda} \end{bmatrix}\right) = (A\underline{u},\underline{u}) + (C\underline{\lambda},\underline{\lambda}) = \left\|\begin{pmatrix} \underline{u} \\ \underline{\lambda} \end{pmatrix}\right\|^2_{\begin{bmatrix} A & O \\ O & C \end{bmatrix}} > 0
$$

für $\begin{pmatrix} \underline{u} \\ \underline{\lambda} \end{pmatrix} \neq \mathbf{O}$.

### 2.4.1 Der Uzawa–Algorithmus und seine Varianten

■ **Der klassische Uzawa–Algorithmus zur Lösung von (2.46):**

(2.48)

- Sei $\underline{\lambda}_0 \in I\!R^m$ geg.
- Iteration: $k = 0, 1, \ldots$

$$\begin{aligned} A\underline{u}_{k+1} &= \underline{f} - B^T \underline{\lambda}_k, \\ \underline{\lambda}_{k+1} &= \underline{\lambda}_k + \tau\,(Bu_{k+1} - C\lambda_k - g) \end{aligned}$$

! GS lösen !
(Druckiteration)

wobei $\tau > 0$ – geeignet gewählter Relaxationsparameter !

■ **Zur Analysis unter den Voraussetzungen (2.47):**

$$\begin{aligned} (2.48) \iff\ & \underline{\lambda}_{k+1} = \underline{\lambda}_k - \tau\,(BA^{-1}B^T + C)\,\underline{\lambda}_k + \tau\,(BA^{-1}\underline{f} - \underline{g}) \\ \iff\ & \frac{\underline{\lambda}_{k+1} - \underline{\lambda}_k}{\tau} + (BA^{-1}B^T + C)\,\underline{\lambda}_k = BA^{-1}\underline{f} - \underline{g} \\ \iff\ & \text{Richardson–Verfahren für } (BA^{-1}B^T + C)\,\underline{\lambda} = BA^{-1}\underline{f} - \underline{g} \end{aligned}$$

Schur–Komplement

■ **Der vorkonditionierte Uzawa–Algorithmus:**

Sei $D = D^T$ p.d.–Präkonditionierer für $BA^{-1}B^T + C$, d.h.

(2.49) $$\underline{\gamma}_2 D \le BA^{-1}B^T + C \le \bar{\gamma}_2\, D,$$

dann ergibt sich aus dem vorkonditionierten Richardson–Verfahren

(2.50) $$D\,\frac{\underline{\lambda}_{k+1} - \underline{\lambda}_k}{\tau} + (BA^{-1}B^T + C)\,\underline{\lambda}_k = BA^{-1}\underline{f} - \underline{g}$$

sofort der vorkonditionierte Uzawa–Algorithmus:

(2.51)

- Sei $\lambda_0 \in I\!R^m$ geg.
- Iteration: $k = 0, 1, 2, \ldots$

$$\begin{aligned} Au_{k+1} &= \underline{f} - B^T \underline{\lambda}_k && \longleftarrow \text{GS lösen !} \\ d_{k+1} &= Bu_{k+1} - C\lambda_k - g \\ D\mu_{n+1} &= d_{k+1} \\ \lambda_{k+1} &= \lambda_k + \tau\mu_{k+1} \end{aligned}$$

■ **Satz 2.13:**

Vor.: Es seien die Voraussetzungen (2.47) und die Spektraläquivalenzungleichungen (2.49) erfüllt.

Bh.: Dann konvergiert der Uzawa–Algorithmus (2.51) bzw. (2.48) = $(2.51)_{D=I}$ für einen bel., fix. Relaxationsparameter $\tau \in (0, 2/\bar{\gamma}_2)$, und es gelten die Fehlerabschätzungen

$$(2.52) \qquad \|\underline{\lambda} - \underline{\lambda}_k\|_* \leq q^k \, \|\underline{\lambda} - \underline{\lambda}_0\|_*,$$

wobei $* = D,\ BA^{-1}B^T + C,\ (BA^{-1}B^T + C)\, D^{-1}\, (BA^{-1}B^T + C)$;
$0 \leq q_{\text{opt}} = q\,(\tau_{\text{opt}}) \leq q \equiv q\,(\tau) = \max\{|1 - \tau\underline{\gamma}_2|,\ |1 - \tau\bar{\gamma}_2|\} < 1$,
$\tau_{\text{opt}} = 2/(\underline{\gamma}_2 + \bar{\gamma}_2)$, $q_{\text{opt}} = \frac{1-\xi}{1+\xi}$, $\xi = \underline{\gamma}_2/\bar{\gamma}_2$, $\|\cdot\|_M := (M\cdot, \cdot)^{0.5}$.

**Beweis:** siehe [22] Numerik II, Pkt. 7.2 !

■ **Lemma 2.14:**

Vor.: Es seien die Voraussetzungen von Satz 2.13 erfüllt: (2.47), (2.49).

Bh.: Zusätzlich zur Fehlerabschätzung (2.52) gilt auch die Abschätzung:

$$(2.53) \qquad \|\underline{u} - \underline{u}_{k+1}\|_A \leq q^k \, \|\underline{\lambda} - \underline{\lambda}_0\|_{BA^{-1}B^T+C}.$$

Falls $C = 0$, dann gilt auch die Abschätzung

$$\|\underline{u} - \underline{u}_{k+1}\|_A \leq q^k \, \|\underline{u} - \underline{u}_1\|_A.$$

Beweis:

- $$\begin{array}{lcl} A\underline{u} & = & \underline{f} - B^T\underline{\lambda} \\ A\underline{u}_{k+1} & = & \underline{f} - B^T\underline{\lambda}_k \\ \hline \end{array}$$
  $$A\,(\underline{u} - \underline{u}_{k+1}) = -B^T\,(\underline{\lambda} - \underline{\lambda}_k) = B^T\,(\underline{\lambda}_k - \underline{\lambda})$$

$$\bullet \Longrightarrow \underline{\underline{\|\underline{u}-\underline{u}_{k+1}\|_A}} = \sup_{\underline{v}\in\mathbb{R}^n} \frac{(A\,(\underline{u}-\underline{u}_{k+1}),\underline{v})}{\|\underline{v}\|_A} = \sup_{\underline{v}\in\mathbb{R}^n} \frac{(B^T\,(\underline{\lambda}_k-\underline{\lambda}),\underline{v})}{\|\underline{v}\|_A}$$

$$\underset{\underline{v}=A^{-0.5}\underline{w}}{\downarrow}{=} \sup_{\underline{w}\in\mathbb{R}^n} \frac{(A^{-0.5}B^T\,(\underline{\lambda}_k-\underline{\lambda}),\underline{w})}{\|\underline{w}\|} =$$

$$= \|A^{-0.5}B^T\,(\underline{\lambda}_k-\underline{\lambda})\| = (BA^{-1}B^T\,(\underline{\lambda}_k-\underline{\lambda}),\underline{\lambda}_k-\underline{\lambda})^{0.5} =$$

$$= \underline{\underline{\|\underline{\lambda}-\underline{\lambda}_k\|_{BA^{-1}B^T}}} \underset{C=C^T\geq 0}{\overset{\uparrow}{\leq}} \|\underline{\lambda}-\underline{\lambda}_k\|_{BA^{-1}B^T+C} \leq$$

$$\leq q^k\,\|\underline{\lambda}-\underline{\lambda}_0\|_{BA^{-1}B^T+C} \underset{C=\mathbf{O}}{\overset{\uparrow}{=}} q^k\,\|\underline{u}-\underline{u}_1\|_A$$

**q.e.d.**

■ $\boxed{\textbf{Ü 2.7}}$

Oben wurde gezeigt, daß der vorkonditionierte Uzawa–Algorithmus nichts anderes ist als das vorkonditionierte Richardson–Verfahren angewandt auf $(2.46)_s$ $(BA^{-1}B^T+C)\,\underline{\lambda} = BA^{-1}\underline{f}-\underline{g}$. Anstelle des Richardson–Verfahrens kann man natürlich auch das Tschebyschev–Verfahren, das Gradienten–Verfahren bzw. das CG–Verfahren mit dem Präkonditionierer $D$ auf $(2.46)_s$ anwenden.
Schreiben Sie den vorkonditionierten

- Uzawa–Tschebyschev–Algorithmus,
- Uzawa–Gradienten–Algorithmus und
- Uzawa–CG–Algorithmus

auf, und geben Sie analog zu (2.52) die Ihnen bekannten Fehlerabschätzungen an !

■ $\boxed{\textbf{Ü 2.8}}$

Man zeige, daß der vorkonditionierte Uzawa–Algorithmus (2.51) äquivalent ist zum klassischen Uzawa–Algorithmus angewandt auf das transformierte System

$$\left\{\begin{array}{l} A\underline{u} + B^T D^{-0.5}\underline{\mu} = \underline{f} \\ D^{-0.5}B\underline{u} - D^{-0.5}CD^{-0.5}\underline{\mu} = D^{-0.5}\underline{g} \end{array}\right.$$

- **Nachteil von Uzawa–Techniken:**

  $\Longrightarrow$ GS $\boxed{A\underline{u}_{k+1} = f - B^T\underline{\lambda}_k}$ muß möglichst genau (Diskretisierungsfehler !) in jedem Iterationsschritt gelöst werden, da in Matrix $*$ Vektor–Routine: vgl. (2.50) !

### 2.4.2 Der Arrow-Hurwicz–Algorithmus

- **Der vorkonditionierte Arrow-Hurwicz–Algorithmus zur Lösung von (2.46):**

(2.54)
$$\boxed{\begin{array}{l} \bullet\ \text{Sei } \underline{u}_0 \in I\!R^n,\ \underline{\lambda}_0 \in I\!R^m : \\ \bullet\ \underline{\text{Iteration:}}\ k = 0, 1, \ldots \\ \quad G\,\dfrac{\underline{u}_{k+1} - \underline{u}_k}{\omega} + A\underline{u}_k + B^T\underline{\lambda}_k = \underline{f} \\ \quad -D\,\dfrac{\underline{\lambda}_{k+1} - \underline{\lambda}_k}{\tau} + B\underline{u}_{k+1} - C\underline{\lambda}_k = \underline{g} \end{array}}$$

wobei die Präkonditionierer $D = D^T$ p.d. und $G = G^T$ p.d. folgende Spektraläquivalenzungleichungen erfüllen:

(2.55)
$$\left\{\begin{array}{lcl} \underline{\gamma}_1 G & \le & A \le \bar{\gamma}_1 G, \qquad\qquad \underline{\gamma}_1 I \le G^{-0.5}AG^{-0.5} \le \bar{\gamma}_1 I \\ \underline{\gamma}_2 D & \le & BG^{-1}B^T + C \le \bar{\gamma}_2 D. \end{array}\right.$$

- **Mit den Substitutionen**

(2.56)
$$\underline{\lambda}_k = D^{-0.5}\underline{\mu}_k \text{ und } \underline{u}_k = G^{-0.5}\underline{v}_k$$

wird (2.54) äquivalent zum klassischen Arrow-Hurwicz für transformiertes System:

(2.57)
$$\left\{\begin{array}{lc} \dfrac{\underline{v}_{k+1} - \underline{v}_k}{\omega} & + \\ -\dfrac{\underline{\mu}_{k+1} - \underline{\mu}_k}{\tau} & + \end{array}\right. \boxed{\begin{array}{lclcl} G^{-0.5}AG^{-0.5}\underline{v}_k & + & G^{-0.5}B^TD^{-0.5}\underline{\mu}_k & = & G^{-0.5}\underline{f}, \\ D^{-0.5}BG^{-0.5}\underline{v}_{k+1} & - & D^{-0.5}CD^{-0.5}\underline{\mu}_k & = & D^{-0.5}\underline{g}. \end{array}}$$

- **Konvergenzratenabschätzungen und Bestimmung optimaler Relaxationsparameter** $\omega = \omega(\gamma_1, \gamma_2)$ und $\tau = \tau(\gamma_1, \gamma_2)$ für $C = \mathbf{O}$ findet man in Queck W.: SIAM J. Num. Analy., v. 26, Nr. 4, 1985, S. 1016 – 1030.

### 2.4.3 Die Bramble-Pasciak–Transformation

- **Btr. <u>skalierten Präkonditionierer</u> $A_0 = A_0^T$ p.d. für $A$:**

(2.58) $$\underline{\gamma}_0 A_0 \le A \le \bar{\gamma}_0 A_0 \text{ mit } \underline{\gamma}_0 > 1,$$

d.h. insbesondere ist $A - A_0$ spd, da wegen (2.58)

(2.59) $$0 < \left(1 - \frac{1}{\underline{\gamma}_0}\right) A \le A - A_0 \le \left(1 - \frac{1}{\bar{\gamma}_0}\right) A,$$

z.B. liefert $A_0 = \gamma G$ mit (2.55)

$$\underbrace{\underline{\gamma}_1 \frac{1}{\gamma}}_{\underline{\gamma}_0} \underbrace{\gamma G}_{A_0} \quad \le \quad A \quad \le \quad \underbrace{\bar{\gamma}_1 \frac{1}{\gamma}}_{\bar{\gamma}_0} \underbrace{\gamma G}_{A_0}$$

$$\underline{\gamma}_0 = \underline{\gamma}_1 \cdot \frac{1}{\gamma} \quad = \quad 1 + \delta \quad \Rightarrow \quad \boxed{\gamma = \underline{\gamma}_1/(1+\delta)} \text{ zu fix. } \delta > 0.$$

- **<u>Dann sind die folgenden GS offenbar äquivalent:</u>**

(2.46) $$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} A & B^T \\ B & -C \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{u} \\ \underline{\lambda} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{f} \\ \underline{g} \end{bmatrix} \quad \begin{array}{l} Z_1 \\ Z_2 \end{array}$$

$$\Updownarrow \longleftarrow \left. \begin{array}{l} A_0^{-1} Z_1 \\ B A_0^{-1} Z_1 - Z_2 \end{array} \right\} \underline{\underline{\text{Bramble-Pasciak–Transformation}}}$$

(2.60) $$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} A_0^{-1} A & A_0^{-1} B^T \\ B A_0^{-1} A - B & B A_0^{-1} B^T + C \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{u} \\ \underline{\lambda} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_0^{-1} \underline{f} \\ B A_0^{-1} \underline{f} - \underline{g} \end{bmatrix} \quad \begin{array}{l} Z_1 \\ Z_2 \end{array}$$

$$B A_0^{-1} (A - A_0)$$

$$\Updownarrow \longleftarrow (A - A_0) Z_1 \quad \text{(Symmetrisieren)} \quad (A - A_0) A_0^{-1} A = A A_0^{-1} A - A$$

(2.61) $$\mathbf{S} = \begin{bmatrix} A A_0^{-1} A - A & (A - A_0) A_0^{-1} B^T \\ B A_0^{-1} (A - A_0) & B A_0^{-1} B^T + C \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{u} \\ \underline{\lambda} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (A - A_0) A_0^{-1} \underline{f} \\ B A_0^{-1} \underline{f} - \underline{g} \end{bmatrix}$$

spd

- **Führen im Faktorraum $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$ das neue Skalarprodukt**

(2.62) $$\left[ \begin{pmatrix} \underline{u} \\ \underline{\lambda} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \underline{v} \\ \underline{\mu} \end{pmatrix} \right] := ((A - A_0)\, \underline{u}, \underline{v}) + (\underline{\lambda}, \underline{\mu}) \text{ ein.}$$

Dann gilt der folgende Satz von Bramble und Pasciak (1988):

**Satz 2.15:**

Vor.: 1) Es gelten die Voraussetzungen (2.47),

2) Spektraläquivalenzungleichung (2.58): $\underline{\gamma}_0 A_0 \le A \le \bar{\gamma}_0 A_0$, $\underline{\gamma}_0 > 1$.

Bh.: 1. $\mathbf{T} = \mathbf{T}^*$ p.d. bzgl. $[\cdot,\cdot]$, d.h.

- $[\mathbf{T}\,\underline{X}, \underline{Y}] = [\underline{X}, \mathbf{T}\,\underline{Y}] \quad \forall\, \underline{X} = \binom{u}{\underline{\lambda}},\ \underline{Y} = \binom{v}{\underline{\mu}} \in I\!R^n \times I\!R^m$,
- $[\mathbf{T}\,\underline{X}, \underline{X}] > 0 \quad \forall\, \underline{X} \in I\!R^n \times I\!R^m : \underline{X} \neq \mathbf{O}$.

2. Es gelten die Spektraläquivalenzungleichungen

(2.63) $\underline{\gamma}\,[\tilde{\mathbf{T}}\,\underline{X}, \underline{X}] \le [\mathbf{T}\,\underline{X}, \underline{X}] \le \bar{\gamma}\,[\tilde{\mathbf{T}}\,\underline{X}, \underline{X}] \quad \forall\, \underline{X} \in I\!R^n \times I\!R^m$,

$$\Updownarrow$$

(2.64) $\underline{\gamma}\,(\tilde{\mathbf{S}}\,\underline{X}, \underline{X}) \le (\mathbf{S}\,\underline{X}, \underline{X}) \le \bar{\gamma}\,(\tilde{\mathbf{S}}\,\underline{X}, \underline{X}) \quad \forall\, \underline{X} \in I\!R^n \times I\!R^m$,

mit den Präkonditionierern (Regularisatoren)

$$\tilde{\mathbf{T}} = \begin{bmatrix} I & \mathbf{O} \\ \mathbf{O} & BA^{-1}B^T + C \end{bmatrix} \text{ und } \tilde{\mathbf{S}} = \begin{bmatrix} A - A_0 & \mathbf{O} \\ \mathbf{O} & BA^{-1}B + C \end{bmatrix}$$

und den Spektraläquivalenzkonstanten

$$\underline{\gamma} = \frac{1-\sqrt{\alpha}}{1-\alpha},\ \ \bar{\gamma} = \frac{1+\sqrt{\alpha}}{1-\alpha} \text{ mit } \alpha = 1 - \frac{1}{\bar{\gamma}_0}.$$

**Beweis:** Der Satz wurde erstmals von J.H. Bramble und J. Pasciak in [6] mit der nicht optimalen unteren Schranke $\underline{\gamma} = \left(1 + \frac{\alpha}{2} + \sqrt{\alpha + \frac{\alpha^2}{4}}\right)^{-1}$ gezeigt (siehe auch Seminarbericht [24]).
W. Zulehner zeigt in [31] für den Fall $C = 0$ die scharfe untere Schranke $\underline{\gamma} = \frac{1-\sqrt{\alpha}}{1+\alpha}$, die aber auch für $C = C^T \ge 0$ gilt.

■ **Es sei**

(2.65) $$\bar{\mathbf{S}} = \begin{bmatrix} A - A_0 & \mathbf{O} \\ \mathbf{O} & D \end{bmatrix}$$

mit $D = D^T$ p.d.:

(2.66) $$\underline{\gamma}_3\, D \le BA^{-1}B^T + C \le \bar{\gamma}_3\, D.$$

Dann gilt wegen (2.64) offenbar

$$\underline{\delta}\,\bar{\mathbf{S}} \;\le\; \mathbf{S} \;\le\; \bar{\delta}\,\bar{\mathbf{S}} \tag{2.67}$$

mit $\underline{\delta} = \min\{1, \underline{\gamma}_3\}\,\underline{\gamma}$ und $\bar{\delta} = \max\{1, \bar{\gamma}_3\}\,\bar{\gamma}$, d.h. $\bar{\mathbf{S}}$ ist ein guter Präkonditionierer für $\mathbf{S}$, falls $A_0$ bzw. $D$ gute Präkonditionierer für $A$ (skaliert !) und für das Schur–Komplement $BA^{-1}B^T + C$ sind !

■ $\boxed{\textbf{Ü 2.9}}$

Man schreibe das vorkonditionierte Richardson–Verfahren

$$\bar{\mathbf{S}}\,\frac{\underline{X}_{k+1} - \underline{X}_k}{\tau} + \mathbf{S}\,\underline{X}_k = F \equiv \begin{bmatrix} (A - A_0)\,A_0^{-1}\underline{f} \\ BA_0^{-1}\underline{f} - \underline{g} \end{bmatrix}$$

zur Lösung des GS (2.61) ausführlich (für $\underline{u}_k$ und $\underline{\lambda}_k$) auf ! Welche Konvergenzaussagen und Fehlerabschätzungen sind Ihnen bekannt ? In welcher Beziehung steht das Richardson–Verfahren ($A_0 = \gamma G$) zum Arrow-Hurwicz–Algorithmus (2.54) ?

$\boxed{\textbf{Ü 2.10}}$

Schreiben Sie das mit $\bar{\mathbf{S}}$ präkonditionierte CG–Verfahren zur Lösung des GS (2.61) $\mathbf{S}\,\underline{X} = \underline{F}$ ausführlich (d.h. für Komponenten $\underline{u}_k$ und $\underline{\lambda}_k$) auf, und geben Sie Fehlerabschätzungen an !

$\longrightarrow$ Bramble-Pasciak–CG !

■ **Bemerkung:**

Einen Überblick über iterative Methoden zur Lösung von symmetrischen und indefiniten Gleichungssystemen der Art (2.44), (2.45) bzw. (2.46) findet der interessierte Leser im Seminarreport [24]. Der an der Konvergenzanalysis dieser Verfahren interessierte Leser sei auf die Originalarbeiten für spezielle Verfahren und auf die Originalarbeit von W. Zulehner [31], die eine zusammenfassende Analysis gibt, verwiesen.

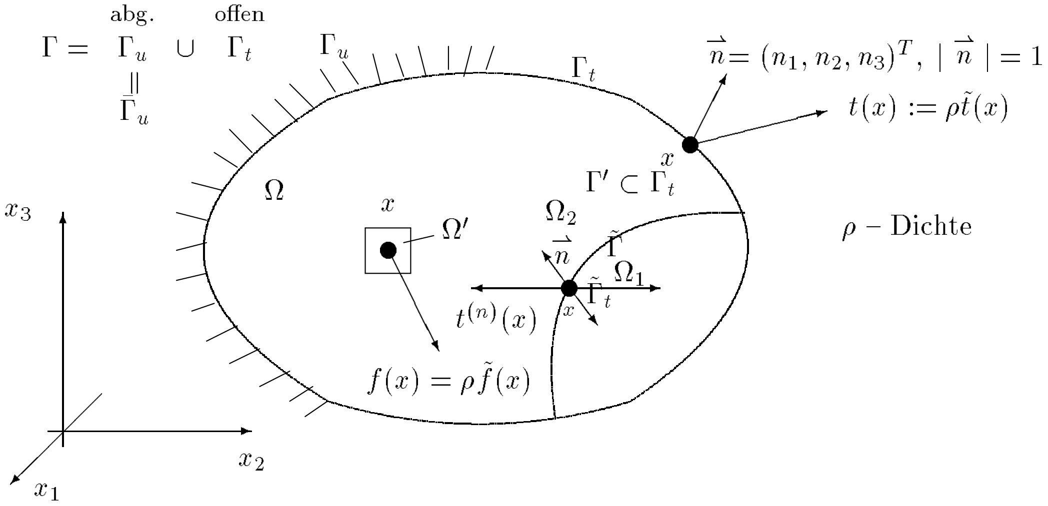
# Kapitel 3

# Modellierung, Analysis und Numerik linearer Elastizitätsprobleme

## 3.1 Grundgleichungen der linearen Elastizitätstheorie

### 3.1.1 Spannungszustand (Kinetik)

- **Btr. belasteten Körper** ($\widehat{=}$ † Gebiet) $\Omega \subset I\!\!R^3$ mit hinreichend glattem Rand $\Gamma = \partial\Omega$ im Gleichgewicht (in der linearen Theorie identifiziert man den undeformierten mit dem deformierten Körper als Referenzkörper):

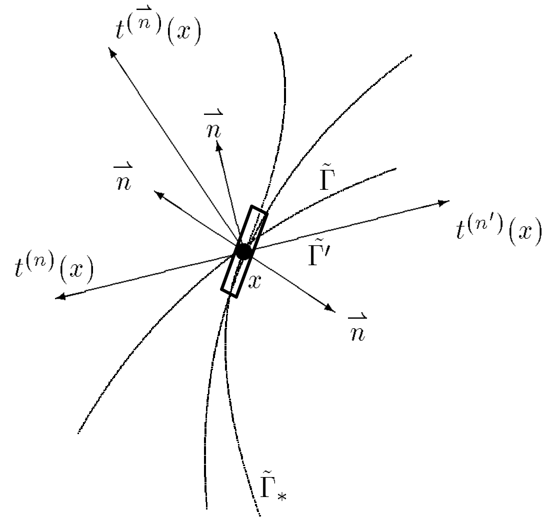


$$f(x) = \lim_{\substack{|\Omega'| \to 0 \\ x \in \Omega' \subset \Omega}} \frac{f_{\Omega'}}{|\Omega'|} = \begin{bmatrix} f_1(x) \\ f_2(x) \\ f_3(x) \end{bmatrix}, \quad x \in \Omega - \text{Volumenkraft(dichte)}$$

$$t(x) = \lim_{\substack{|\Gamma'| \to 0 \\ x \in \Gamma' \subset \Gamma_t}} \frac{t_{\Gamma'}}{|\Gamma'|} = \begin{bmatrix} t_1(x) \\ t_2(x) \\ t_3(x) \end{bmatrix}, \quad x \in \Gamma_t - \text{Oberflächenkraft(dichte)}$$

## ■ Spannungszustand in einem Pkt. $x \in \overline{\Omega}$ und der Spannungstensor:

- Totale Spannung $t^{(n)}(x)$ im Pkt. $x$ mit der Normalen $\vec{n}$:




a c t i o = r e a c t i o
im Gleichgewicht

$$t^{(n)}(x) = t^{(n)}_{\tilde{\Gamma}}(x) := \lim_{\substack{|\tilde{\Gamma}| \to 0 \\ x \in \tilde{\Gamma}' \subset \tilde{\Gamma}}} \frac{t^{(n)}_{\tilde{\Gamma}'}}{|\tilde{\Gamma}'|} =$$

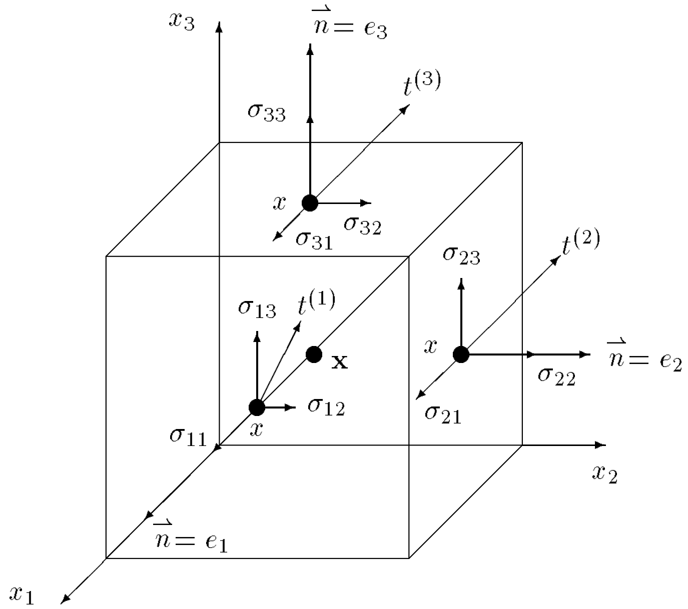
$$= t^{(n)}_{\tilde{\Gamma}_*}(x) := \lim_{\substack{|\tilde{\Gamma}'_*| \to 0 \\ x \in \tilde{\Gamma}'_* \subset \tilde{\Gamma}_*}} \frac{t^{(n)}_{\tilde{\Gamma}'_*}}{|\tilde{\Gamma}'_*|}$$

$\uparrow$
„unabhängig von $\tilde{\Gamma}$, aber abhängig von der Normalen $\vec{n}$ im Pkt. $x$“

- Spannungszustand im Pkt. $x \in \bar{\Omega}$:

(3.1) $$\left\{ t^{(n)}(x) = \left(t_1^{(n)}, t_2^{(n)}, t_3^{(n)}\right)^T : n \in \mathcal{N} := \left\{ \vec{n} = (n_1, n_2, n_3)^T \in I\!R^3 : \| \vec{n} \| = 1 \right\} \right\}.$$

- Totale Spannungen für $n \equiv \vec{n} = e_1, e_2, e_3$:




$$
\begin{aligned}
t^{(1)}(x) &\equiv t^{(e_1)}(x) = [\sigma_{11}(x), \sigma_{12}(x), \sigma_{13}(x)]^T \\
t^{(2)}(x) &\equiv t^{(e_2)}(x) = [\sigma_{21}(x), \sigma_{22}(x), \sigma_{23}(x)]^T \\
t^{(3)}(x) &\equiv t^{(e_3)}(x) = [\sigma_{31}(x), \sigma_{32}(x), \sigma_{33}(x)]^T
\end{aligned}
$$

## ■ Kräfte- und Momentengleichgewicht:

- Spannungstensor:

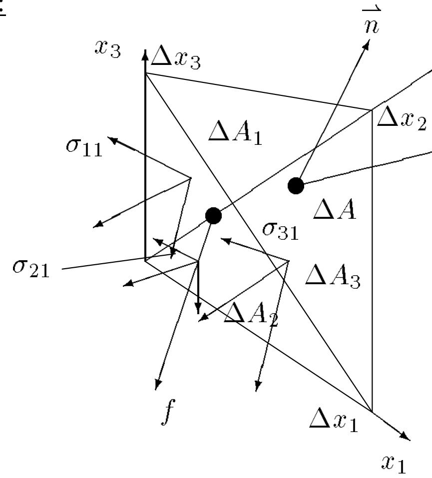
$$
\sigma \equiv \sigma\,(x) = [\sigma_{ij}]_{i,j=\overline{1,3}} = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33} \end{bmatrix} \begin{array}{l} \longleftarrow \quad (t^{(1)})^T \\ \longleftarrow \quad (t^{(2)})^T \\ \longleftarrow \quad (t^{(3)})^T \end{array}
$$

- Es gilt:

$$
t_i^{(n)}(x) = \underbrace{\sigma_{ji}\, n_j}_{\text{Einstein}} \equiv \sum_{j=1}^{3} \sigma_{ji}(x)\, n_j, \quad \vec{n} = \begin{pmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \end{pmatrix} \in \mathcal{N} \tag{3.2}
$$

- $\boxed{\textbf{Ü 3.1}}$ Zeigen Sie (3.2), indem Sie das Kräftegleichgewicht an einem Tetraeder–Element betrachten !

Hinweis:

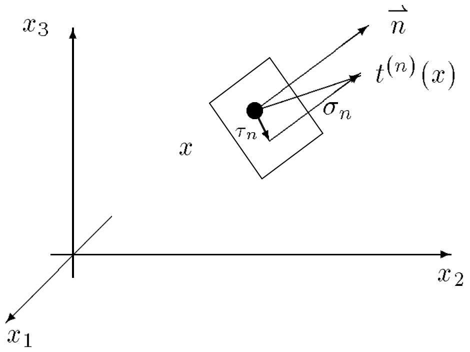



$$t^{(n)} = (t_1^{(n)}, t_2^{(n)}, t_3^{(n)})^T$$

$$-\sigma_{11}\Delta A_1 - \sigma_{21}\Delta A_2 - \sigma_{31}\Delta A_3 + t_1^{(n)}\Delta A$$
$$+\Delta V f_1 = 0$$

Aus $\Delta A_i = \Delta A \cdot n_i$ und $\Delta V/\Delta A \to 0$, folgt
$-\sigma_{11}n_1 - \sigma_{21}n_2 - \sigma_{31}n_3 + t_1^{(n)} = 0$ #

- Normalspannung $\sigma_n$ und Tangential(Schub-)spannung $\tau_n$:

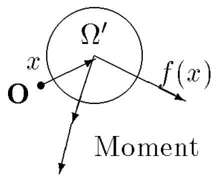


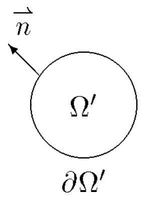

(3.3)
$$\sigma_n = \left(t^{(n)}, \vec{n}\right) = t_i^{(n)} n_i \overset{(3.2)}{\overset{\downarrow}{=}} \sigma_{ji} n_j n_i \equiv \sum_{i,j=1}^{3} \sigma_{ji} n_j n_i$$
$$\tau_n = \left(\|t^{(n)}\|^2 - \sigma_n^2\right)^{0.5} = \left(t_i^{(n)} t_i^{(n)} - \sigma_n^2\right)^{0.5}$$
$$= \left(\sum_{i=1}^{3}\left(\sum_{j=1}^{3} \sigma_{ji} n_j\right)\left(\sum_{k=1}^{3} \sigma_{ki} n_k\right) - \left(\sum_{i,j=1}^{3} \sigma_{ji} n_j n_i\right)^2\right)^{0.5}$$

- Btr. „Körper“ $\Omega$ im Gleichgewicht, d.h. die resultierenden Kräfte und Momente sind Null: $\forall\ \Omega' \subset \Omega : \bar{\Omega}' \subset \Omega$, $\partial\Omega'$ hinreichend glatt, gilt:

(3.4)
$$\int\limits_{\Omega'} f_i(x)\, dx + \int\limits_{\partial\Omega'} \underbrace{t_i^{(n)}(x)}_{\substack{\| \\ \sigma_{ji} n_j}}\ ds = 0, \quad i = 1, 2, 3,$$

$$(3.5) \qquad \int_{\Omega'} \underset{\text{Vektorprodukt}}{x \times f(x)\, dx} \quad + \int_{\partial\Omega'} x \times t^{(n)}(x)\, ds = 0.$$



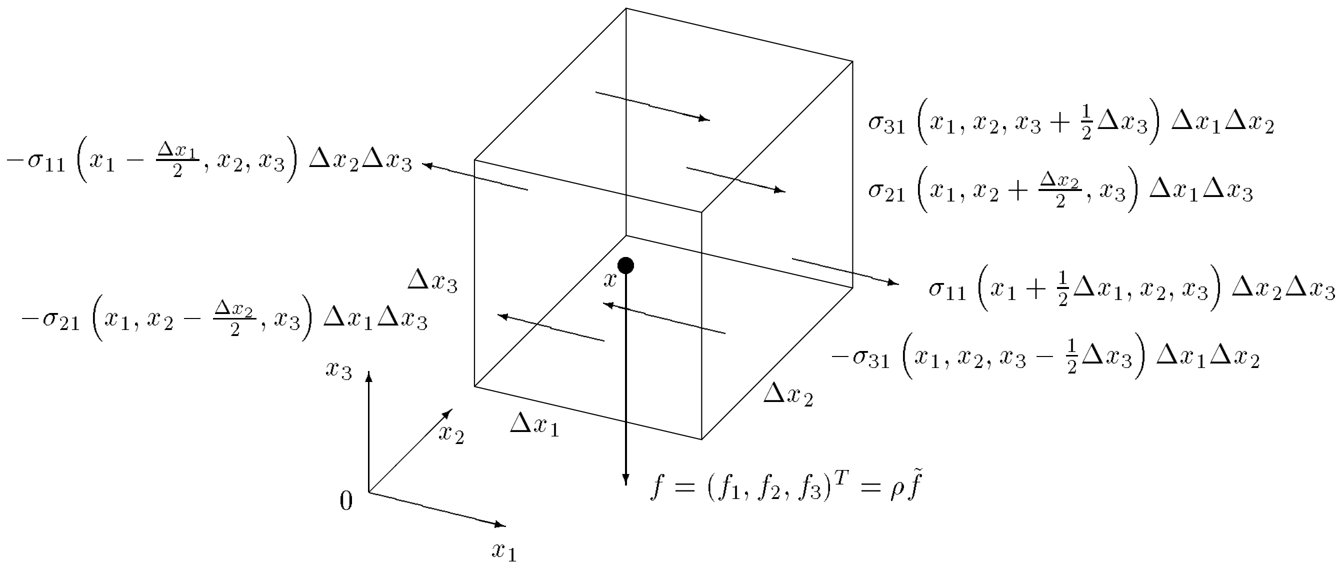

- Aus (3.4) erhält man durch partielle Integration:

$$\int_{\Omega'} f_i(x)\, dx + \underset{\underset{\displaystyle \int_{\partial\Omega'} \sigma_{ji} n_j\, ds}{\|}}{\int_{\Omega'} \frac{\partial}{\partial x_j} \sigma_{ji}\, dx} = 0 \quad \forall\, \Omega' \quad (\uparrow), \text{ d.h.}$$

$$(3.4) \qquad \boxed{\begin{array}{lcl} -\,\sigma_{ji,j}(x) & = & f_i(x), \quad i = \overline{1,3}, \quad \forall\, x \in \Omega \\ -\displaystyle\sum_{j=1}^{3} \frac{\partial \sigma_{ji}(x)}{\partial x_j} & = & f_i(x) \qquad\qquad \text{–"–} \\ \hline -\operatorname{div} \sigma & = & f \ \text{ in } \Omega \end{array}}$$

$=$ Kräftegleichgewicht !

- **Ü 3.2** Schneiden Sie virtuell einen „kleinen" Würfel
„$\Delta x$" $= \left[x_1 - \frac{\Delta x_1}{2}, x_1 + \frac{\Delta x_1}{2}\right] \times \left[x_2 - \frac{\Delta x_2}{2}, x_2 + \frac{\Delta x_2}{2}\right] \times \left[x_3 - \frac{\Delta x_3}{2}, x_3 + \frac{\Delta x_3}{2}\right]$
aus einem im Gleichgewicht befindlichen Körper heraus, und schreiben Sie das Kräftegleichgewicht (z.B. in $x_1$–Richtung) auf !
Hinweis: $\overline{„\Delta x"} \subset \Omega$



Damit ergibt das Kräftegleichgewicht in $x_1$–Richtung:

$$\left[-\sigma_{11}\left(x_1-\tfrac{\Delta x_1}{2},x_2,x_3\right)+\sigma_{11}\left(x_1+\tfrac{\Delta x_1}{2},x_2,x_3\right)\right]\Delta x_2\Delta x_3+$$
$$+\left[-\sigma_{21}\left(x_1,x_2-\tfrac{\Delta x_2}{2},x_3\right)+\sigma_{21}\left(x_1,x_2-\tfrac{\Delta x_2}{2},x_3\right)\right]\Delta x_1\Delta x_3+$$
$$+\left[-\sigma_{31}\left(x_1,x_2,x_3-\tfrac{\Delta x_3}{2}\right)+\sigma_{31}\left(x_1,x_2,x_3-\tfrac{\Delta x_3}{2}\right)\right]\Delta x_1\Delta x_2+$$
$$+f_1\Delta x_1\Delta x_2\Delta x_3=0\quad\Big|\cdot\tfrac{1}{\Delta x_1\Delta x_2\Delta x_3}\,,\quad \Delta x_1,\Delta x_2,\Delta x_3\to 0$$

$$\Longrightarrow\boxed{\frac{\partial\sigma_{11}}{\partial x_1}+\frac{\partial\sigma_{21}}{\partial x_2}+\frac{\partial\sigma_{31}}{\partial x_3}+f_1=0}\qquad(3.4)_1$$

Im dynamischen Fall muß die Trägheitskraft (Masse $*$ Beschleunigung) berücksichtigt werden:

$$(3.4)_t\qquad\boxed{\rho\,\ddot{u}_i-\sigma_{ji,j}=f_i\,(x,t),\quad i=\overline{1,3},\quad x\in\Omega,\quad t\in\mathbf{T}=[0,T]}$$

- Aus dem Momentengleichgewicht (3.5) erhält man ebenfalls durch partielle Integration:

$$\int_{\Omega'} x*\underbrace{[f_i\,(x)+\sigma_{ji,j}]}_{\overset{(3.4)}{=}0}\,dx+\int_{\Omega'}\begin{bmatrix}\sigma_{23}-\sigma_{32}\\ \sigma_{31}-\sigma_{13}\\ \sigma_{12}-\sigma_{21}\end{bmatrix}dx=0\quad\forall\,\Omega'.$$

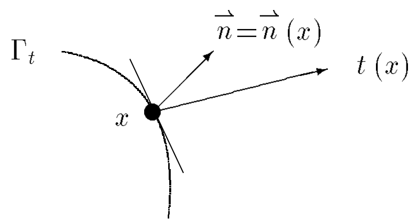
Folglich muß gelten:

$$(3.5)\qquad\boxed{\sigma_{ij}\;=\;\sigma_{ji}\quad\forall\,i,j\;=\;\overline{1,3},}$$

d.h. der Spannungstensor ist symmetrisch !

■ **Kräfterandbedingungen:** Aus (3.2) folgt

$$(3.6)\qquad\boxed{t_i^{(n)}(x)\equiv\sigma_{ji}\,(x)\,n_j\,(x)=t_i\,(x),\quad i=\overline{1,3},\quad\forall\,x\in\Gamma_t}$$



## Hauptspannungen und Invarianten des Spannungstensors:

- Für jeden Spannungszustand $\left\{t^{(n)}(x)\right\}_{n\in\mathcal{N}}$ in einem Pkt. $x \in \bar{\Omega}$ existieren offenbar 3 orthogonale Ebenen mit den Normalen $\vec{n} \equiv \vec{n}\,(x) = n^{(1)}, n^{(2)}, n^{(3)}$:

  (3.7) $$t^{(n)}\,(x) = \sigma_n\,(x)\,\vec{n} \qquad (\Leftrightarrow \tau_n\,(x) = 0\ !).$$

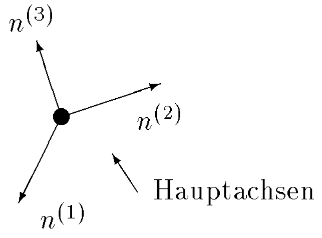
  Tatsächlich, mit (3.2) ist (3.7) äquivalent zum EWP

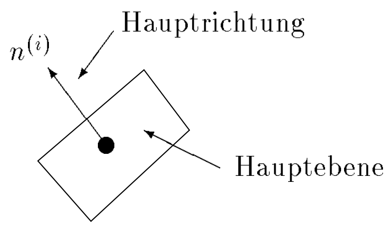
  (3.8) $$\sigma_{ji}\,(x)\,n_j - \lambda\,\delta_{ji}\,n_j \equiv (\sigma_{ji}\,(x) - \lambda\,\delta_{ji})\,n_j = 0.$$

  Da $[\sigma_{ij}]_{i,j=\overline{1,3}}$ wegen (3.5) symmetrisch ist, existieren 3 nichtnotwendig verschiedene, reelle

  Hauptspannungen

  $$\begin{array}{lcccccccl} \text{EW:} & \lambda & = & \sigma_1 & \geq & \sigma_2 & \geq & \sigma_3, & \\ & & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & \\ \text{EV:} & \vec{n} & = & n^{(1)} & & n^{(2)} & & n^{(3)} & : \quad \left(n^{(i)}, n^{(j)}\right) = \delta_{ij}, \end{array}$$




  Offenbar gilt (Rayleigh–Quotient)

  $$\sigma_3 = \min_{\substack{n\in\mathcal{N}\\ \boxed{|n|=1}}} \sigma_{ij}\,n_i\,n_j \leq \sigma_n = \sigma_{ij}\,n_i\,n_j \leq \max_{\substack{n\in\mathcal{N}\\ \boxed{|n|=1}}} \sigma_{ij}\,n_i\,n_j = \sigma_1$$

- Invarianten des Spannungstensors:

  Die Hauptspannungen $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ sind Wurzeln des charakteristischen Polynoms

  (3.9) $$\det\,[\sigma_{ij} - \lambda\,\delta_{ij}] \equiv -\lambda^3 + I_1\,(\sigma)\,\lambda^2 - I_2\,(\sigma)\,\lambda + I_3\,(\sigma) = 0,$$

  wobei die Koeffizienten $(\sigma_{ij} = \sigma_{ji})$

  (3.10) $$\begin{aligned} I_1\,(\sigma) &= \sigma_{ii} \equiv \sigma_{11} + \sigma_{22} + \sigma_{33} = \sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3, \\ I_2\,(\sigma) &= \sigma_{11}\,\sigma_{22} + \sigma_{22}\,\sigma_{33} + \sigma_{33}\,\sigma_{11} - \sigma_{12}^2 - \sigma_{23}^2 - \sigma_{31}^2 \\ &= \sigma_1\,\sigma_2 + \sigma_2\,\sigma_3 + \sigma_3\,\sigma_1, \\ I_3\,(\sigma) &= \det\,[\sigma_{ij}] = \sigma_1\,\sigma_2\,\sigma_3 \end{aligned}$$

des charakteristischen Polynoms invariant gegenüber orthogonalen Transformationen sind. $I_1(\sigma)$, $I_2(\sigma)$ und $I_3(\sigma)$ nennt man 1., 2. und 3. Invarianten des Spannungstensors. Dann ist auch jede homogene, symmetrische Funktion wieder eine Invariante des Spannungstensors, z.B. werden

$$\begin{aligned}
J_1(\sigma) &= I_1(\sigma) \equiv \sigma_{ii} = \sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3, \\
2\,J_2(\sigma) &= I_1^2(\sigma) - 2\,I_2(\sigma) \overset{\sigma_{ij}\sigma_{ij}}{=} \sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2, \\
3\,J_3(\sigma) &= I_1^3(\sigma) - 3\,I_1(\sigma)\,I_2(\sigma) - 3\,I_3(\sigma) = \\
&= \sigma_{ij}\,\sigma_{jk}\,\sigma_{ki} = \sigma_1^3 + \sigma_2^3 + \sigma_3^3.
\end{aligned}$$

die lineare, quadratische und kubische Invarianten des Spannungstensors genannt.

## ■ Kugeltensor und Deviator:

- Die Invariante

(3.11) $$p = \frac{1}{3}\,I_1(\sigma) = \frac{1}{3}\,\sigma_{kk}$$

heißt hydrostatische Spannung (Druck) bzw. Hauptnormalspannung. Offenbar kann jeder Spannungstensor $\sigma = [\sigma_{ij}]$ eindeutig als Summe eines Kugeltensors und eines Deviators dargestellt werden:

(3.12) $$\sigma = \text{Kugeltensor} + \text{Deviator} \equiv \sigma_0 + s,$$

wobei
$$\begin{aligned}
\sigma_0 &= [p\,\delta_{ij}]_{i,j=\overline{1,3}} = p\,[\delta_{ij}]_{i,j=\overline{1,3}}, \\
s &= \sigma - \sigma_0 = \underbrace{[s_{ij}]_{i,j=\overline{1,3}}}_{=s_{ji}} = [\sigma_{ij} - \underbrace{\tfrac{1}{3}\,\sigma_{kk}}_{\equiv p}\,\delta_{ij}]_{i,j=\overline{1,3}}.
\end{aligned}$$

- Für die Invarianten $I_1(s)$, $I_2(s)$ und $I_3(s)$ des Deviators gilt:

(3.13)
$$\begin{aligned}
I_1(s) &= s_{ii} = \sigma_{ii} - \tfrac{1}{3}\,\sigma_{kk}\,\delta_{ii} = 0, \\
I_2(s) &= s_{11}\,s_{22} + s_{22}\,s_{33} + s_{33}\,s_{11} - \sigma_{12}^2 - \sigma_{23}^2 - \sigma_{31}^2 = \ldots = \\
&= -\tfrac{1}{2}\,s_{ij}\,s_{ij} = \left(I_2(s) - \tfrac{1}{2}\,(s_{kk})^2\right) = \\
&= s_1\,s_2 + s_2\,s_3 + s_3\,s_1 = -\tfrac{1}{2}\,(s_1^2 + s_2^2 + s_3^2) = \\
&= -\tfrac{1}{6}\,[(\sigma_{11} - \sigma_{22})^2 + (\sigma_{22} - \sigma_{33})^2 + (\sigma_{33} - \sigma_{11})^2 - \sigma_{12}^2 - \sigma_{23}^2 - \sigma_{31}^2] = \\
&= -\tfrac{1}{6}\,[(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2] = -J_2(s), \\
I_3(s) &= \det\,[s_{ij}] = s_1\,s_2\,s_3 = \tfrac{1}{3}\,(s_1^3 + s_2^3 + s_3^3) = J_3(s),
\end{aligned}$$

wobei $s_1$, $s_2$, $s_3$ – Hauptdeviatorspannungen, d.h. EW des Deviators.

Die Invariante

(3.14) $$\tau_I = \sqrt{-I_2(s)} = \sqrt{J_2(s)}$$

heißt Schubspannungsintensität (intensity of shear stresses), die in der Plastizität eine wichtige Rolle spielt.

## **Einige ausgezeichnete Ebenen des Spannungszustandes:**

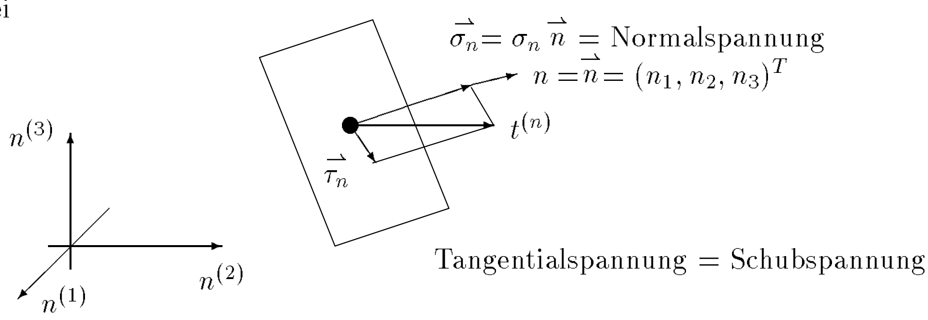
- In den Hauptachsen hat (3.3) die Form

$$\sigma_n = \sigma_1\, n_1^2 + \sigma_2\, n_2^2 + \sigma_3\, n_3^2,$$

$$\tau_n^2 = \sigma_1^2\, n_1^2 + \sigma_2^2\, n_2^2 + \sigma_3^2\, n_3^2 - \sigma_n^2 \overset{n_1^2+n_2^2+n_3^2=1}{\downarrow\atop =}$$

$$= (\sigma_2 - \sigma_3)^2\, n_2^2\, n_3^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2\, n_3^2\, n_1^2 + (\sigma_1 - \sigma_2)^2\, n_1^2\, n_2^2$$

wobei




- Für die folgenden, jeweils 4 Ebenen gilt:

$$\tilde{n}^{(1)} = \begin{bmatrix} 0 \\ \pm\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \pm\frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} \quad , \quad \tilde{n}^{(2)} = \begin{bmatrix} \pm\frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \\ \pm\frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} \quad , \quad \tilde{n}^{(3)} = \begin{bmatrix} \pm\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \pm\frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \end{bmatrix},$$

$$\tau_{\tilde{n}^{(1)}} = \tau_1 = \frac{\sigma_2 - \sigma_3}{2} \quad , \quad \tau_{\tilde{n}^{(2)}} = \tau_2 = \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2} \quad , \quad \tau_{\tilde{n}^{(3)}} = \tau_3 = \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2},$$

$$\sigma_{\tilde{n}^{(1)}} = \frac{\sigma_2 + \sigma_3}{2} \quad , \quad \sigma_{\tilde{n}^{(2)}} = \frac{\sigma_1 + \sigma_3}{2} \quad , \quad \sigma_{\tilde{n}^{(3)}} = \frac{\sigma_1 + \sigma_2}{2}.$$

Man kann nun zeigen, daß die sogenannten <u>Hauptschubspannungen</u> $\tau_1$, $\tau_2$ und $\tau_3$ Extremalwerte der Schubspannungen sind ($\longrightarrow$ Lag.-Fkt.: $L\,(n, \lambda) := \tau_n^2 + \lambda\,(|\,\vec{n}\,|^2 - 1)$). Folglich ist

$$\tau_{\max} = \tau_2 = \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2}$$

die <u>maximale Schubspannung</u>.

- Für die 8 Ebenen mit den Normalen

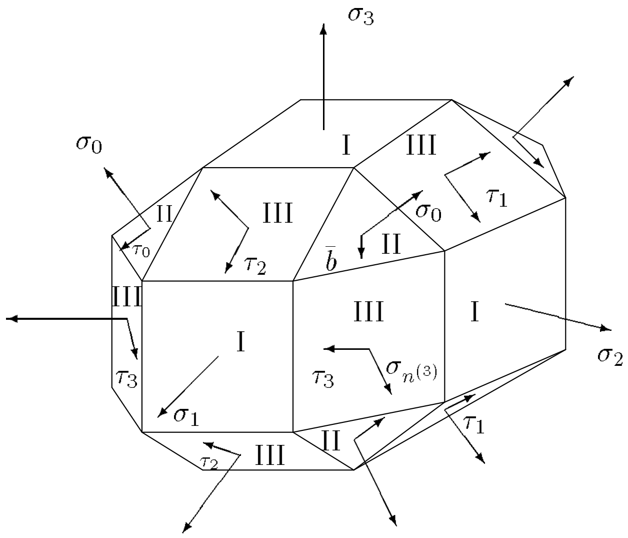
$$\vec{n} = (n_1, n_2, n_3)^T : \; n_i^2 = 1/3, \quad i = \overline{1,3}$$

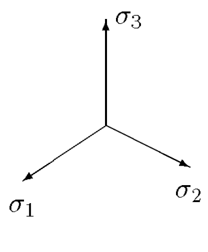
des Oktaeders gilt wegen (3.3)

$$\sigma_{\text{oct}} = \sigma_n = \sigma_i\, n_i^2 = \tfrac{1}{3}\,(\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3) = p$$

$$\begin{aligned}
\tau_{\text{oct}} &= \tau_n = \left(\sigma_i^2\, n_i^2 - \sigma_n^2\right)^{0.5} = \left(\tfrac{1}{3}\,\sigma_i\,\sigma_i - \tfrac{1}{9}\,(\sigma_1+\sigma_2+\sigma_3)^2\right)^{1/2} = \\
&= \tfrac{1}{3}\,\left(3\,\left(\sigma_1^2+\sigma_2^2+\sigma_3^2\right) - \left(\sigma_1^2+\sigma_2^2+\sigma_3^2 + 2\,\sigma_1\,\sigma_2 + 2\,\sigma_2\,\sigma_3 + 2\,\sigma_1\,\sigma_3\right)\right)^{1/2} = \\
&= \tfrac{1}{3}\,\left(2\,\left(\sigma_1^2+\sigma_2^2+\sigma_3^2\right) - 2\,(\sigma_1\,\sigma_2 + \sigma_2\,\sigma_3 + \sigma_1\,\sigma_3)\right)^{1/2} = \\
&= \tfrac{1}{3}\,\left[(\sigma_1-\sigma_2)^2 + (\sigma_2-\sigma_3)^2 + (\sigma_3-\sigma_1)^2\right]^{0.5} = \\
&= \sqrt{\tfrac{1}{9}\,[\,\text{–"–}\,]} = \sqrt{\tfrac{6}{9}\tfrac{1}{6}[\,\text{–"–}\,]} = \\
&= \sqrt{\tfrac{2}{3}\,(-I_2\,(s))} = \sqrt{\tfrac{2}{3}\,J_2\,(s)} = \\
&= \sqrt{\tfrac{2}{3}}\,\tau_I.
\end{aligned}$$

- <u>Geometrische Illustration:</u>




Hauptrichtungen (principal directions)

I = Hauptebenen (principal planes)

II = Oktaederebenen (octahedral planes):

$\sigma_0 = \sigma_{\mathrm{oct}} = \frac{1}{3}(\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3) = p,$

$\tau_0 = \tau_{\mathrm{oct}} = \sqrt{\frac{2}{3}(-I_2(s))} = \sqrt{\frac{2}{3}}\,\tau_I,$

$\tau_I = \sqrt{-I_2(s)}$ – Schubspannungsintensität (intensity of shear stresses).

III = Ebenen der extremalen Schubspannungen:

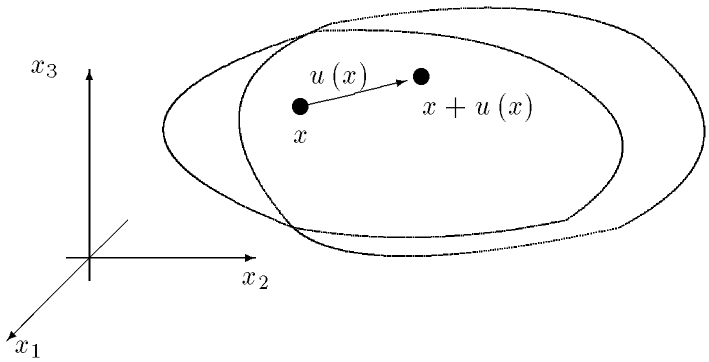
$$\tau_1 = \frac{\sigma_2 - \sigma_3}{2}, \qquad \tau_2 = \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2}, \qquad \tau_3 = \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2};$$

$$\sigma_{n^{(1)}} = \frac{\sigma_2 + \sigma_3}{2}, \quad \sigma_{n^{(2)}} = \frac{\sigma_1 + \sigma_3}{2}, \quad \sigma_{n^{(3)}} = \frac{\sigma_1 + \sigma_2}{2};$$

### 3.1.2 Verzerrungszustand (Kinematik)

■ **Der Greensche Verzerrungstensor:**

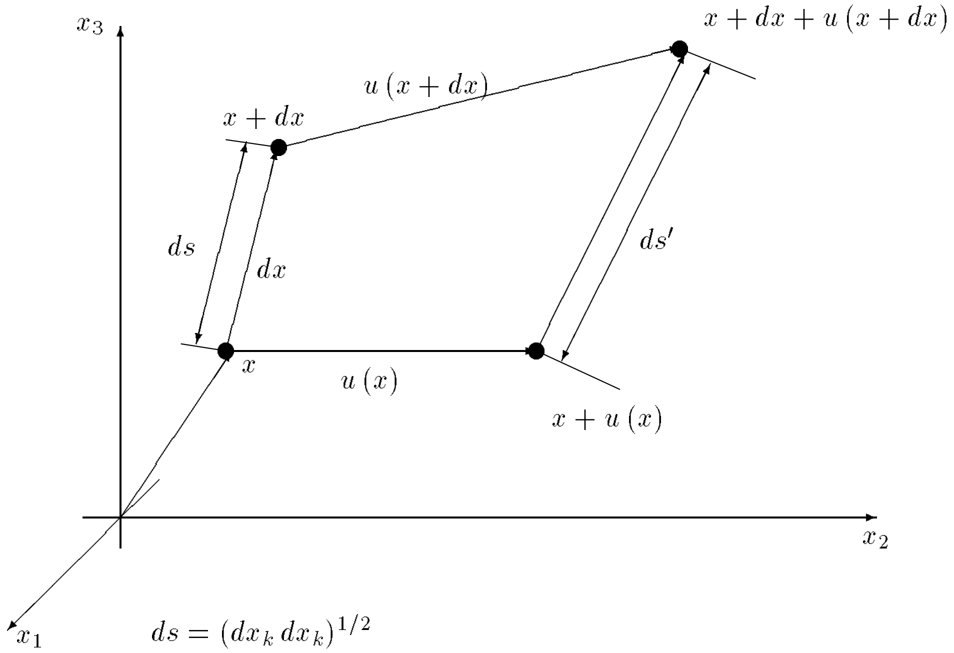
- Unter der Wirkung externer Kräfte bewegt sich ein materieller Punkt $x$ eines deformierbaren Körpers $\Omega$ in eine andere Position $x + u(x)$




mit dem Verschiebungsvektor

(3.15) $$u(x) = (u_1(x), u_2(x), u_3(x))^T, \quad x \in \bar{\Omega}.$$

- Der Abstand $ds$ des Punktes $x$ zu einem benachbarten Punkt $x + dx$ ändert sich durch die Deformation zu $ds'$




$$ds = (dx_k\, dx_k)^{1/2}$$

$$du = u(x + dx) - u(x)$$
$$\downarrow$$

$$\begin{aligned}
(ds')^2 &= |x + dx + u\,(x + dx) - x - u\,(x)|^2 = \\
&= |dx + du|^2 = \\
&= dx_k\, dx_k + 2\, dx_k\, du_k + du_k\, du_k
\end{aligned}$$

Da

$$du_k = u_{k,l}\, dx_l,$$

erhalten wir für die Längenänderung

$$\begin{aligned}
(ds')^2 - (ds)^2 &= 2\, du_k\, dx_k + du_i\, du_i = \\
&= 2\, u_{k,l}\, dx_l\, dx_k + u_{i,l}\, dx_l\, u_{i,k}\, dx_k = \\
&= (2\, u_{k,l} + u_{i,l}\, u_{i,k})\, dx_l\, dx_k = \\
&= 2 \underbrace{\left\{ \frac{1}{2} \left( u_{k,l} + u_{l,k} + u_{i,l}\, u_{i,k} \right) \right\}}_{=:\, e_{kl}} dx_l\, dx_k = \\
&= 2\, e_{kl}\, dx_l\, dx_k.
\end{aligned}$$

Der symmetrische Tensor der Ordnung 2

$$\boxed{e = [e_{kl}]_{k,l=\overline{1,3}} \quad \text{mit} \quad e_{kl} = \tfrac{1}{2}\,(u_{k,l} + u_{l,k} + u_{i,l}\,u_{i,k})} \tag{3.16}$$

heißt Greenscher Verzerrungstensor.

- Zur geometrischen Interpretation der Komponenten des Greenschen Verzerrungstensors:

$e_{kk}$ – beschreibt die relative Längenänderung eines Linienelementes $\vec{ds}=$ „$dx_k$“$\|$ $x_k$–Achse !

Tatsächlich,

$|ds'|^2 = dx_k^2 + 2\,e_{kk}\,dx_k^2 = (1 + 2\,e_{kk})\,|ds|^2, \quad (\not\sum)$

d.h. (o. B. d. Allg. $|ds'| \geq |ds|$ !, d.h. $e_{kk} \geq 0$)

$$\frac{|ds'| - |ds|}{|ds|} = \sqrt{1 + 2\,e_{kk}} - 1 \underset{\substack{\uparrow \\ e_{kk}\ \text{klein !}}}{\approx} e_{kk}$$

$e_{kl}$ – beschreibt die Winkeländerung $\varphi_{kl}$ $(k \neq l)$ zwischen den Linienelementen „$dx_k$“ und „$dx_l$“. Analog zu oben ergibt eine direkte Rechnung (mms)

$$\sin\varphi_{kl} = \frac{2\,e_{kl}}{\sqrt{1 + 2\,e_{kk}}\,\sqrt{1 + 2\,e_{ll}}} \qquad (e_{kk}, e_{ll} \geq 0),$$

d.h.

$\varphi_{kl} \approx \gamma_{kl} := 2\,e_{kl}$, falls $e_{kl}$ klein ist !

## ■ Der Cauchysche Verzerrungstensor:

- Im folgenden setzen wir voraus, daß

$$\left|\frac{\partial u_k}{\partial x_l}\right| = |u_{k,l}| \ll 1 \quad \forall\, k, l = \overline{1,3}. \tag{3.17}$$

Dann können in (3.16) die quadratischen Terme vernachlässigt werden und

$$e_{kl} \approx \varepsilon_{kl} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_l}{\partial x_k} + \frac{\partial u_k}{\partial x_l}\right).$$

Der symmetrische Tensor der Ordnung 2

$$\boxed{\varepsilon = [\varepsilon_{kl}]_{k,l=\overline{1,3}} \quad \text{mit} \quad \varepsilon_{kl} = \tfrac{1}{2}\,(u_{k,l} + u_{l,k})} \tag{3.18}$$

heißt Cauchyscher Verzerrungstensor.

Aus den obigen Betrachtungen folgt, daß die Komponenten $\varepsilon_{kl}$ von $\varepsilon$ folgende Bedeutung haben:

$\varepsilon_{kk}$ – relative Längenänderung des Linienelements „$dx_k$“.

$\gamma_{kl} = 2\,\varepsilon_{kl} =$ Schubwinkel – Änderung der Winkel zwischen den Linienelementen „$dx_k$“ und „$dx_l$“ $(k \neq l)$.

- Es gilt offenbar die Darstellung

  $$\tfrac{du}{dx} := [u_{k,l}] = \varepsilon + \omega,$$

  wobei

  $$\omega = [\omega_{kl}]_{k,l=\overline{1,3}} \;\text{ mit }\; \omega_{kl} = \tfrac{1}{2}\,(u_{k,l} - u_{l,k}) = -\omega_{lk}.$$

  Dann gilt offenbar (mms)

  $$e_{kl} = \varepsilon_{kl} + \tfrac{1}{2}\,(\varepsilon_{ik} + \omega_{ik})\,(\varepsilon_{il} + \omega_{il}),$$

  d.h. $e_{kl} \approx \varepsilon_{kl}$, falls $\varepsilon_{ik}$ und $\omega_{ik}$ $(\curvearrowright u_{i,j})$ klein sind !

- Hauptverzerrungen (= Hauptdehnungen) und Invarianten:

  Btr. wieder EWP

  (3.19) $$[\varepsilon_{ji}\,(x) - \lambda\,\delta_{ji}]\,n_j = 0.$$

  Da $[\varepsilon_{ij}]_{i,j=\overline{1,3}}$ symmetrisch ist, existieren wieder drei nichtnotwendig verschiedene, reelle

  $$\begin{array}{llccccccl} & & & & \text{Hauptdehnungen} & & & & \\ \text{EW:} & \lambda & = & \varepsilon_1 & \geq & \varepsilon_2 & \geq & \varepsilon_3, & \\ \text{EV:} & \vec{n} & = & n^{(\varepsilon,1)} & , & n^{(\varepsilon,2)} & , & n^{(\varepsilon,3)} & : \left(n^{(\varepsilon,i)}, n^{(\varepsilon,j)}\right) = \delta_{ij}. \end{array}$$

  Die Hauptdehnungen sind Wurzeln des charakteristischen Polynoms

  $$-\lambda^3 + I_1\,(\varepsilon)\,\lambda^2 - I_2\,(\varepsilon)\,\lambda + I_3\,(\lambda) = 0,$$

  wobei die Koeffizienten

  $$\begin{aligned} I_1\,(\varepsilon) &= \varepsilon_{ii} = \varepsilon_{11} + \varepsilon_{22} + \varepsilon_{33} = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3, \\ I_2\,(\varepsilon) &= \varepsilon_{11}\,\varepsilon_{22} + \varepsilon_{22}\,\varepsilon_{33} + \varepsilon_{33}\,\varepsilon_{11} - \varepsilon_{12}^2 - \varepsilon_{23}^2 - \varepsilon_{31}^2 = \\ &= \varepsilon_1\,\varepsilon_2 + \varepsilon_2\,\varepsilon_3 + \varepsilon_3\,\varepsilon_1, \\ I_3\,(\varepsilon) &= \det\,[\varepsilon_{ij}] = \varepsilon_1\,\varepsilon_2\,\varepsilon_3 \end{aligned}$$

  wiederum Invarianten (1., 2. und 3.) sind.

- Analog zum Spannungstensor gilt die Zerlegung

  $$\varepsilon = \text{Kugeltensor} + \text{Deviator} = \varepsilon_0 + \tilde{\varepsilon}$$

  mit $\varepsilon_0 = [\bar{e}\,\delta_{ij}]_{i,j=\overline{1,3}}$, $\quad \bar{e} = \frac{1}{3}\,\varepsilon_{ii} = \frac{1}{3}\,I_1\,(\varepsilon)$,

  $\tilde{\varepsilon} = [\tilde{\varepsilon}_{ij}]_{i,j=1,3}$, $\quad \tilde{\varepsilon}_{ij} = \varepsilon_{ij} - \bar{e}\,\delta_{ij}$.

Für $\tilde{\varepsilon}$ können ebenfalls wieder die Invarianten aufgeschrieben werden:
$I_1(\tilde{\varepsilon}) = J_1(\tilde{\varepsilon}) = 0$, $I_2(\tilde{\varepsilon}) = -J_2(\tilde{\varepsilon}) = (\uparrow)$, $I_3(\tilde{\varepsilon}) = J_3(\tilde{\varepsilon}) = \det[\tilde{e}_{ij}]$.

### 3.1.3 Stoffgesetze: Lineare Spannungs-Verzerrungs–Beziehungen und das HOOKEsche Gesetz

- **Hyperelastisches Material:**

  - Falls die Spannungs-Verzerrungs–Beziehungen durch

(3.20) $$\sigma_{ij} = \frac{\partial W(\varepsilon)}{\partial \varepsilon_{ij}}$$

gegeben sind, und das elastische Potential (Verzerrungsenergiedichte)

$$W : I\!R^9_s := \{\varepsilon = [\varepsilon_{ij}] \in I\!R^9 : \varepsilon_{ij} = \varepsilon_{ji}\} \longmapsto I\!R^1$$

bestimmte Bedingungen, z.B.

  - positiv definit, d.h. $W(\varepsilon) > 0 \quad \forall\, \varepsilon \neq \mathbf{O}$,
  - $\dfrac{\partial W(\varepsilon)}{\partial \varepsilon_{ij}} = \dfrac{\partial W(\varepsilon)}{\partial \varepsilon_{ji}} \quad \forall\, i, j = 1, 3,$

erfüllt, dann nennt man das Material hyperelastisch.

- **Linear elastisches Material:**

  - Das elastische Potential $W(\varepsilon)$ habe die Form

(3.21) $$W(\varepsilon) = \frac{1}{2} D_{ijkl}\, \varepsilon_{kl}\, \varepsilon_{ij},$$

wobei die elastischen Koeffizienten $D_{ijkl}$ folgende Eigenschaften haben:

(3.22) $$\begin{aligned} D_{ijkl} &= D_{klij}, \\ D_{ijkl} &= D_{jikl} = D_{jilk}. \end{aligned}$$

Aus (3.22) folgt, daß nur 21 Koeffizienten unabhängig voneinander gewählt werden können. In Abhängigkeit von Symmetrieeigenschaften des Materials kann die Zahl der unabhängigen Koeffizienten weiter reduziert werden, z.B. kann orthotropes Material durch 9 unabhängige elastische Koeffizienten beschrieben werden (siehe z.B. [17] Kikuchi N.: Finite Element Methods in Mechanics, S. 187 ff).

Aus (3.20) und (3.21) folgt das Hookesche Gesetz:

(3.23) $$\sigma_{ij} = D_{ijkl}\, \varepsilon_{kl}.$$

Man nennt das Material homogen, falls $D_{ijkl} \neq D_{ijkl}(x)$, andernfalls inhomogen.

- Ein Material wird isotrop, wenn die Eigenschaften des Materials nicht von der Richtung abhängen. Ein Körper ist isotrop, wenn in jedem Punkt des Körpers das Material isotrop ist.
  Wenn $x = (x_1, x_2, x_3)$ und $x' = (x'_1, x'_2, x'_3)$ zwei orthog. Koordinatensysteme sind, dann müssen folglich zusätzlich zu (3.22) die Beziehungen

  $$a_{ki}\, a_{lj}\, D_{ijmn}\, a_{np}\, a_{mq} = D_{klpq} \tag{3.24}$$

  gelten, wobei $a_{ij} = \cos \sphericalangle (x_i, x'_j)$.
  Damit bleiben 2 unabhängige Konstanten übrig !

  Das elastische Potential kann dann in der Form

  $$W(\varepsilon) = \frac{1}{2} \left(\lambda\, J_1^2 (\varepsilon) + 4\, \mu\, J_2 (\varepsilon)\right) \tag{3.25}$$

  geschrieben werden, wobei

  $\lambda, \mu$ – Lamésche Konstanten: $\lambda, \mu > 0$.
  $J_1 (\varepsilon) = \varepsilon_{ii}$ – lineare Invariante von $\varepsilon$,
  $J_2 (\varepsilon) = \frac{1}{2} \varepsilon_{ij}\, \varepsilon_{ij}$ – quadratische Invariante von $\varepsilon$.

  Setzt man die Beziehungen

  $$J_1^2 (\varepsilon) = (\varepsilon_{ii})^2 = (\delta_{ij}\, \varepsilon_{ij})^2 = \delta_{ij}\, \delta_{kl}\, \varepsilon_{ij}\, \varepsilon_{kl} \quad \text{und}$$
  $$2\, J_2 (\varepsilon) = \varepsilon_{ij}\, \varepsilon_{ij} = \delta_{ik}\, \delta_{jl}\, \varepsilon_{ij}\, \varepsilon_{kl}$$

  in (3.25) ein, erhält man

  $$W(\varepsilon) = \frac{1}{2} \underbrace{[\lambda\, \delta_{ij}\, \delta_{kl} + \mu\, (\delta_{ik}\, \delta_{jl} + \delta_{il}\, \delta_{jk})]}_{= D_{ijkl}} \varepsilon_{ij}\, \varepsilon_{kl}. \tag{3.26}$$

  Folglich nimmt das Hookesche Gesetz (3.23) die Form

  $$\boxed{\begin{aligned} \sigma_{ij} &= [\lambda\, \delta_{ij}\, \delta_{kl} + \mu\, (\delta_{ik}\, \delta_{jl} + \delta_{il}\, \delta_{jk})]\, \varepsilon_{kl} \\ &= \lambda\, \Theta\, \delta_{ij} + 2\, \mu\, \varepsilon_{ij} \end{aligned}} \tag{3.27}$$

  an, wobei $\Theta = 3\, \bar{\varepsilon} = \varepsilon_{ii} = I_1 (\varepsilon)$ – Volumendilatation.

  Aus (3.25) und $\lambda, \mu > 0$ folgt

  $$W(\varepsilon) \geq \mu\, \varepsilon_{ij}\, \varepsilon_{ij}. \tag{3.28}$$

## ■ Weitere Bemerkungen zu isotropem, linear elastischem Material:

- Elastische Konstanten im isotropen Fall:

  Aus (3.26) folgt

  $$D_{ijkl} = \lambda\, \delta_{ij}\, \delta_{kl} + \mu\, (\delta_{ik}\, \delta_{jl} + \delta_{il}\, \delta_{jk}) \tag{3.29}$$

mit den Laméschen Konstanten $\lambda, \mu > 0$.
Neben den Laméschen Konstanten werden in der Ingenieurpraxis auch die folgenden Konstanten verwendet:

$$(3.30)\quad \begin{cases} E = \dfrac{\mu\,(3\lambda+2\mu)}{\lambda+\mu} = 2\,(1+\nu)\,\mu = \dfrac{9K\mu}{3K+\mu} & \text{– Youngscher Elastizitätsmodul,} \\[2mm] \nu = \dfrac{1}{2}\,\dfrac{\lambda}{\lambda+\mu} = \dfrac{E}{2G} - 1 = \dfrac{1}{2}\,\dfrac{3K-2\mu}{3K+\mu} & \text{– Poissonsche Querkontraktionszahl,} \\ & \nu \in (0, 0.5). \\[2mm] K = \lambda + \dfrac{2}{3}\,\mu = \dfrac{E}{3\,(1-2\nu)} & \text{– Kompressionsmodul (bulk modulus),} \\[2mm] G = \mu = \dfrac{E}{2\,(1+\nu)} & \text{– Gleitmodul (shear modulus),} \\[2mm] \lambda = \dfrac{E\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)} = \dfrac{2G\nu}{(1-2\nu)} = K - \dfrac{2}{3}\,G. \end{cases}$$

Aus (3.27) und (3.29) folgen z.B. für $K$ und $G$ die Beziehungen

$$\begin{aligned} 3\,p &= \sigma_{ii} = \{\lambda\,\delta_{ii}\,\delta_{kl}\,\varepsilon_{kl} + 2\,\mu\,\delta_{ik}\,\delta_{il}\,\varepsilon_{kl}\} = (3\,\lambda + 2\,\mu)\,\underbrace{\varepsilon_{kk}}_{=\Theta} \\ p &= \frac{3\,\lambda + 2\,\mu}{3}\,\Theta \quad \Rightarrow \quad \boxed{p = K\,\Theta} \\ s_{ij} &= \sigma_{ij} - p\,\delta_{ij} = \lambda\,\Theta\,\delta_{ij} + 2\,\mu\,\varepsilon_{ij} - \frac{3\,\lambda + 2\,\mu}{3}\,\Theta\,\delta_{ij} = \\ &= 2\,\mu\,\varepsilon_{ij} - 2\,\mu\,\frac{\Theta}{3}\,\delta_{ij} = 2\,\mu\,(\varepsilon_{ij} - \bar{\varepsilon}\,\delta_{ij}) = 2\,\mu\,\tilde{\varepsilon}_{ij} = 2\,G\,\tilde{\varepsilon}_{ij} \\ \Rightarrow &\quad \boxed{s_{ij} = 2\,G\,\tilde{\varepsilon}_{ij} \equiv 2\,\mu\,\tilde{\varepsilon}_{ij}} \quad \Rightarrow \quad \boxed{s_{ij} = 2\,G\,\varepsilon_{ij}, \quad i \neq j} \end{aligned}$$

- <u>Zur Bestimmung der elastischen Konstanten (z.B. $\lambda, \mu$) über einachsige Spannungs–zustände ($\to$ Zugversuch etc., siehe auch Pkt. 3.1.4.1):</u>

<u>Vor.:</u> $\sigma_{ij} = 0 \quad \forall\ i, j$ bis auf $\sigma_{11} \neq 0$

Aus (3.27) folgt dann:

$$\begin{aligned}
\sigma_{11} &= \lambda\,(\varepsilon_{11}+\varepsilon_{22}+\varepsilon_{33}) + 2\,\mu\,\varepsilon_{11}\\
&\left.\begin{aligned}
\sigma_{22} &\equiv 0 = \lambda\,(\varepsilon_{11}+\varepsilon_{22}+\varepsilon_{33}) + 2\,\mu\,\varepsilon_{22}\\
\sigma_{33} &\equiv 0 = \lambda\,(\varepsilon_{11}+\varepsilon_{22}+\varepsilon_{33}) + 2\,\mu\,\varepsilon_{33}
\end{aligned}\right\} \Rightarrow \varepsilon_{22}+\varepsilon_{33} = -\tfrac{\lambda}{\lambda+\mu}\,\varepsilon_{11}\\
\sigma_{ij} &\equiv 0 = 2\,\mu\,\varepsilon_{ij}, \quad \forall\, i \neq j
\end{aligned}$$

Damit gilt:

$$\sigma_{11} = \left[\lambda\left(1-\frac{\lambda}{\lambda+\mu}\right)+2\,\mu\right]\varepsilon_{11} = \underbrace{\frac{\mu\,(3\,\lambda+2\,\mu)}{\lambda+\mu}}_{=E}\,\varepsilon_{11} = E\,\varepsilon_{11}$$

$$\varepsilon_{22} = \varepsilon_{33} = -\frac{\lambda}{2\,\mu}\,\varepsilon_{ii} \underset{\uparrow}{=} -\frac{\lambda}{2\,\mu}\,\frac{1}{3\,\lambda+2\,\mu}\,\sigma_{11} = -\overbrace{\frac{1}{2}\,\frac{\lambda}{\lambda+\mu}}^{=\nu}\,\varepsilon_{11}$$

$$\sigma_{11}+0+0 = 3\,\lambda\,\varepsilon_{ii}+2\,\mu\,\varepsilon_{ii} = (3\,\lambda+2\,\mu)\,\varepsilon_{ii}$$

Resultat:

(3.31)
$$\boxed{\begin{array}{ll} \text{a)} & \sigma_{11} = E\,\varepsilon_{11}\\ \text{b)} & \varepsilon_{22} = \varepsilon_{33} = -\nu\,\varepsilon_{11}\end{array}}$$

$\Rightarrow$ a) $E$ ist folglich ein Maß für den elastischen Widerstand eines Materials unter einachsigem Zug bzw. Druck !

b) $\nu$ ist der absolute Wert des Verhältnisses der transversalen Verzerrungen ($\varepsilon_{22}$ bzw. $\varepsilon_{33}$) zu den longitudinalen Verzerrungen ($\varepsilon_{11}$) unter einachsigem Zug bzw. Druck (entlang der $x_1$-Achse).

$\Rightarrow$ Zugversuch zur Bestimmung von $E$ und $\nu$ !
Aus (3.30) lassen sich damit alle anderen Konstanten berechnen !

- Matrixdarstellungen der Spannungs-Verzerrungs–Beziehungen im isotropen Fall: $\sigma = D\,\varepsilon$

  1. $\sigma$-$\varepsilon$–Relation mit 9-komponentigen Vektoren:

     $\sigma = [\sigma_{11}, \sigma_{22}, \sigma_{33}, \sigma_{12}, \sigma_{21}, \sigma_{23}, \sigma_{32}, \sigma_{13}, \sigma_{31}]^T$

     $\varepsilon = [\varepsilon_{11}, \varepsilon_{22}, \varepsilon_{33}, \varepsilon_{12}, \varepsilon_{21}, \varepsilon_{23}, \varepsilon_{32}, \varepsilon_{13}, \varepsilon_{31}]^T$

$$D = \begin{bmatrix} \lambda+2\mu & \lambda & \lambda & & & & & & \\ \lambda & \lambda+2\mu & \lambda & & & & & & \\ \lambda & \lambda & \lambda+2\mu & & & & & & \\ & & & 2\mu & & & & & \\ & & & & 2\mu & & & & \\ & & & & & 2\mu & & & \\ & & & & & & 2\mu & & \\ & & & & & & & 2\mu & \\ & & & & & & & & 2\mu \end{bmatrix}$$

2. <u>$\sigma$-$\varepsilon$–Relation mit 6-komponentigen Vektoren:</u>

   $\sigma = [\sigma_{11}, \sigma_{22}, \sigma_{33}, \sigma_{12}, \sigma_{23}, \sigma_{31}]^T$

   $\varepsilon = [\varepsilon_{11}, \varepsilon_{22}, \varepsilon_{33}, \gamma_{12}, \gamma_{23}, \gamma_{31}]^T$ mit $\gamma_{12} = 2\,\varepsilon_{12}$, $\gamma_{23} = 2\,\varepsilon_{23}$, $\gamma_{31} = 2\,\varepsilon_{31}$ !

$$D = \begin{bmatrix} \lambda+2\mu & \lambda & \lambda & & & \\ \lambda & \lambda+2\mu & \lambda & & & \\ \lambda & \lambda & \lambda+2\mu & & & \\ & & & \mu & & \\ & & & & \mu & \\ & & & & & \mu \end{bmatrix} = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \begin{bmatrix} 1-\nu & \nu & \nu & & & \\ \nu & 1-\nu & \nu & & & \\ \nu & \nu & 1-\nu & & & \\ & & & \frac{1-2\nu}{2} & & \\ & & & & \frac{1-2\nu}{2} & \\ & & & & & \frac{1-2\nu}{2} \end{bmatrix}$$

## ■ Berücksichtigung thermischer Einflüsse:

- Allgemein:

(3.32)
$$\sigma_{ij} = D_{ijkl}\,\varepsilon_{kl} - \beta_{ij}\,(T - T_0),$$

wobei $T, T_0$ – Temperatur im def. bzw. nichtdef. Körper,
$\beta_{ij} = \beta_{ji}$ – Wärmedehnzahlen.

- <u>Isotrop:</u>

(3.33)
$$\beta_{ij} = K\,\alpha\,\delta_{ij},$$

wobei $K$ – Kompressionsmodul,
$\alpha$ – Wärmedehnzahl.

- <u>Bemerkung:</u> Für höhere Temperaturen $T$ (mehrere Hundert °C $\hookrightarrow$ siehe Materialtabellen) hängen die elastischen Konstanten von $\mathbf{T}$ ab: $D_{ijkl} = D_{ijkl}\,(\mathbf{T})$.

### 3.1.4 Einige Spezialfälle von Spannungs- und Verzerrungszuständen

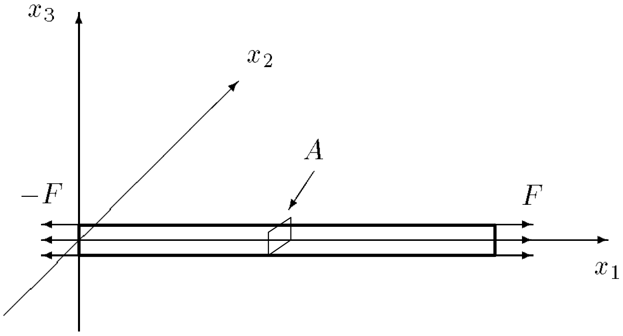
#### 3.1.4.1 Beispiel eines einachsigen Spannungszustandes

- **Btr. Stab der Länge $l$ mit konstantem Querschnitt $A$**

$$\Omega = \{x \in I\!R^3 : 0 < x_1 < l,\ (x_1, x_2) \in A\}$$

unter einachsiger ($x_1$-Richtung) Zug- bzw. Druckbelastung:

$$t^{(-e_1)} = \begin{bmatrix} -\frac{F}{|A|} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$




$$t^{(e_1)} = \begin{bmatrix} \frac{F}{|A|} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

- **Für den einachsigen Spannungszustand gilt dann:**

$$\sigma_{11} = \sigma_{11}(x_1) = \frac{F}{|A|}, \text{ mit } |A| = \text{meas}(A),$$

$$\sigma_{ij} = 0 \quad \forall\, i = 1,2,3 \quad \forall\, j = 2,3 \text{ und}$$

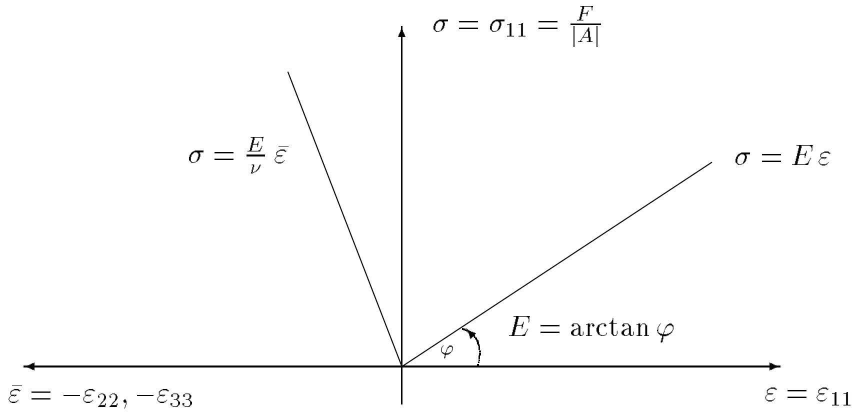
$$u_i(x) = u_i(x_1), \quad \forall\, i = 1,2,3 \quad \text{(Verschiebung)}.$$

Aus (3.31) erhalten wir dann

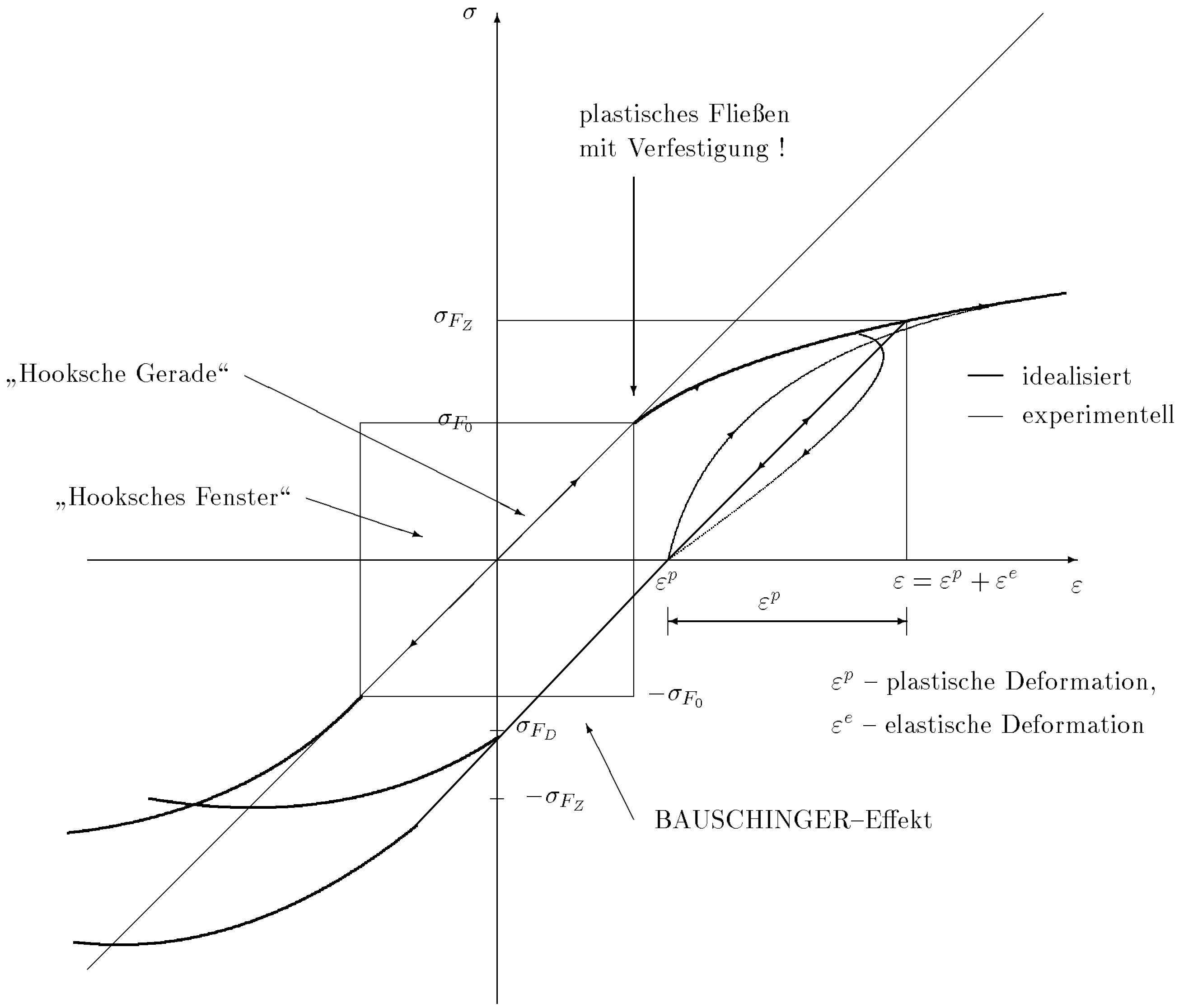
$$\sigma_{11} = E\,\varepsilon_{11} = E\,\frac{\partial u_1}{\partial x_1} = E\,\frac{\Delta u_1}{\Delta x_1}$$

$$\varepsilon_{22} = \varepsilon_{33} = -\nu\,\varepsilon_{11} \text{ und } \varepsilon_{ij} = 0 \quad \forall\, i \neq j.$$

- **Folglich können $E$ und $\nu$ durch einen einachsigen Zugversuch experimentell bestimmt werden:**



- **In der Praxis erhält man bei einem Zugversuch allerdings ein $\boldsymbol{\sigma - \varepsilon}$–Diagramm,** welches mit dem obigen Diagramm nur für $-\sigma_{F_0} \leq \sigma \leq \sigma_{F_0}$ übereinstimmt, wobei $\sigma_{F_0}$ die sogenannte **Anfangsfließspannung** bezeichnet:




Falls $|\sigma| > \sigma_{F_0}$ wird, dann ist das Hookesche Gesetz nicht mehr gültig, und es müssen für den mehrachsigen Spannungszustand kompliziertere Stoffgesetze entwickelt werden $\Rsh$ Elastisch-plastische Fließtheorie (Kap. 5).

#### 3.1.4.2 Der ebene Verzerrungszustand (EVZ)

## Btr. Deformationsproblem mit folgenden Eigenschaften:

- Der Körper (Gebiet) $\mathcal{K} \subset I\!R^3$ habe eine ausgezeichnete Dimension, z.B. in $x_3$-Richtung, die wesentlich länger ist als die anderen beiden, und konstanten Querschnitt $\Omega$:

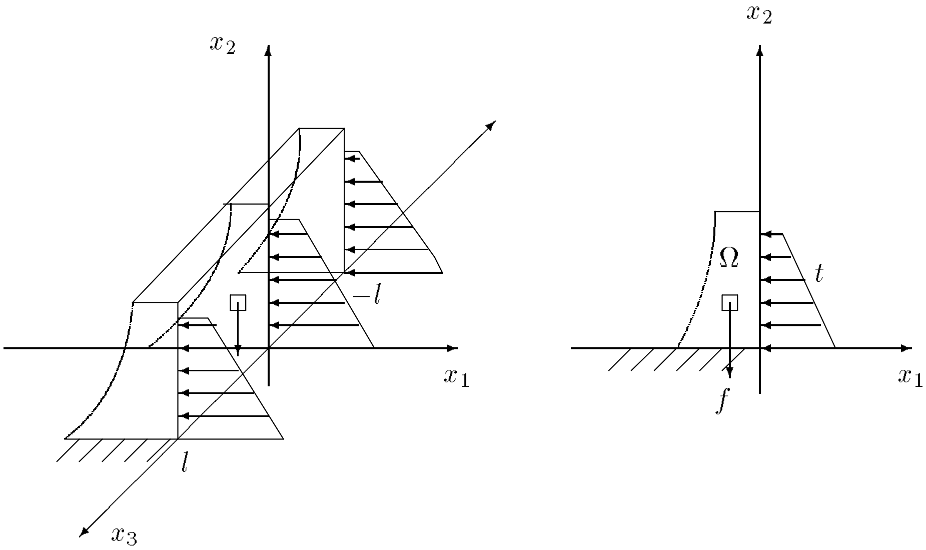
$$\mathcal{K} = \left\{ x = (x_1, x_2, x_3)^T \in I\!R^3 : x = (x_1, x_2) \in \Omega, \ -l < x_3 < +l \right\}$$

  mit $l \gg \operatorname{diam} \Omega$, $\Omega \subset I\!R^2$ – „echtes" 2D–Gebiet.

- Die äußeren Kräfte $f$ und $t$ wirken in der Ebene $\perp$ $x_3$-Achse und sind unabhängig von $x_3$, d.h.

$$f(x) = \begin{bmatrix} f_1(x_1, x_2) \\ f_2(x_1, x_2) \\ 0 \end{bmatrix}, \quad t(x) = \begin{bmatrix} t_1(x_1, x_2) \\ t_2(x_1, x_2) \\ 0 \end{bmatrix}. \tag{3.34}$$

Beispiel: Damm einer Talsperre (Staudamm)




Folglich kann man voraussetzen, daß folgende Beziehungen gelten:

$$\frac{\partial u_1}{\partial x_3} = \frac{\partial u_2}{\partial x_3} = u_3 = 0 \quad (\curvearrowright \ u_i = u_i(x_1, x_2), \ i = 1, 2), \tag{3.35}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \varepsilon_{ij}(x) = \varepsilon_{ij}(x_1, x_2), \quad i, j = 1, 2 \\ \varepsilon_{i3} = \varepsilon_{3i} = 0, \quad i = 1, 2, 3 \end{array} \right\} \text{ d.h. EVZ} \tag{3.36}$$

■ **Hookesches Gesetz (isotroper Fall) für den ebenen Verzerrungszustand (EVZ):**

- Aus dem Hookeschen Gesetz (3.27) $\sigma_{ij} = \lambda\,\Theta\,\delta_{ij} + 2\,\mu\,\varepsilon_{ij}$ und den Beziehungen (3.36) des EVZ folgt unmittelbar:

$$\begin{array}{r|l} & \sigma_{31} = \sigma_{32} = 0, \\ & \sigma_{11} = \lambda\,(\varepsilon_{11}+\varepsilon_{22}) + 2\,\mu\,\varepsilon_{11} \\ + & \sigma_{22} = \lambda\,(\varepsilon_{11}+\varepsilon_{22}) + 2\,\mu\,\varepsilon_{22} \\ \hline \curvearrowright & \sigma_{11}+\sigma_{22} = 2\,(\lambda+\mu)\,(\varepsilon_{11}+\varepsilon_{22}) \end{array}$$

$$\sigma_{33} = \lambda\,(\varepsilon_{11}+\varepsilon_{22}+\underset{}{\overset{0}{\overset{\|}{\varepsilon_{33}}}}) + 2\,\mu\,\overset{0}{\overset{\|}{\varepsilon_{33}}} = \lambda\,(\varepsilon_{11}+\varepsilon_{22}) = \underbrace{\frac{1}{2}\,\frac{\lambda}{\lambda+\mu}}_{=\nu}\,(\sigma_{11}+\sigma_{22})$$

- Damit erhalten wir das Stoffgesetz für den EVZ:

$$(3.37)\quad \boxed{\begin{aligned} \sigma_{11} &= \lambda\,(\varepsilon_{11}+\varepsilon_{22}) + 2\,\mu\,\varepsilon_{11} \overset{(3.30)}{=} E\,\frac{1-\nu}{(1+\nu)\,(1-2\,\nu)}\,\varepsilon_{11} + \frac{E\,\nu}{(1+\nu)\,(1-2\,\nu)}\,\varepsilon_{22} \\ \sigma_{22} &= \lambda\,(\varepsilon_{11}+\varepsilon_{22}) + 2\,\mu\,\varepsilon_{22} \overset{(3.30)}{=} \frac{E\,\nu}{(1+\nu)\,(1-2\,\nu)}\,\varepsilon_{11} + E\,\frac{1-\nu}{(1+\nu)\,(1-2\,\nu)}\,\varepsilon_{22} \\ \sigma_{12} &= 2\,\mu\,\varepsilon_{12} \overset{(3.30)}{=} \frac{E}{1+\nu}\,\varepsilon_{12} \\ \hline \sigma_{33} &= \frac{1}{2}\,\frac{\lambda}{\lambda+\mu}\,(\sigma_{11}+\sigma_{22}) \overset{(3.30)}{=} \nu\,(\sigma_{11}+\sigma_{22}), \quad \sigma_{31}=\sigma_{32}=0 \end{aligned}}$$

oder in der inversen Form:

$$\begin{aligned} \varepsilon_{11} &= \frac{1}{2\,\mu}\left(1-\frac{\lambda}{2\,(\lambda+\mu)}\right)\sigma_{11} - \frac{\lambda}{4\,\mu\,(\lambda+\mu)}\,\sigma_{22} = \frac{1-\nu^2}{E}\left[\sigma_{11} - \frac{\nu}{1-\nu}\,\sigma_{22}\right] \\ \varepsilon_{22} &= \frac{\lambda+2\,\mu}{4\,\mu\,(\lambda+\mu)}\,\sigma_{22} - \frac{\lambda}{4\,\mu\,(\lambda+\mu)}\,\sigma_{11} = \frac{1-\nu^2}{E}\left[\sigma_{22} - \frac{\nu}{1-\nu}\,\sigma_{11}\right] \\ \varepsilon_{12} &= \frac{1}{2\,\mu}\,\sigma_{12} \end{aligned}$$

- Matrixform: $\sigma = D\,\varepsilon$

1. $\sigma = [\sigma_{11}, \sigma_{22}, \sigma_{12}, \sigma_{21}]^T, \quad \varepsilon = [\varepsilon_{11}, \varepsilon_{22}, \varepsilon_{12}, \varepsilon_{21}]^T$:

$$D = \frac{E}{(1+\nu)\,(1-2\,\nu)}\begin{bmatrix} 1-\nu & \nu & & \mathbf{O} \\ \nu & 1-\nu & & \\ & & 1-2\,\nu & 0 \\ & \mathbf{O} & 0 & 1-2\,\nu \end{bmatrix}$$

2. $\sigma = [\sigma_{11}, \sigma_{22}, \sigma_{12}]^T$, $\tilde{\varepsilon} = [\varepsilon_{11}, \varepsilon_{22}, \gamma_{12}]^T$ mit $\gamma_{12} = 2\,\varepsilon_{12}$:

$$D = \frac{E}{(1+\nu)\,(1-2\,\nu)} \begin{bmatrix} 1-\nu & \nu & 0 \\ \nu & 1-\nu & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-2\,\nu}{2} \end{bmatrix}.$$

■ **Aus dem Kräftegleichgewicht (3.4), den geometrischen Beziehungen (3.18) und den Beziehungen (3.34) – (3.36) des EVZ folgen**

- die Kräftegleichgewichtsgleichungen (vgl. Pkt. 3.1.1):

$$-\sum_{j=1}^{2} \sigma_{ji,j}\,(x_1, x_2) = f_i\,(x_1, x_2), \quad i = 1,2, \quad x = (x_1, x_2) \in \Omega,$$

- die Verzerrungs–Verschiebungsbeziehungen (vgl. Pkt. 3.1.2):

$$\varepsilon_{ij} = \varepsilon_{ij}\,(x_1, x_2) = \tfrac{1}{2}\,[u_{i,j}\,(x_1, x_2) + u_{j,i}\,(x_1, x_2)], \quad i,j = 1,2,$$

die zusammen mit dem Stoffgesetz (3.37) und den Randbedingungen ($\bar{\Gamma}_u \cup \bar{\Gamma}_t = \Gamma \equiv \partial\,\Omega$), z.B.

- $u_1\,(x_1, x_2)$, $u_2\,(x_1, x_2)$ auf $\Gamma_u$ geg., z.B. $u_1\,(x) = u_2\,(x) = 0 \quad \forall\; x = (x_1, x_2) \in \Gamma_u$,

- $\sum_{j=1}^{2} \sigma_{ji}\,(x_1, x_2)\,n_j\,(x_1, x_2) = t_i\,(x_1, x_2), \quad i = 1,2 \quad \forall\;(x_1, x_2) \in \Gamma_t$

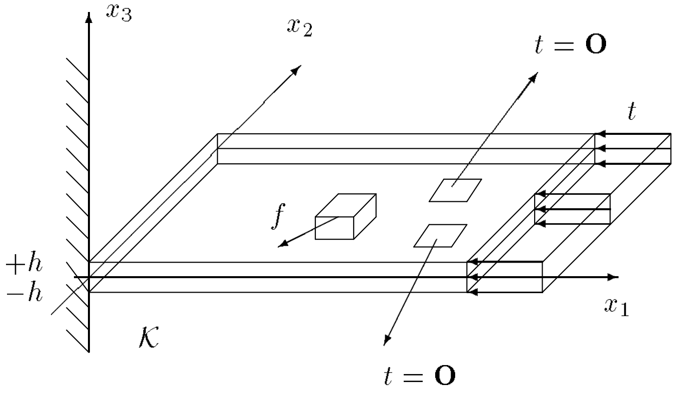
eine vollständige Beschreibung des Deformationsproblems des EVZ als ebenes Elastizitätsproblem geben (vgl. Pkt. 3.1.5 und 3.2).

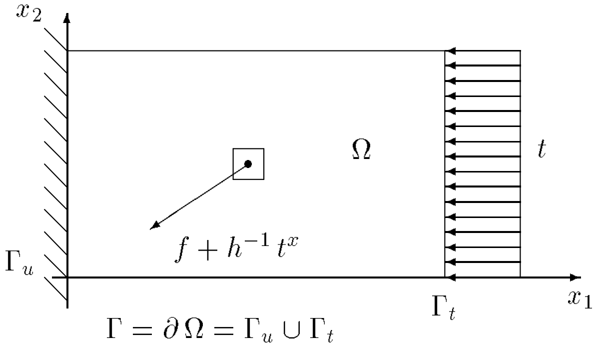
#### 3.1.4.3 Der ebene Spannungszustand (ESZ)

■ **Btr. Deformationsproblem für eine <u>Scheibe</u>**

$$\mathcal{K} = \{x = (x_1, x_2, x_3)^T \in I\!R^3 : x = (x_1, x_2) \in \Omega, \;\; -h < x_3 < h\}$$

mit $h \ll \operatorname{diam}\,\Omega$, $\Omega \subset I\!R^2$ – „echtes“ 2D-Gebiet:



unter Wirkung des $x_3$-unabhängigen Kräfteregimes:

$$
\left\{
\begin{array}{ll}
\bullet & f = f\,(x_1, x_2) \equiv (f_1\,(x_1, x_2), f_2\,(x_1, x_2), 0)^T, \quad x = (x_1, x_2) \in \Omega, \\
\bullet & t = t\,(x_1, x_2) \equiv (t_1\,(x_1, x_2), t_2\,(x_1, x_2), 0)^T, \quad x = (x_1, x_2) \in \Gamma_t, \\
\bullet & t\,(x_1, x_2, \pm h) = \mathbf{O} \quad \forall\, x = (x_1, x_2) \in \Omega.
\end{array}
\right.
\tag{3.38}
$$

Hieraus ergibt sich, daß die folgenden Annahmen des ESZ mechanisch sinnvoll sind:

$$
\left\{
\begin{array}{l}
\sigma_{ij}\,(x) = \sigma_{ij}\,(x_1, x_2), \quad i, j = 1, 2 \\
\sigma_{i3} = \sigma_{3i} \underset{„\approx“}{=} 0, \quad i = 1, 2, 3
\end{array}
\right\} \text{ d.h. ESZ.}
\tag{3.39}
$$

## Hookesches Gesetz (isotroper Fall) für den ESZ:

- Aus dem Hookeschen Gesetz (3.27) $\sigma_{ij} = \lambda\,\Theta\,\delta_{ij} + 2\,\mu\,\varepsilon_{ij}$ bzw. $(3.27)^{-1}$ und den Beziehungen (3.39) des ESZ folgt unmittelbar der Verzerrungszustand

$$
\left\{
\begin{array}{lll}
\varepsilon_{11} & = & \dfrac{1}{E}\,(\sigma_{11} - \nu\,\sigma_{22}), \quad \varepsilon_{22} = \dfrac{1}{E}\,(\sigma_{22} - \nu\,\sigma_{33}) \quad \text{(mms)} \\
\varepsilon_{12} & = & \dfrac{1}{2\,\mu}\,\sigma_{12} \overset{(3.30)}{=} \dfrac{1+\nu}{E}\,\sigma_{12} \\
\varepsilon_{13} & = & \varepsilon_{23} = 0 \quad (\approx 0 \text{ i. S. } O\,(h)) \\
\varepsilon_{33} & = & -\dfrac{\nu}{1-\nu}\,(\varepsilon_{11} + \varepsilon_{22}) = -\dfrac{\nu}{E}\,(\sigma_{11} + \sigma_{22}) \\
 & \uparrow & \\
\underline{\text{NR:}} & & 0 = \sigma_{33} = \lambda\,(\varepsilon_{11} + \varepsilon_{22} + \varepsilon_{33}) + 2\,\mu\,\varepsilon_{33} \\
 & & \varepsilon_{33} = -\dfrac{\lambda}{\lambda + 2\,\mu}\,(\varepsilon_{11} + \varepsilon_{22}) \overset{(3.30)}{=} -\dfrac{\nu}{1-\nu}\,(\varepsilon_{11} + \varepsilon_{22}) \\
 & & \quad = -\dfrac{\nu}{E}\,(\sigma_{11} + \sigma_{22}) \\
 & & \quad \uparrow \\
 & & \quad \varepsilon_{11} + \varepsilon_{22} = \dfrac{1}{E}\,(1-\nu)\,(\sigma_{11} + \sigma_{22})
\end{array}
\right.
\tag{3.40}
$$

und die $\sigma - \varepsilon$–Beziehungen ($\nu, E$–Notation)

$$\boxed{\begin{aligned} \sigma_{11} &= \frac{E}{1-\nu^2}\,(\varepsilon_{11} + \nu\,\varepsilon_{22}) \\ \sigma_{22} &= \frac{E}{1-\nu^2}\,(\varepsilon_{22} + \nu\,\varepsilon_{11}) \\ \sigma_{12} &= \frac{E}{1+\nu}\,\varepsilon_{12} \\ \sigma_{33} &= 0, \quad \sigma_{13} \equiv \sigma_{31} = \sigma_{23} \equiv \sigma_{32} \underset{O(h)}{\approx} 0 \end{aligned}} \tag{3.41}$$

- Matrixform: $\sigma = D\varepsilon$
  1. $\sigma = [\sigma_{11}, \sigma_{22}, \sigma_{12}, \sigma_{21}]^T, \quad \varepsilon = [\varepsilon_{11}, \varepsilon_{22}, \varepsilon_{12}, \varepsilon_{21}]^T$:
  $$D = \frac{E}{1-\nu^2}\begin{bmatrix} 1 & \nu & & \mathbf{O} \\ \nu & 1 & & \\ & & 1-\nu & 0 \\ \mathbf{O} & & 0 & 1-\nu \end{bmatrix},$$
  2. $\sigma = [\sigma_{11}, \sigma_{22}, \sigma_{12}]^T, \quad \tilde{\varepsilon} = [\varepsilon_{11}, \varepsilon_{22}, \gamma_{12}]^T$ mit $\gamma_{12} = 2\,\varepsilon_{12}$:
  $$D = \frac{E}{1-\nu^2}\begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{bmatrix}.$$
  3. Aus (3.38) – (3.41) folgt für die Verschiebungen
  $$\left\{ \begin{aligned} u_i\,(x) &= u_i\,(x_1, x_2), \quad i = 1, 2 \\ u_3\,(x) &= x_3\,\varepsilon_{33}\,(x_1, x_2). \end{aligned} \right. \tag{3.42}$$
  In den Verzerrungen $\varepsilon_{13}$ und $\varepsilon_{23}$ werden Terme der Ordnung $O\,(x_3)$ vernachlässigt.

■ **Aus dem Kräftegleichgewicht (3.4), den geometrischen Beziehungen (3.18) und den Beziehungen (3.38) – (3.42) des ESZ folgen die beschreibenden Gleichungen:**

- Kräftegleichgewicht: $-\sum\limits_{j=1}^{2} \sigma_{ji,j}\,(x) = f_i\,(x), \quad i = 1, 2, \quad x = (x_1, x_2) \in \Omega;$
- $\varepsilon - u$–Beziehungen: $\varepsilon_{ij}\,(x) = \frac{1}{2}\,(u_{i,j}\,(x) + u_{j,i}\,(x)), \quad x = (x_1, x_2) \in \Omega;$
- $\sigma - \varepsilon$–Beziehung: (3.41) $\quad \sigma_{ii} = \dfrac{E}{1-\nu^2}\,(\varepsilon_{ii} + \nu\,\varepsilon_{kk}), \quad k = 3 - i, \quad i = 1, 2$
  $$\sigma_{12} = \frac{E}{1+\nu}\,\varepsilon_{12}$$

- Rbd.: $u_i(x) = \bar{u}_i(x) \overset{\text{z.B.}}{\equiv} 0, \quad i = 1, 2, \quad x = (x_1, x_2) \in \Gamma_u,$

  $\sum\limits_{j=1}^{2} \sigma_{ji}(x)\, n_j(x) = t_i(x), \quad i = 1, 2, \quad x = (x_1, x_2) \in \Gamma_t.$

### 3.1.5 Die Laméschen Gleichungen und typische Randbedingungen

#### ■ Aus den Punkten

- 3.1.1 Spannungszustand (Kinetik)
- 3.1.2 Verzerrungszustand (Kinematik)
- 3.1.3 Stoffgesetz

ergeben sich die beschreibenden Gleichungen der linearen 3D Elastizitätstheorie:

1. Kräftegleichgewicht (equilibrium equations):

$$-\sigma_{ji,j}(x) = f_i(x), \quad i = \overline{1,3}, \quad x \in \Omega; \tag{3.43}$$

2. Verzerrungs-Verschiebungs–Beziehungen:

$$\varepsilon_{ij}(x) = \frac{1}{2}\left(u_{i,j}(x) + u_{j,i}(x)\right), \quad i, j = \overline{1,3}; \tag{3.44}$$

3. $\sigma - \varepsilon$–Beziehungen (HOOKesches Gesetz):

$$\begin{array}{lll} \text{a)} & \text{allgemein:} & \sigma_{ij}(x) = D_{ijkl}(x)\, \varepsilon_{kl}(x), \quad i, j = \overline{1,3} \\ \text{b)} & \text{isotrop:} & D_{ijkl} = \lambda\, \delta_{ij}\, \delta_{kl} + \mu\,(\delta_{ik}\, \delta_{jl} + \delta_{il}\, \delta_{jk}), \\ & & \sigma_{ij}(x) = \lambda(x)\, \varepsilon_{kk}(x)\, \delta_{ij} + 2\,\mu(x)\, \varepsilon_{ij}(x) \end{array} \tag{3.45}$$

4. Randbedingungen ($\downarrow$).

## Lamésche Gleichungen im isotropen, homogenen Fall:

- Substituieren (3.44) $\to$ (3.45)$_b$ $\to$ (3.43):

$$
\begin{aligned}
f_i(x) &= -\sigma_{ji,j}(x) \overset{\overset{\sigma_{ji}=\lambda\,\varepsilon_{kk}\,\delta_{ji}+2\,\mu\,\varepsilon_{ji}}{\downarrow}}{=} [7]-\lambda\,\varepsilon_{kk,i} - 2\,\mu\,\varepsilon_{ji,j} = \\
&= -\lambda\,\frac{\partial}{\partial x_i}\left[\frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \frac{\partial u_2}{\partial x_2} + \frac{\partial u_3}{\partial x_3}\right] - \mu\,\frac{\partial}{\partial x_j}\left[\frac{\partial u_j}{\partial x_i} + \frac{\partial u_i}{\partial x_j}\right] \\
&= -(\lambda+\mu)\,\frac{\partial}{\partial x_i}\left[\frac{\partial u_j}{\partial x_j}\right] - \mu\,\frac{\partial^2 u_i}{\partial x_j\,\partial x_j}, \quad \text{d.h.}
\end{aligned}
$$

(3.46)
$$
\boxed{
\begin{aligned}
-\mu\left[\frac{\partial^2 u_1}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u_1}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 u_1}{\partial x_3^2}\right] - (\lambda+\mu)\,\frac{\partial}{\partial x_1}\left[\frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \frac{\partial u_2}{\partial x_2} + \frac{\partial u_3}{\partial x_3}\right] &= f_1 \\
-\mu\left[\frac{\partial^2 u_2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u_2}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 u_2}{\partial x_3^2}\right] - (\lambda+\mu)\,\frac{\partial}{\partial x_2}\left[\frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \frac{\partial u_2}{\partial x_2} + \frac{\partial u_3}{\partial x_3}\right] &= f_2 \\
-\mu\left[\frac{\partial^2 u_3}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u_3}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 u_3}{\partial x_3^2}\right] - (\lambda+\mu)\,\frac{\partial}{\partial x_3}\left[\frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \frac{\partial u_2}{\partial x_2} + \frac{\partial u_3}{\partial x_3}\right] &= f_3
\end{aligned}
}
$$

- <u>Kompakte Formen:</u> Mit dem Vektorlaplace $\Delta = \begin{pmatrix} \triangle & & \\ & \triangle & \\ & & \triangle \end{pmatrix}$ erhalten wir:

(3.46) a) $-\mu\,\Delta\,u - (\lambda+\mu)\,\nabla\,\text{div}\ u = f\ \text{ in }\ \Omega$

b) $-2\,\mu\ \underset{\underset{i\text{-te Spalte}}{\begin{bmatrix}\varepsilon_{1i}\\ \varepsilon_{2i}\\ \varepsilon_{3i}\end{bmatrix}}}{\text{div}\ \varepsilon(u)} - \lambda\,\nabla\ \text{div}\ u = f\ \text{ in }\ \Omega$

## Typische Randbedingungen:

1. Reine Verschiebungsrandbedingungen (Dirichlet = 1. Art):

(3.47) $$u(x) = \bar u(x), \quad x \in \Gamma_u = \Gamma.$$

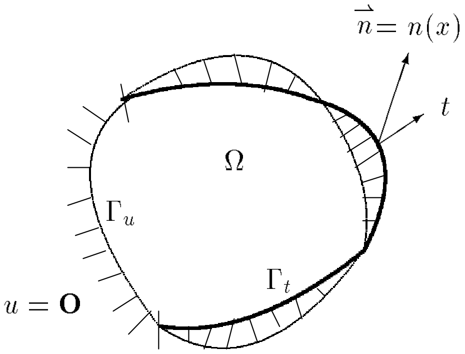
2. Reine Kräfterandbedingungen (Neumann = 2. Art):

(3.48) $$\sigma_{ji}(x)\,n_j(x) = t_i(x), \quad x \in \Gamma_t = \Gamma.$$

3. Kräfterandbedingung mit elastischem Widerstand (= 3. Art):

$$\sigma_{ji}(x)\, n_j(x) + b_{ij}(x)\, u_j(x) = t_i(x), \quad x \in \Gamma, \tag{3.49}$$

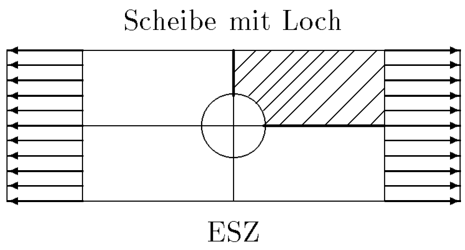
mit nichtnegativer $3 \times 3$–Matrix $B(x) = [b_{ij}(x)]_{i,j=\overline{1,3}}$.

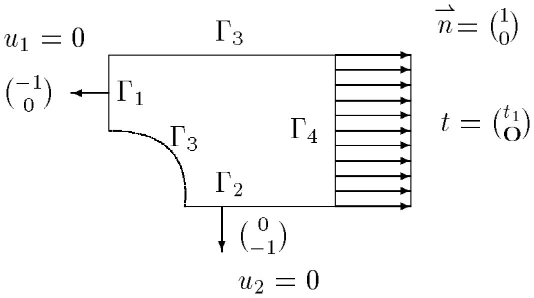



4. Gemischte Randbedingungen, z.B.
   (a) 4. Art: $\Gamma = \Gamma_u \cup \bar{\Gamma}_t$ mit meas $(\Gamma_u)$, meas $(\Gamma_t) > 0$:

$$\begin{cases} u(x) = \bar{u}(x), & x \in \Gamma_u \\ \sigma_{ji}(x)\, n_j(x) = t_i(x), \quad i = \overline{1,3}, & x \in \Gamma_t \end{cases} \tag{3.50}$$

   (b) Komponentenweise gemischte Rbd, z.B. durch Symmetrie:




$\Gamma_1 : u_1 = 0, \quad \sigma_{j2}\, n_j \equiv -\sigma_{12} = 0$

$\Gamma_2 : u_2 = 0, \quad \sigma_{j1}\, n_j = -\sigma_{21} = 0$

$\Gamma_3 : \sum_{j=1}^{2} \sigma_{ji}\, n_j = 0, \quad i = 1, 2$

$\Gamma_4 : \sigma_{j1}\, n_j \equiv \sigma_{11} = t_1, \quad \sigma_{j2}\, n_j \equiv \sigma_{12} = 0$

## 3.2 Variationsprobleme der linearen 3D Elastizitätstheorie

- **Btr. die klassische gemischte RWA** der linearen 3D Elastizitätstheorie mit homogenen (o. B. d. A. !) Verschiebungsrbd. auf $\Gamma_u$ (meas $\Gamma_u > 0$) und Kräfterbd. auf $\Gamma_t$ im isotropen Falle als Modellaufgabe:

(3.51)

1) Kräftegleichgewicht: $-\sigma_{ji,j}(x) = f_i(x), \quad i = \overline{1,3}, \quad x \in \Omega,$

2) $\varepsilon - u$–Beziehung: $\varepsilon_{ij} = \varepsilon_{ij}(u) \equiv 0.5\,(u_{i,j} + u_{j,i}), \quad i,j = \overline{1,3},$

3) $\sigma - \varepsilon$–Beziehung: $\sigma_{ij} = \lambda\,\Theta\,\delta_{ij} + 2\,\mu\,\varepsilon_{ij}; \quad i,j = \overline{1,3}, \quad \Theta = \varepsilon_{kk},$
bzw.
$\sigma_{ij} = D_{ijkl}\,\varepsilon_{kl}$
mit $D_{ijkl} = \lambda\,\delta_{ij}\,\delta_{kl} + \mu\,(\delta_{ik}\,\delta_{jl} + \delta_{il}\,\delta_{jk})$

4) Rbd.: $u(x) = \mathbf{O}, \quad x \in \Gamma_u,$
$\sigma_{ji}(x)\,n_j(x) = t_i(x), \quad i = \overline{1,3}, \quad x \in \Gamma_t.$

- **Bemerkungen:**
  - 1. RWA (Dirichlet): $\Gamma_u = \Gamma \quad (\uparrow)$
  - 2. RWA (Neumann): $\Gamma_t = \Gamma$ fordert gesonderte Betrachtung !
  - Alle anderen RWA, d.h. (3.49), $(3.50)_{b)}$ etc. können analog zu (3.51) untersucht werden !

Bemerkung: Die klassische Formulierung der Aufgabe (3.51) wurde in [22] Nu II, Pkt. 3.1.2.2 gegeben !

### 3.2.1 Die reine Verschiebungsmethode (= primale Variationsformulierung)

- **Herleitung der primalen Variationsformulierung:** (siehe auch Nu II, Pkt. 3.1.2.2 [22])

1. $V_0 = \left\{ v = (v_1, v_2, v_3)^T \in V = \left[W_2^1(\Omega)\right]^3 : v = \mathbf{O} \text{ auf } \Gamma_u \right\}$

2. $-\int\limits_\Omega \underset{\|}{\sigma_{ji,j}}\, v_i\, dx = \int\limits_\Omega f_i\, v_i\, dx \quad \forall\, v \in V_0$

3. $\int\limits_\Omega \sigma_{ji}\, v_{i,j}\, dx - \int\limits_\Gamma \sigma_{ji}\, n_j\, v_i\, ds = \int\limits_\Omega f_i\, v_i\, dx \quad \forall\, v \in V_0$

$\sigma_{ji}$
$\|$

NR: $\sigma_{ji}\, v_{i,j} = \frac{1}{2}\,(\sigma_{ji}\, v_{i,j} + \sigma_{ij}\, v_{j,i}) =$
$= \sigma_{ji} \cdot \frac{1}{2}\,(v_{i,j} + v_{j,i}) = \underset{\sigma_{ij}}{\underset{\|}{\sigma_{ji}(u)}}\; \underset{\varepsilon_{ij}}{\underset{\|}{\varepsilon_{ji}(v)}}$

$$\int_\Omega \sigma_{ij}(u)\,\varepsilon_{ij}(v)\,dx - \int_\Gamma \sigma_{ji}\,n_j \cdot v_i\,ds = \int_\Omega f_i\,v_i\,dx \quad \forall\, v \in V_0$$

4. $\int_\Gamma \sigma_{ji}\,n_j \cdot v_i\,ds = \int_{\Gamma_u} \sigma_{ji}\,n_j \cdot \underbrace{v_i}_{=0}\,ds + \int_{\Gamma_t} \underbrace{\sigma_{ji}\,n_j}_{t_i}\,v_i\,ds = \int_{\Gamma_t} t_i\,v_i\,ds$

5. $V_g = \{v \in V : v = \bar{u} \text{ auf } \Gamma_u\} = V_0$
$\uparrow$
o. B. d. A. $\bar{u}=0$
(sonst: $\bar{u}\in\left[H^{1/2}(\Gamma_u)\right]^3$)

- **Resultat:** Primale Variationsformulierung
(Prinzip der virtuellen Verschiebungen = ... Arbeit)

(3.52)

Ges. $u \in V_0 = \left\{v \in V = [H^1(\Omega)]^3 : v = 0 \text{ auf } \Gamma_u\right\}$ :

$a(u,v) = < F, v > \quad \forall\, v \in V_0,$

wobei

$$< F, v > \;:=\; \int_\Omega f_i\,v_i\,dx + \int_{\Gamma_u} t_i\,v_i\,ds \equiv \int_\Omega f^T\,v\,dx + \int_{\Gamma_u} t^T\,v\,ds$$

$$a(u,v) \;:=\; \int_\Omega \sigma_{ij}(u)\,\varepsilon_{ij}(v)\,dx \equiv \int_\Omega \sigma^T(u)\,\varepsilon(v)\,dx$$

$$\overset{\text{HOOKE}}{=} \int_\Omega D_{ijkl}\,\varepsilon_{kl}(u)\,\varepsilon_{ij}(v)\,dx \equiv \int_\Omega \varepsilon^T(u)\,\underset{\substack{\uparrow \\ \text{Matrix der elas-} \\ \text{tischen Konstanten}}}{D}\,\varepsilon(v)\,dx$$

$$\underset{(\downarrow)}{\overset{\text{isotrop}}{\underset{\text{NR}}{=}}} \int_\Omega \left\{\lambda \underbrace{\sum_{n=1}^{3} \varepsilon_{kk}(u)}_{\text{div } u} \underbrace{\sum_{i=1}^{3} \varepsilon_{ii}(v)}_{\text{div } v} + 2\,\mu \sum_{i,j=1}^{3} \varepsilon_{ij}(u)\,\varepsilon_{ij}(v)\right\} dx$$

$$= \int_\Omega \{\lambda \text{ div } u \text{ div } v + 2\,\mu\,\varepsilon^T(u)\,\varepsilon(v)\}\,dx$$

mit

- $f = (f_1, f_2, f_3)^T \in [L_2(\Omega)]^3, \quad t = (t_1, t_2, t_3)^T \in [L_2(\Gamma_t)]^3$ geg.,
- $D_{ijkl} \in L_\infty(\Omega) : 0 < \lambda_{\min}(D) \le \lambda(D(x)) \le \lambda_{\max}(D) \;\; \forall$ f.ü. $x \in \Omega$,
bzw. $\lambda, \mu \in L_\infty(\Omega) : 0 < \underline{\lambda} \le \lambda(x) \le \bar{\lambda}, \;\; 0 < \underline{\mu} \le \mu(x) \le \bar{\mu} \;\; \forall$ f.ü. $x \in \Omega$.

NR: $D_{ijkl}\,\varepsilon_{kl}(u)\,\varepsilon_{ij}(v) = \{\lambda\,\delta_{ij}\,\delta_{kl} + \mu\,(\delta_{ik}\,\delta_{jl} + \delta_{il}\,\delta_{jk})\}\,\varepsilon_{kl}(u)\,\varepsilon_{ij}(v) =$
$= \lambda\,\varepsilon_{kk}(u)\,\varepsilon_{ii}(v) + \mu\,(\varepsilon_{ij}(u)\,\varepsilon_{ij}(v) + \varepsilon_{ij}(u)\,\varepsilon_{ij}(v)) \qquad \#$

Bemerkung: Offenbar ist $a(\cdot,\cdot)$ symmetrisch !

- **Zugeordnetes Minimumproblem ($a(\cdot,\cdot)$ sym. und $a(v,v) \overset{!}{\geq} 0$):**

(3.53)
$$\boxed{\begin{array}{l} \text{Ges. } u \in V_0 : J(u) = \inf\limits_{v \in V_0} J(v), \\ \text{mit } J(v) = \underbrace{\frac{1}{2}\int\limits_\Omega \sigma_{ij}(v)\,\varepsilon_{ij}(v)\,dx}_{\substack{=\text{ Deformationsenergie}\\ \text{(innere Energie)}}} - \underbrace{\left(\int\limits_\Omega f_i\,v_i\,dx + \int\limits_{\Gamma_t} t_i\,v_i\,ds\right)}_{\substack{=\text{ potentielle Energie der}\\ \text{äußeren Kräfte}}} \end{array}}$$

- **Der Satz von Lax-Milgram (Satz I.2.9) liefert**

$\exists\,!\; u \in V_0$: (3.52) + Fixpunktiteration,

falls die berühmten Standardvoraussetzungen erfüllt sind, d.h.

1. $F \in V_0^*$ o.k. (mms)
2. $a(\cdot,\cdot) : V_0 \times V_0 \longrightarrow I\!R^1$ – Bilinearform:

2a) $V_0$-elliptisch: $a(v,v) \geq \mu_1 \|v\|_1^2 \quad \forall\, v \in V_0 \quad ?$

Zunächst erhalten wir nur

(3.54)
- $$\begin{aligned} a(v,v) &\geq \lambda_{\min}(D) \int\limits_\Omega |\varepsilon(v)|^2\,dx = \\ &= \lambda_{\min}(D) \underbrace{\int\limits_\Omega \varepsilon_{ij}(v)\,\varepsilon_{ij}(v)\,dx}\; \geq ? \end{aligned}$$

- bzw. im isotropen, homogenen Fall:

$(3.54)_{\text{iso}}$
$$a(v,v) \geq 2\mu \underbrace{\int\limits_\Omega \varepsilon_{ij}(v)\,\varepsilon_{ij}(v)\,dx}\; \geq \; ?$$

Zum weiteren Abschätzen von $\int\limits_\Omega \varepsilon_{ij}(v)\,\varepsilon_{ij}(v)\,dx$ benötigt man die sogenannte Kornsche Ungleichung ($\downarrow$) !

2b) $V_0$-beschränkt: $|a\,(u,v)| \leq \mu_2\,\|u\|_1\,\|v\|_1 \quad \forall\; u,v \in V_0$
o.k. (mms)

- $|a\,(u,v)| \leq \lambda_{\max}(D) \left(\int\limits_\Omega |\varepsilon\,(u)|^2\,dx\right)^{0.5} \left(\int\limits_\Omega |\varepsilon\,(v)|^2\,dx\right)^{0.5}$

$$\underline{\text{NR:}}\quad \begin{aligned} \int\limits_\Omega |\varepsilon\,(u)|^2\,dx &= \int\limits_\Omega u_{i,i}^2\,dx + 2\cdot\tfrac{1}{4}\int\limits_\Omega \underbrace{(u_{1,2}+u_{2,1})^2}_{2(u_{1,2}^2+u_{2,1}^2)}\,dx + \ldots \\ \| \qquad & \\ \int\limits_\Omega \varepsilon_{ij}\,(u)\,\varepsilon_{ij}\,(u) & \\ &\leq |u|_1^2 := \sum_{i=1}^3\sum_{j=1}^3 \int\limits_\Omega (u_{i,j})^2\,dx \leq \|u\|_1^2 \end{aligned}$$

$$(3.55) \qquad \Rightarrow\; |a\,(u,v)| \leq \lambda_{\max}(D)\,\|u\|_1\,\|v\|_1,\;\; \text{d.h. } \mu_2 = \lambda_{\max}(D)$$

- isotrop, homogen:

$$(3.55)_{\text{iso}} \qquad \begin{aligned} |a(u,v)| &\leq 3\lambda \left(\int\limits_\Omega \varepsilon_{kk}^2(u)\,dx\right)^{0.5} \left(\int\limits_\Omega \varepsilon_{kk}^2(u)\,dx\right)^{0.5} + \\ &\quad +2\mu \left(\int\limits_\Omega |\varepsilon(u)|^2\,dx\right)^{0.5} \left(\int\limits_\Omega |\varepsilon(v)|^2\,dx\right)^{0.5} \\ &\leq (3\,\lambda + 2\,\mu)\,\underset{|u|_1}{\|u\|_1}\;\underset{|v|_1}{\|v\|_1}\,,\;\; \text{d.h. } \mu_2 = 3\,\lambda + 2\,\mu \end{aligned}$$

## ■ Starrkörperverschiebungen (ker $\varepsilon\,(v)$):

- **Lemma 3.1:**

> Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^3 - \dagger$ Gebiet mit $\underline{\Gamma \in C^{0,1}}$, und $v \in [H^1\,(\Omega)]^3$.
> Dann gilt
> $\qquad \varepsilon\,(v) \equiv \mathbf{O} \iff v \in P := \{v\,(x) = a \times x + b : a, b \in \mathbb{R}^3\}$,
> wobei
> $$P = \text{span}\left\{ \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-x_2\\x_1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\-x_3\\x_2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-x_3\\0\\x_1\end{pmatrix} \right\} \subset [H^1\,(\Omega)]^3$$
> der Unterraum der Starrkörperverschiebungen ist.

- **<u>Beweisskizze:</u>**

  a) $v \in P \Longrightarrow \varepsilon_{ij}(v) = 0 \quad \forall\, i, j = \overline{1,3}$ (trivial) #

  b) $\varepsilon_{ij}(v) \equiv 0 \quad \forall\, i, j = \overline{1,3} \Longrightarrow v \in P$:

$$\varepsilon_{ij} \equiv 0 \ \forall\, i, j$$
$$\downarrow$$
$$v_{k,ij} = \underbrace{\varepsilon_{jk,i} + \varepsilon_{ik,j} - \varepsilon_{ij,k}}_{\frac{1}{2}(\cancel{v_{j,ki}} + \underbrace{v_{k,ji}} + \cancel{v_{i,kj}} + \underbrace{v_{k,ij}} - \cancel{v_{i,jk}} - \cancel{v_{j,ik}})} \equiv 0 \ \text{ in } \ H^{-1}(\Omega)$$

$$\forall\, i, j = \overline{1,3} \quad \forall\, k = \overline{1,3} \qquad (\text{bzw. } v \in C^\infty(\bar{\Omega}) + \overset{?}{\underline{\text{Abschließung}}}\ )$$

$$\Longrightarrow \ v(x) \ = \ Ax + b \quad (\text{linear !}) \text{ mit } A - (3 \times 3)\text{–Matrix.}$$
$$= [a_{ij}\, x_j + b_i]$$

$$\Longrightarrow \ \varepsilon(v) = 0 \quad \Rsh \quad \begin{array}{l} a_{kk} = 0 \ (\textstyle\cancel{\sum}) \ \text{ d.h. } A = -A^T = \begin{bmatrix} 0 & a_{12} & a_{13} \\ -a_{12} & 0 & a_{23} \\ -a_{13} & -a_{23} & 0 \end{bmatrix} \\ a_{kl} = -a_{lk} \end{array}$$

$$\text{gdw.} \quad v(x) = a \times x + b \in P.$$

**q.e.d.**

## ■ <u>Die KORNschen Ungleichungen:</u>

- <u>Für den Raum $V_0 = \left[\overset{\circ}{H}{}^1(\Omega)\right]^3$, d.h. 1. RWA:</u>

**<u>Lemma 3.2:</u>** (1. KORNsche Ungleichung: $\Rsh$ 1. RWA)

$$(3.56) \qquad \boxed{\begin{array}{ccccc} \int\limits_\Omega \varepsilon_{ij}(v)\, \varepsilon_{ij}(v)\, dx & \geq & \frac{1}{2} \int\limits_\Omega v_{i,j}\, v_{i,j}\, dx & \forall\, v \in V_0 = \left[\overset{\circ}{H}{}^1(\Omega)\right]^3 \\ \| & & \| \quad \| & \\ \|\, \varepsilon(v)\, \|_{0,\Omega}^2 & \geq & c_K^2\, |v|_{1,\Omega}^2 & \text{–"–} \end{array}}$$

**<u>Beweis:</u>**

Es genügt offenbar, (3.56) für glatte Vektorfelder $v \in [\overset{\bullet}{C}{}^\infty(\Omega)]^3$ zu beweisen (Abschliessungsprinzip !). Für $v \in [\overset{\bullet}{C}{}^\infty(\Omega)]^3$ gilt offenbar die Identität

$$(*) \qquad \varepsilon_{ij,j}(v) \ = \ \frac{1}{2}(v_{i,j} + v_{j,i})_{,j} =$$
$$= \ \frac{1}{2}(v_{i,jj} + \underset{v_{j,ji}}{\overset{\|}{v_{j,ij}}}) = \frac{1}{2}(\Delta\, v_i + (\text{div }(v))_{,i}).$$

Durch partielle Integration und unter Verwendung der Identität $(*)$ erhalten wir

$$\int_\Omega \varepsilon_{ij}(v)\,\varepsilon_{ij}(v)\,dx = \frac{1}{2}\int_\Omega \varepsilon_{ij}(v)\,(v_{i,j} + \underbrace{v_{j,i}}_{})\,dx = $$

$$\overset{\varepsilon_{ji}(v)}{\|}$$

$$= \int_\Omega \varepsilon_{ij}(v)\,v_{i,j}\,dx \overset{\text{partielle Integr.}}{=} -\int_\Omega \varepsilon_{ij,j}(v)\cdot v_i\,dx + \overset{v|_\Gamma=0}{0} =$$

$$\overset{(*)}{=} -\frac{1}{2}\int_\Omega [\underset{}{\overset{v_{i,jj}}{\Delta v_i}} + (\text{div }(v))_{,i}]\,v_i\,dx =$$

$$\underset{\text{part. Int.}}{\overset{v|_\Gamma=0}{=}} \frac{1}{2}\int_\Omega [v_{i,j}\,v_{i,j} + (\text{div }(v))^2]\,dx \geq \frac{1}{2}\int_\Omega v_{i,j}\,v_{i,j}\,dx$$

**q.e.d.**

- Für den Raum $V = [H^1(\Omega)]^3$:

**Lemma 3.3:** (KORNsche Ungleichung)

> Es sei $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ beschränktes Gebiet mit $\Gamma = \partial\,\Omega \in C^{0,1}$.
> Dann existiert eine Konstante $c_k = c_k(\Omega) = \text{const.} > 0$:
>
> (3.57) $$\int_\Omega \varepsilon_{ij}(v)\,\varepsilon_{ij}(v)\,dx + \|v\|_0^2 \geq c_K^2\,\|v\|_1^2 \quad \forall\, v \in V = \left[H^1(\Omega)\right]^d.$$

**Beweis:** (= relativ kompliziert !)

$\longrightarrow$ siehe Literatur:

[10] Duvaut G., Lions J.-L.:
Les Inéquations en Mécanique et en Physique.
Dunod, Paris 1972.

[25] Nitsche J. A.: On Korn's Second Inequality.
RAIRO Anal. Numér., 1981, v. 15, 237 – 248.

#

Bemerkung: Die Ungleichung (3.57) bedeutet Normäquivalenz:

$$c_K\,\|v\|_1 \leq |||v||| := \left(\|\varepsilon(v)\|_0^2 + \|v\|_0^2\right)^{0.5} \leq \|v\|_1, \quad \forall\, v \in V.$$

- Für den Raum $V_0 = \{v \in V = [H^1(\Omega)]^3 : v = \mathbf{O} \text{ auf } \Gamma_u\}$, d.h. kl. gem. RWA:

**Lemma 3.4:** (2. KORNsche Ungleichung: $\curvearrowright$ gem. RWA)

(3.58)

Vor.: 1. $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ – ‡ Gebiet mit $\Gamma = \partial\,\Omega \in C^{0,1}$,

2. $\Gamma_u \subset \Gamma$: $\text{meas}_2\,(\Gamma_u) > 0$.

Bh.: $\exists$ positive Konstante $c_{K,2} = c\,(\Omega, \Gamma_u) = \text{const.} > 0$:

$$\int\limits_\Omega \varepsilon_{ij}\,(v)\,\varepsilon_{ij}\,(v)\,dx \geq c^2_{K,2}\,\|v\|^2_{1,\Omega} \qquad \forall\, v \in V_0$$

$$(|v|^2_{1,\Omega})$$

mit $V_0 = \left\{v \in V = \left[H^1(\Omega)\right]^3 : v = 0 \text{ auf } \Gamma_u\right\}$.

**Beweis:** (indirekt)

- Angenommen, die Ungleichung (3.58) sei falsch, d.h. $\exists\,\{v_n\} \subset V_0$:

$$\|\varepsilon\,(v_n)\|^2_0 := \int\limits_\Omega \varepsilon_{ij}\,(v_n)\,\varepsilon_{ij}\,(v_n)\,dx \leq \frac{1}{n} \quad \text{und} \quad \begin{array}{c}\boxed{\|v_n\|_1 = 1}\\ |v_n|_1 = 1.\end{array} \tag{3.59}$$

Die Friedrichs–Ungleichung $\|v\|_1 \leq \bar{c}_F\,|v|_1 \quad \forall\, v \in V_0$ (siehe Nu I [21]) liefert sofort $\|v_n\|_1 \;\leq\; \bar{c}_F \quad \forall\, n$.

- $H^1(\Omega) \hookrightarrow L_2(\Omega)$ – kompakt eingebettet ($\to$ Nu I, Kap. 4 [21])
$\Rightarrow \exists$ konvergente Teilfolge $\{v_{n'}\} \subset \{v_n\}$ in $[L_2(\Omega)]^3$ !
Aus Lemma 3.3 folgt $(n' \longmapsto n)$

$$\begin{aligned} c^2_K\,\|v_n - v_m\|^2_1 &\leq \|\varepsilon\,(v_n - v_m)\|^2_0 + \|v_n - v_m\|^2_0 \leq \\ &\leq 2\,\|\varepsilon\,(v_n)\|^2_0 + 2\,\|\varepsilon\,(v_m)\|^2_0 + \|v_n - v_m\|^2_0 \leq \\ &\leq \tfrac{2}{n} + \tfrac{2}{m} + \|v_n - v_m\|^2_0 \underset{n,m\to\infty}{\longrightarrow} 0 \end{aligned}$$

Resultat: $\{v_n\}$ $L_2$-konvergent $\curvearrowright$ $\{v_n\}$ Cauchy-Folge in $H^1$
$\curvearrowright$ $\exists\, u_0 \in V_0 : v_n \to u_0$ in $H^1$

$$\Longrightarrow \quad \text{a)} \quad \|\varepsilon\,(u_0)\|_0 = \lim_{n\,\to\,\infty} \|\varepsilon\,(v_n)\|_0 \overset{(3.59)}{=} 0$$

$$\text{b)} \quad \underset{\|\cdot\|_1}{|\,u_0\,|_1} = \lim_{n\,\to\,\infty} \underset{\|\cdot\|_1}{|\,v_n\,|_1} = 1$$

$$\text{a)} \Longleftrightarrow \varepsilon\,(u_0) = 0 \underset{\text{Lemma 3.1}}{\Longleftrightarrow} u_0 = a \times x + b \in P \underset{u_0|_{\Gamma_u} = 0}{\Longrightarrow} u_0 = 0 \quad \lightning \quad \text{b)}$$

**q.e.d.**

**Folgerung 3.5:** ($V_0$–Elliptizität)

Unter den Voraussetzungen von Lemma 3.4 und den in (3.52) formulierten Voraussetzungen über die elastischen Konstanten ist die Bilinearform $a\,(u,v) := \int\limits_\Omega \sigma^T\,(u)\,\varepsilon\,(v)\,dx$ $V_0$-elliptisch, d.h. es gilt die Ungleichung

(3.60) $$a\,(v,v) \geq \mu_1\,\|v\|_1^2 \quad \forall\, v \in V_0 = \left\{v \in \left[H^1(\Omega)\right]^3 : v = 0 \text{ auf } \Gamma_u\right\},$$

mit $\mu_1 = \left\{\begin{array}{c}\lambda_{\min}(D)\\ 2\,\mu\end{array}\right\} c_{K,2}^2 \quad \begin{array}{l}\text{allgemein}\\ \text{isotrop}\end{array},$

wobei $c_{K,2}^2 = 0.5\,\bar{c}_F^{-2}$, $\|v\|_1 \leq \bar{c}_F\,|v|_1 \quad \forall\, v \in \left[\overset{\circ}{H}(\Omega)\right]^3$.

**Beweis:** folgt unmittelbar aus (3.54) und Lemma 3.2 – 3.4. **q.e.d.**

**Damit sind alle Voraussetzungen des Satzes von LAX–MILGRAM (Satz I.2.9) erfüllt:**

**Satz 3.6:**

Vor.:
1. $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ – ‡ Gebiet mit $\Gamma \in C^{0,1}$;
2. $\Gamma_u \subset \Gamma$: $\text{meas}_2\,(\Gamma_u) > 0$;
3. $f \in [L_2(\Omega)]^3$, $t \in [L_2(\Gamma_t)]^3$;
4. $D_{ijkl} \in L_\infty(\Omega) : 0 < \lambda_{\min}(D) \leq \lambda\,(D\,(x)) \leq \lambda_{\max}(D), \;\; \forall$ f.ü. $x \in \Omega$
   bzw. $\lambda, \mu \in L_\infty(\Omega) : 0 < \underline{\lambda} \leq \lambda\,(x) \leq \bar{\lambda}, \;\; 0 < \underline{\mu} \leq \mu\,(x) \leq \bar{\mu}, \;\; \forall$ f.ü. $x \in \Omega$.

Bh.:
1. $\exists\,!\; u \in V_0 : a\,(u,v) = \,<F,v> \quad \forall\, v \in V_0$;
2. Die Lösung $u \in V_0$ kann durch die Fixpunktiteration

   (3.61) $$(u_{n+1},v)_1 = (u_n,v)_1 + \tau\,(<F,v> - a\,(u_n,v)) \quad \forall\, v \in V_0$$

   bestimmt werden, und es gelten die Fehlerabschätzungen aus Satz I.2.9.

**Ü 3.3** Man zeige, daß die zweite RWA ($\Gamma_t = \Gamma$) genau dann lösbar ist, wenn

$$<F,v> = 0 \quad \forall\, v \in P.$$

Falls diese Lösbarkeitsbedingung gilt, dann ist die Lösung bis auf Starrkörperverschiebungen eindeutig bestimmt.

Hinweis: Fredholmsche Alternative (Nu I [21]) !

## ■ FEM für lineares Elastizitätsproblem (3.52):

- Die FEM–Diskretisierung von (3.52)

(3.62) $$\begin{array}{lllll} \text{Ges.} & u_h \in V_{0h} \subset V_0 & : & a(u_h, v_h) = \; < F, v_h > & \forall\, v_h \in V_{0h} \\ & \updownarrow & & & \\ \text{Ges.} & \underline{u}_h \in I\!R^{N_h} & : & K_h\, \underline{u}_h = \underline{f}_h & \end{array}$$

läßt sich genauso behandeln wie in Numerik II [22], da die Standardvoraussetzungen erfüllt sind.
Insbesondere gelten:

- Cea–Satz (Satz I.4.3):

$$\|u - u_h\|_1 \le \boxed{\frac{\mu_2}{\mu_1}} \inf_{v_h \in V_{0h}} \|u - v_h\|_1$$

- Konvergenzsätze:
  - Satz II.4.7 : $H^1$–Konvergenz,
  - Satz II.4.9 : $L_2$–Konvergenz,
  - Satz II.4.12 : $L_\infty$–Konvergenz.
- Spektralsatz (Satz II.4.4):

$$K_h = K_h^T \text{ p.d.} : \quad \begin{array}{l} \lambda_{\min}(K_h) = O\,(h^d), \\ \lambda_{\max}(K_h) = O\,(h^{d-2}), \\ \kappa\,(K_h) \lesssim \boxed{\frac{\mu_2}{\mu_1}} \cdot \text{ const. } \cdot h^{-2}. \end{array}$$

! Der Faktor $\boxed{\frac{\mu_2}{\mu_1}}$ beeinflußt sowohl die Qualität der FE–Näherung $u_h$ (insbesonders „optisch" bei gröberen Netzen !) als auch die Konditionszahl der Steifigkeitsmatrix $K_h$.

- Problem: = Schlechte Konditionierung der Ausgangsaufgabe (siehe [21]) in Verbindung mit standarder FE–Approximation führt zu qualitativ schlechten FE–Lösungen (Locking (= Blockierungs-)Effekt).

d.h. bei gewissen Konstellationen der Ausgangsdaten $(\Omega, \Gamma_u, \Gamma_t; \lambda, \mu; f, t)$ liefert die standarde FE–Rechnung wesentlich kleinere Verschiebungen als erwartet, insbesondere für grobe Netze:

⤷ FE–Modell $K_h\, \underline{u}_h = \underline{f}_h$ ist zu steif !?

„ $\Longleftrightarrow$ " Kondition $\underset{<Au,v>:=a\,(u,v)}{\underset{\uparrow}{(A)}} := \|A\|_{[V_0 \to V_0^*]} \|A^{-1}\|_{[V_0^* \to V_0]}$

$$„=\text{"} \quad \boxed{\frac{\mu_2}{\mu_1}} \gg 1,$$

$\nearrow$ $\searrow$

Vor.: $\mu_1, \mu_2$ – scharf

1) Cea (↑)
2) Konvergenz
3) $\kappa\,(K_h)$

d.h. die Ausgangsaufgabe ist schlecht konditioniert !

- Beispiele für schlechte Konditionierung und Locking:
  1. Fast inkompressible Materialien, d.h.

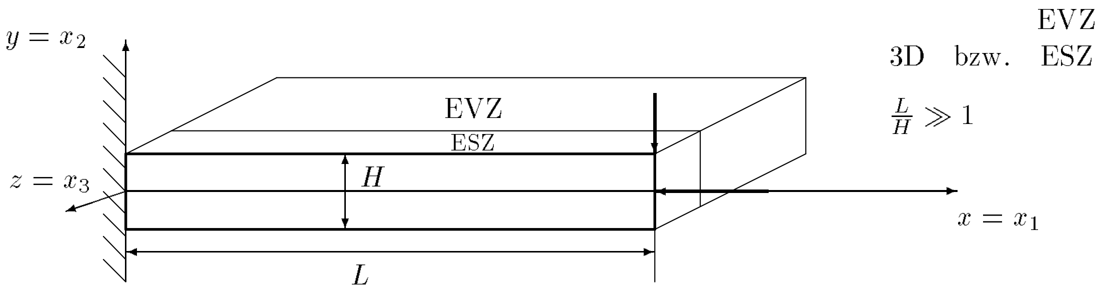
     $$\nu \nearrow 0.5 \ \curvearrowright \ \lambda = \frac{E\,\nu}{(1+\nu)\,(1-2\,\nu)} \nearrow \infty .$$

     Im isotropen, homogenen Fall gilt (siehe [4], S. 252):

     $$\mu_1 \lesssim \mu, \quad \mu_2 \gtrsim \lambda + \mu \quad \curvearrowright \ \boxed{\mu_2/\mu_1} \gtrsim \frac{\lambda+\mu}{\mu} = \frac{1}{1-2\,\nu} \underset{\nu\to 0.5}{\longrightarrow} \infty$$

     $\Longrightarrow$ Material–Locking $\curvearrowright$ siehe Pkt. 3.2.4 !

  2. Langer Kragarm:




$$v = \begin{bmatrix} 2xy \\ -x^2 \\ 0 \end{bmatrix}, \ \varepsilon(v) = \begin{bmatrix} 2y & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\Longrightarrow c_K^{-1} = \sup_{v \in V_0} \frac{\|v\|_1^2}{\|\varepsilon(v)\|_0^2} \geq O\left(\frac{L}{H}\right) \gg 1$$

$\Longrightarrow$ Geometrie–Locking $\curvearrowright$ Strukturmechanische Modelle
(Scherlocking) $\rightarrow$ siehe Kap. 4 !

- Literatur: Braess [5] (2. Auflage), S. 267 ff.

### 3.2.2 Die gemischte Methode nach Hellinger und Reisner

- **Idee:**

(3.63)

$$\boxed{\begin{array}{l} \text{Ges. } \underline{\text{Verschiebungen}}\ u \text{ und die } \underline{\underline{\text{Spannungen}}}\ \sigma\text{:} \\ \sigma - D\,\varepsilon\,(u) = 0 \\ \text{div } \sigma = -f \\ + \text{ RB: } u = \bar{u} \equiv \mathbf{O} \text{ auf } \Gamma_u \text{ und } \sigma \cdot \vec{n} := [\sigma_{ji}\, n_j] = t \text{ auf } \Gamma_t. \end{array}}$$

Bemerkung: Analogie zum Dirichlet–Problem für Poisson–Gl. (Nu II, Pkt. 3.2.2.3 [22]):

$$\boxed{\begin{array}{rl} -\Delta\, u = & f \text{ in } \Omega \\ u = & 0 \text{ auf } \Gamma \end{array}} \longrightarrow \boxed{\begin{array}{ll} \sigma - \nabla\, u & = 0 \text{ in } \Omega \\ \text{div } \sigma & = -f \text{ in } \Omega \\ + \text{ RB: } u & = 0 \text{ auf } \Gamma_u = \Gamma \end{array}}$$

- **Gemischte Formulierung in $L_2(\Omega) \times H_0^1(\Omega)$:**

  - Idee: 1.) Schwache Formulierung von $D^{-1}\sigma - \varepsilon\,(u) = 0$
    2.) Schwache Formulierung von div $\sigma = -f$
    \+ partielle Integration

  - Sei $X = \{\sigma = [\sigma_{ij}] : \sigma_{ij} = \sigma_{ji} \in L_2(\Omega)\} = L_2(\Omega)$,
    $M = V_0 = \{v = [v_i] : v_i \in H^1(\Omega),\ \ v = \mathbf{O} \text{ auf } \Gamma_u\} = H_0^1(\Omega)$

  Dann erhält man aus (3.63) direkt (1.) + 2.)) die gem. Formulierung:

(3.64)
$$\left\{ \begin{array}{lll} (D^{-1}\sigma, \tau)_0 - (\varepsilon\,(u), \tau)_0 & = 0 & \forall\ \tau \in L_2(\Omega) \\ -(\sigma, \varepsilon\,(v))_0 & = -(f, v)_0 - \int\limits_{\Gamma_t} t^T\, v\, ds & \forall\ v \in H_0^1(\Omega) \end{array} \right.$$

  - Offenbar gilt:

$$\left. \begin{array}{l} (3.52) \Longrightarrow (3.64) \\ (3.64) \Longrightarrow (3.52) \end{array} \right\} \curvearrowright \quad \underset{\substack{\exists\,! \\ \text{Satz } 3.6}}{(3.52)} \ \widehat{=}\ (3.64)\ !$$

- (3.64) kann als abstraktes gem. VP (2.2) geschrieben werden:

(3.64)

$$\boxed{\begin{array}{l} \text{Ges. } (\sigma, u) \in X \times M: \\ a\,(\sigma,\tau) + b\,(\tau,u) \;=\; <F,\tau> \quad \forall\, \tau \in X \\ b\,(\sigma,v) \qquad\qquad\;\; = \; <G,v> \quad \forall\, v \in M \\ \text{mit} \\ X = \{\sigma = [\sigma_{ij}] : \sigma_{ij} \in L_2(\Omega) : \sigma_{ij} = \sigma_{ji}\} = L_2(\Omega), \\ M = [V_0] = \{v = [v_i] : v_i \in H^1(\Omega),\ v = \mathbf{O} \text{ auf } \Gamma_u\} = H_0^1(\Omega), \\ a\,(\sigma,\tau) \quad = \; (D^{-1}\sigma,\tau)_0 \\ b\,(\tau,u) \quad = \; -\,(\varepsilon\,(u),\tau)_0 \\ <F,\tau> \; = \; 0, \text{ d.h. } F = \mathbf{O} \in X^* \text{ geg.} \\ <G,v> \; = \; -\int\limits_{\Omega} f^T\, v\, dx - \int\limits_{\Gamma_t} t^T\, v\, ds, \text{ d.h. } G \in M^* \text{ geg.} \end{array}}$$

- Der **<u>Satz 2.3 von Brezzi</u>** liefert <u>Existenz-</u>, <u>Eindeutigkeit</u> und <u>A-priori–Abschätzungen</u>, falls die <u>Standardvoraussetzungen</u> erfüllt sind:

1) $F \in X^*$, $G \in M^*$ (mms) o.k.
2) $a\,(\cdot,\cdot)$, $b\,(\cdot,\cdot)$ ⤈ (mms) o.k.
3) LBB-Bedingung (?): $\longrightarrow$ Lemma 3.7 o.k.
4) $\underset{\substack{\uparrow \\ \text{Doppelbez. !!}}}{V_0} \equiv \ker B \equiv \ker b\,(\cdot,\cdot)$ – Elliptizität o.k.

<u>trivial</u>, da $a\,(\cdot,\cdot)$ sogar $X$-elliptisch ist !

$$a\,(\sigma,\sigma) = (D^{-1}\sigma,\sigma) \geq \underbrace{\lambda_{\min}(D^{-1})}_{=\,\alpha_1} \|\sigma\|_0^2 = \alpha_1\,\|\sigma\|_X^2 \quad \forall\, \sigma \in M.$$

Damit gelten alle Aussagen von Satz 2.3 !

- **Lemma 3.7:** (LBB-Bedingung)

(3.65)

| | |
|---|---|
| Vor.: | Es gelten die Voraussetzungen von Lemma 3.4 (2. KORNsche Ungleichung). |
| Bh.: | Dann gilt die LBB-Bedingung $$\sup_{\tau \in X} \frac{b(\tau, v)}{\|\tau\|_X} \equiv \sup_{\tau \in L_2(\Omega)} \frac{(\tau, \varepsilon(v))_0}{\|\tau\|_0} \geq \beta_1 \|v\|_1$$ $\forall\, v \in M = H_0^1(\Omega)$ mit $\beta_1 = c_{K,2}$ (Lemma 3.4). |

**Beweis:**

$$\sup_{\tau \in L_2(\Omega)} \frac{(\tau, \varepsilon(v))}{\|\tau\|_0} \underset{\substack{\uparrow \\ \tau = \varepsilon(v) \in L_2(\Omega) \text{ für } v \in H_0^1(\Omega)}}{\geq} \frac{\|\varepsilon(v)\|_0^2}{\|\varepsilon(v)\|_0} = \|\varepsilon(v)\|_0 \overset{\substack{\text{Lemma 3.4, (3.58)} \\ \downarrow}}{\geq} c_{K,2} \|v\|_1, \quad \forall\, v \in M.$$

**q.e.d.**

- Gemischte FE–Approximation:

Die Resultate des Satzes 2.4 (Diskreter Satz von Brezzi) und des Satzes 2.5 (Konvergenzsatz) gelten für eine gemischte FE–Approximation

$$X_h = \text{span}\,\{p^{(i)} : i \in \omega_{X_h}\} \subset X, \quad M_h = \text{span}\,\{q^{(j)} : j \in \omega_{M_h}\},$$

falls die diskrete LBB-Bedingung gilt ($V_{0h} = X_h$ – Elliptizität ist wegen $X_h \subset X$ trivial !):

$$\sup_{\tau_h \in X_h} \frac{(\tau_h, \varepsilon(v_h))_0}{\|\tau_h\|_0} \underset{\substack{\uparrow \\ \boxed{\varepsilon(M_h) \subset X_h}}}{\geq} \frac{\|\varepsilon(v_h)\|_0^2}{\|\varepsilon(v_h)\|_0} = \|\varepsilon(v_h)\|_0 \geq \underbrace{c_{K,2}}_{= \tilde{\beta}_1 = \beta_1} \|v_h\|_1 \quad \forall\, v_h \in M_h \tag{3.66}$$

- $\boxed{\textbf{Ü 3.4}}$

| |
|---|
| Interpretieren Sie die Bedingung (vgl. primale VF (3.52)) $\varepsilon(M_h) := \{[\varepsilon_{ij}(v_h)] : v_h \in M_h\} \subset X_h$ ! |

## ■ Gemischte Formulierung in $H(\text{div},\Omega) \times L_2(\Omega)$:

- Idee: 1.) Schwache Formulierung von $D^{-1}\sigma - \varepsilon(u) = 0$ + partielle Integration.

  2.) Schwache Formulierung von $\text{div}\ \sigma = -f$.

- Definieren zunächst folgende Räume (bzw. lineare Mannigfaltigkeit):

$$X = H(\text{div},\Omega) := \{\sigma = [\sigma_{ij}] : \sigma_{ij} = \sigma_{ji} \in L_2(\Omega),\ \text{div}\ \sigma \underset{\text{Nu I [21]}}{\overset{\uparrow}{\in}} (L_2(\Omega))^3\} \underset{\partial\Omega \in C^{0,1}}{=} \overline{\{\sigma = [\sigma_{ij}] : \sigma_{ij} = \sigma_{ji} \in C^\infty(\Omega)\}}^{\|\cdot\|_{H(\text{div},\Omega)}},$$

wobei

$$\|\tau\|^2_{H(\text{div},\Omega)} = \|\tau\|_0^2 + \|\text{div}\ \tau\|_0^2, \tag{3.67}$$

$$X_0 = \{\sigma \in X = H(\text{div},\Omega) : \sigma\cdot \vec{n} = 0 \text{ auf } \Gamma_t\ (\downarrow)\} \subset X,$$

$$X_t = \{\sigma \in X : \sigma\cdot \vec{n} = t \text{ auf } \Gamma_t\ (\downarrow)\} \subset X,$$

$$M = L_2(\Omega) = (L_2(\Omega))^3 = \{v = [v_i] : v_i \in L_2(\Omega)\}.$$

- Bemerkung: Für $\sigma \in H(\text{div},\Omega)$ ist die Spur $\sigma \cdot n|_\Gamma$ korrekt als $H^{-1/2}$–Funktion definiert, und es gilt:

$$\|\sigma \cdot n\|_{H^{-1/2}(\Gamma)} \le c\,\|\sigma\|_{H(\text{div},\Omega)} \quad \forall\, \sigma \in H(\text{div},\Omega).$$

  Der Einbettungsoperator

$$\gamma_h : \sigma \in H(\text{div},\Omega) \longmapsto H^{-1/2}(\Gamma)$$

  ist linear, stetig und surjektiv (siehe [7]) !

- Dann erhält man aus (3.63) durch Anwendung der Ideen 1.) und 2.) die gemischte Formulierung:

$$\left\{\begin{array}{l} 0 = (D^{-1}\underset{}{\overset{X_i}{\overset{\cup}{\sigma}}}, \tau)_0 - (\varepsilon(u), \tau)_0 = \\ \quad = (D^{-1}\sigma, \tau)_0 + (\text{div}\ \tau, u)_0 - \int\limits_\Gamma \tau \cdot n \cdot u\, ds = \\ \quad = (D^{-1}\sigma, \tau)_0 + (\text{div}\ \tau, u)_0 - \int\limits_{\Gamma_t} \underbrace{\tau \cdot n}_{=0} \cdot u\, ds - \int\limits_{\Gamma_u} \underbrace{\tau \cdot n}_{\neq 0} \cdot \underset{\bar{u}=\mathbf{O}}{\underset{\|}{u}}\, ds \\ \forall\, \tau \in X_0 \qquad \underline{\text{hier:}} \quad \text{wesentlich !} \quad \text{natürlich !} \\ (\text{div}\ \sigma, v)_0 = -(f, v)_0 \quad \forall\, v \in M \end{array}\right. \tag{3.68}$$

- Bemerkungen:
  1. Die RB $u = \bar{u}$ auf $\Gamma_u$ wird zur natürlichen RB, d.h. aus
     $(D^{-1}\sigma, \tau) + (\operatorname{div} \tau, u)_0 = \int\limits_{\Gamma_u} \tau \cdot n \cdot \bar{u}\, ds \quad \forall\, \tau \in X_0$ folgt i. F. $u \in [H^1(\Omega)]^3$:
     (a) $D^{-1}\sigma - \varepsilon\,(u) = 0$ in $L_2(\Omega)$
     (b) $u = \bar{u}$ auf $\Gamma_u$ (i. S. $H^{1/2}(\Gamma_u)$)
  2. Die RB $\sigma \cdot \vec{n} = t$ ist hier wesentliche RB, d.h. es wird $\sigma \in X_t$ explizit gefordert.
  3. Zum Zwecke theoretischer Untersuchungen homogenisieren wir die „wesentliche“ RB $\sigma\ \vec{n} = t$ mit dem Ansatz

$$\sigma = \sigma_0 + \sigma_t \in H\,(\Omega, \operatorname{div})$$

$$\swarrow \qquad \searrow$$

$$\sigma_0 \cdot n = \mathbf{O} \qquad\qquad \sigma_t \cdot \vec{n} = t \text{ auf } \Gamma_t$$

$$(3.68)_{\text{hom.}} \begin{cases} (D^{-1}\sigma_0, \tau)_0 + (\operatorname{div} \tau, u)_0 = -(D^{-1}\sigma_t, \tau)_0 + \int\limits_{\Gamma_u} (\tau\, n)\, \bar{u}\, ds =: < F, \tau > \\ \forall\, \tau \in X_0 \\ (\operatorname{div} \sigma_0, v) = -(f, v)_0 - (\operatorname{div} \sigma_t, v) = < G, \tau > \quad \forall\, v \in M \end{cases}$$

- Damit kann $(3.68)_{\text{hom.}}$ als abstraktes gemischtes VP (2.2) geschrieben werden ($\sigma_0 \to \sigma$):

(3.68)

$$\boxed{\begin{array}{l} \text{Ges. } (\sigma, u) \in X_0 \times M \\ a\,(\sigma, \tau) + b\,(\tau, u) \;=\; < F, \tau > \quad \forall\, \tau \in X_0 \\ b\,(\sigma, v) \qquad\qquad\;\; = \; < G, v > \quad \forall\, v \in M \\ \text{mit} \\ X_0 = \{\sigma \in H\,(\operatorname{div}, \Omega) : \sigma \cdot \vec{n} = \mathbf{O} \text{ auf } \Gamma_t\} \\ M = L_2(\Omega) = (L_2(\Omega))^3, \qquad\qquad \boxed{\begin{array}{l} \bar{u} = \mathbf{O} \\ t = \mathbf{O} \end{array}} \\ a\,(\sigma, \tau) \quad := (D^{-1}\sigma, \tau)_0, \\ b\,(\tau, u) \quad := (\operatorname{div} \tau, u)_0, \qquad\qquad\qquad \downarrow \\ < F, \tau > \;:= -(D^{-1}\sigma_t, \tau)_0 + \int\limits_{\Gamma_u} (\tau \cdot n)\, \bar{u}\, ds \;=\; 0 \\ < G, v > \;:= -(f, v)_0 - (\operatorname{div} \sigma_t, v) \end{array}}$$

- Standardvoraussetzungen (2.3):
  1. $F \in X_0^*$, $G \in M^*$ (mms)
  2. $a\,(\cdot,\cdot)$, $b\,(\cdot,\cdot)$ ‡ (mms)
  3. LBB-Bedingung (?): $\longrightarrow$ Lemma 3.8.

4. $V_0 = \ker B := \{\tau \in X_0 : (\mathrm{div}\,\tau, v)_0 = 0 \ \ \forall\, v \in M\}$ – elliptisch:

   Sei $\tau \in V_0 \ \curvearrowright\ \mathrm{div}\,\tau = \mathbf{O}$ in $(L_2(\Omega))^3$. Folglich gilt:

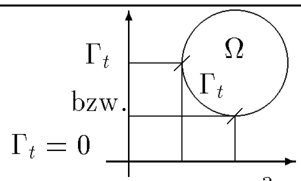
$$
\begin{aligned}
a(\tau,\tau) = (D^{-1}\tau,\tau) \ &\geq\ \lambda_{\min}(D^{-1})\,\|\tau\|_0^2 = \\
&=\ \underbrace{\lambda_{\min}(D^{-1})}_{=\,\alpha_1}\,(\|\tau\|_0^2 + \underset{\substack{\| \\ 0}}{\|\,\mathrm{div}\,\tau\|_0^2})
\end{aligned}
$$

- $\boxed{\text{Satz 2.3}} \Longrightarrow \boxed{\begin{array}{ll} 1. & \exists\,! \\ 2. & \text{A-priori–Abschätzungen.} \end{array}}$

- **<u>Lemma 3.8:</u>** (LBB-Bedingung)

<u>Vor.:</u> $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ – $\dagger$ Gebiet mit $\Gamma = \partial\,\Omega \in C^{0,1}$

<u>Bh.:</u> Dann gilt die LBB-Bedingung




$$
\sup_{\tau \in X_0} \frac{b(\tau, v)}{\|\tau\|_{X_0}} \equiv \sup_{\tau \in X_0} \frac{(\mathrm{div}\,\tau, v)}{\|\tau\|_{H(\mathrm{div},\Omega)}} \geq \beta_1\,\|v\|_0 \ \ \forall\, v \in M = (L_2(\Omega))^3. \tag{3.69}
$$

**<u>Beweis:</u>** ($\rightarrow$ [7] Mixed and Hybrid FEM, Springer, 1991)

- Konstr. Beweis für den Fall: $\Gamma_t$
- <u>Sei $v \in M$ bel.</u> Da $\overset{\bullet}{C}{}^{\infty}(\Omega)$ dicht ist in $L_2(\Omega)$, $\ \exists\, w \in \left[\overset{\bullet}{C}{}^{\infty}(\Omega)\right]^3$:

$$
\|v - w\|_0 \leq \frac{1}{2}\,\|v\|_0. \tag{3.70}
$$

  Funktion $w$ sei mit 0 auf $\mathbb{R}^3 \setminus \Omega$ fortgesetzt.
- Man setze $\xi_i = \inf\{x_i : x \in \Omega\}$ und

$$
\left\{
\begin{aligned}
\tau_{ii}(x) \ &=\ \int_{\xi_i}^{x_i} w_i(z)\,dt, \quad z_i = t, \quad z_j = x_j, \quad i \neq j \\
\tau_{ij}(x) \ &=\ 0 \quad \forall\, i \neq j
\end{aligned}
\right. \tag{3.71}
$$

  Dann gilt offenbar:

$$
\left\{
\begin{aligned}
&1) \quad \tau \in X_0 \ \ \text{!! (mms)} \\
&2) \quad \mathrm{div}\,\tau = [\tau_{ii,j} = \tau_{ii,i} = w_i] = w
\end{aligned}
\right. \tag{3.72}
$$

- Aus (3.71) erhalten wir analog zum Beweis der Friedrichs–Ungleichung

$$
\|\tau\|_0^2 = \int_\Omega \tau_{ij}(x)\,\tau_{ij}(x)\,dx \underset{\substack{\uparrow \\ \text{Cauchy}}}{\leq} c^2\,\|w\|_0^2 \quad \text{(mms)}. \tag{3.73}
$$

- Dann erhalten wir

$$\sup_{\sigma \in X_0} \frac{(\operatorname{div}\,\sigma, v)_0}{\|\sigma\|_{H(\operatorname{div},\Omega)}} \underset{\sigma=\tau\ (3.71)}{\overset{\geq}{\uparrow}} \frac{\overset{\overset{w}{(3.72)\ \|}}{(\operatorname{div}\,\tau, v)_0}}{(\underset{\underset{c^2\|w\|_0^2}{\le\ (3.73)}}{\|\tau\|_0^2} + \underset{\underset{w}{\|\ (3.72)}}{\|\operatorname{div}\,\tau\|_0^2})^{1/2}} \overset{(3.73)}{\geq} \frac{(w,v)_0}{(1+c^2)^{1/2}\|w\|_0}$$

$$= \frac{(v,v)-(v-w,v)}{(1+c^2)^{1/2}\,\|w\|_0} \geq \frac{\|v\|^2 - \|v-w\|\,\|v\|}{(1+c^2)^{1/2}\,\|w\|_0}$$

$$\underset{\|w\| \le \|v-(v-w)\| \le \|v\|+\|v-w\| \le (3/2)\,\|v\|_0}{\overset{(3.70)}{\geq}} \frac{\left(1-\frac{1}{2}\right)\,\|v\|_0^2}{(1+c^2)^{1/2}\,(3/2)\,\|v\|_0} = \underbrace{\frac{1}{3\,(1+c^2)^{1/2}}}_{=\beta_1} \|v\|_0 \quad \forall\, v \in M$$

**q.e.d.**

- $\boxed{\textbf{Ü 3.5}}$

| |
|---|
| Sei $(\sigma, u) \in X_0 \times M$ Lösung von (3.68).<br>Man zeige, daß dann automatisch PV<br>$u \in H_0^1(\Omega) := \{v \in [H^1(\Omega)]^3 : v = 0 \text{ auf } \Gamma_u\} = [V_0]$<br>gilt, obwohl zunächst nur $u \in M = [L_2(\Omega)]^3$ gefordert wird ! |

<u>Lösung:</u>

- $(D^{-1}\,\sigma, \tau)_0 + (\operatorname{div}\,\tau, u) = 0$

  $\forall\, \tau \in \{\tau = [\tau_{ij}] : \tau_{ij} = \tau_{ji} \in \overset{\bullet}{C}{}^{\infty}(\Omega)\} \subset X_0$

  $$\curvearrowright\ \frac{1}{2}\int\limits_{\Omega} \left( u_i\,\frac{\partial\, w}{\partial\, x_j} + u_j\,\frac{\partial\, w}{\partial\, x_i}\right) dx = -\int\limits_{\Omega} \underset{\underset{\varepsilon_{ij}(u)\,\in\, L_2(\Omega)}{\|}}{(D^{-1}\sigma)_{ij}}\ w\,dx \quad \forall\ w = \tau_{ij} = \tau_{ji} \in \overset{\bullet}{C}{}^{\infty}(\Omega)$$

  d.h. $D^{-1}\sigma = \varepsilon\,(u) \in L_2(\Omega)$ nach Def. der verallg. Abl.

- Die KORNsche Ungleichung (Lemma 3.3) liefert (!)

  $\infty > \|\varepsilon\,(u)\|_0^2 + \|u\|_0^2 \geq c_k^2\,\|u\|_1^2$

  $\curvearrowright\ u \in [H^1(\Omega)]^3$ (Abschließungsprinzip !!).

- Verbleibt zu zeigen: $u = \mathbf{O}$ auf $\Gamma_u$ !

$$
\begin{aligned}
0 &= (C^{-1}\sigma, \tau)_0 + (\mathrm{div}\ \tau, u)_0 = \\
&= (C^{-1}\sigma, \tau)_0 - (\varepsilon\,(u), \tau)_0 + \int_\Gamma (\tau \cdot n) \cdot u\, ds = \\
&= (\underbrace{C^{-1}\sigma - \varepsilon\,(u)}_{=0}, \tau)_0 + \int_\Gamma (\tau \cdot n) \cdot u = \\
&= \int_{\Gamma_u} (\tau \cdot n)\, u\, ds \quad \forall\, \tau \in X_0 = \{\tau \in H\,(\mathrm{div}, \Omega) : \tau \cdot n = 0 \text{ auf } \Gamma_t\} \\
&\Longleftrightarrow u = \mathbf{O} \text{ auf } \Gamma_u
\end{aligned}
$$

**q.e.d.**

- $\boxed{\textbf{Ü 3.6}}$

| Man zeige, daß im Falle der 1. RWA ($u = \mathbf{O}$ auf $\Gamma_u = \Gamma$) und homogenen, isotropen Materials die Spannungen $\sigma \in X = H\,(\mathrm{div}, \Omega)$ im Raum $\hat{H}\,(\mathrm{div}, \Omega) := \{\tau \in H\,(\mathrm{div}, \Omega) : \int_\Omega \sum_{i=1}^{3} \tau_{ii}\, dx = 0\}$ liegen ! |
|---|

<u>Lösung:</u>

- $(D^{-1}\sigma, \tau)_0 + (\mathrm{div}\ \tau, u)_0 = 0 \quad \forall\, \tau \in \{\tau = \{\tau_{ij}\} : \tau_{ij} = \tau_{ji} \in \overset{\bullet}{C}^{\infty}(\Omega)\} \subset X$

  $\curvearrowright$ $\sigma = D\,\varepsilon\,(u)$ in $L_2(\Omega)$ wegen $\boxed{\text{Ü 3.5}}$ !

- $$
\begin{aligned}
\int_\Omega \mathrm{spur}\ \sigma\, dx &= \int_\Omega \sigma_{ii}\, dx = \frac{E}{1-2\,\nu} \int_\Omega \varepsilon_{ii}\, dx = \\
&= \frac{E}{1-2\,\nu} \int_\Omega \mathrm{div}\ u\, dx = \frac{E}{1-2\,\nu} \int_{\partial\Omega} u \cdot \vec{n}\ ds = 0.
\end{aligned}
$$

#

- <u>Gemischte FE–Approximation:</u>

Die Resultate der Sätze 2.4 – 2.5 für eine gemischte FE–Approximation

(3.74) $\quad \mathbf{X_{0h}} = \mathrm{span}\,\{p^{(i)} : i \in \omega_{X_{0h}}\} \subset X_0, \quad \mathbf{M_h} = \mathrm{span}\,\{q^{(i)} : j \in \omega_{M_h}\} \subset M$

gelten offenbar, falls

a) die <u>diskrete LBB–Bedingung</u>

$X_{0h}$ hinreichend „groß“ sein ! $\curvearrowleft$

$$
\sup_{\tau_h \in X_{0h}} \frac{(\mathrm{div}\ \tau_h, v_h)_0}{\|\tau_h\|_{H\,(\mathrm{div},\Omega)}} \geq \tilde{\beta}_1\, \|v_h\|_0 \quad \forall\, v_h \in M_h
$$

b) die <u>$\mathbf{V_{0h}} := \{\tau_h \in X_{0h} : (\mathrm{div}\ \tau_h, v_h)_0 = 0 \ \forall\, v_h \in M_h\}$–Elliptizität</u>

$X_{0h}$ nicht zu „groß“ im Verh. zu $M_h$ $\curvearrowleft$

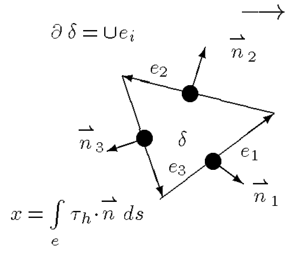
$$
a\,(\tau_h, \tau_h) \equiv (D^{-1}\tau_h, \tau_h) \underset{\uparrow}{\geq} \tilde{\alpha}_1\, \|\tau_h\|^2_{H\,(\mathrm{div},\Omega)} \quad \forall\, \tau_h \in V_{0h}
$$

$\boxed{\text{o.k., falls div } X_{0h} \subset M_h}$ (<u>Bsp.:</u> $TR_0$ $\curvearrowright$ <u>div $X_{0h} = M_h$</u>)

gelten: $\curvearrowright$ nichttrivial ! ($\rightarrow$ siehe Literatur [7]).

Bemerkung: a) + b) $\Rightarrow X_{0h}$ und $M_h$ müssen gut ausbalanciert sein !

Beispiel: für 2D-Elastizitätsprobleme (EVZ, ESZ (↑)) bzw. 2D-Poisson–Gleichung:




$\longrightarrow$ Elementepaar von Raviart und Thomas (1977):

$\Omega \subset \mathbb{R}^2,\ \tau_h = \{\delta_r : r \in \mathbb{R}^h\}$ – reguläre Triangulation [22]

$X_h = \{\tau_h \in (L_2(\Omega))^2 : \tau_h|_{\delta_r} = \binom{a_r}{b_r} + c_r \binom{x_1}{x_2},$

$a_r, b_r, c_r \in \mathbb{R}^1, \tau_h \cdot \vec{n}\ |_{\partial\delta_r}$–stetig $\} \subset X,$

$M_h = \{v_h \in L_2(\Omega) : v_h|_{\delta_r} = a_r,\ a_r \in \mathbb{R}^1\} \subset M.$

### 3.2.3 Die gemischte Methode nach Hu-Washizu

- **Idee:**

$$\boxed{\begin{array}{lll} \text{Ges.} & \underline{\text{Verschiebungen}}\ \ u, & \multirow{2}{*}{\Big\}\ \text{primale Variablen}} \\ & \underline{\text{Verzerrungen}}\ \ \varepsilon, & \\ & \underline{\text{Spannungen}}\ \ \sigma : \}\ \text{duale Variablen} & \\ D\varepsilon - \sigma & = & 0, \\ -\text{div}\,\sigma & = & f, \\ -\varepsilon + \varepsilon(u) & = & 0, \\ +\underline{\text{RB:}}\ u = \bar{u} & \equiv & \mathbf{O}\ \text{auf}\ \Gamma_u,\quad \sigma \cdot \vec{n} = t\ \text{auf}\ \Gamma_t. \end{array}} \tag{3.75}$$

- **Gemischte Formulierung in $X = \overset{\boldsymbol{\varepsilon}}{L_2(\Omega)} \times \overset{\boldsymbol{u}}{H_0^1(\Omega)}$ und $M = \overset{\boldsymbol{\sigma}}{L_2(\Omega)}$ :**

  - Idee: 1) schwache Formulierung von $D\varepsilon - \sigma = 0$.
    2) schwache Formulierung von $-\text{div}\ \sigma = f \oplus$ partielle Integration
    3) schwache Formulierung von $-\varepsilon + \varepsilon(u) = 0$

  - Sei

$$\left.\begin{array}{rcl} X & = & L_2(\Omega) \times H_0^1(\Omega) \text{ mit} \\ & & L_2(\Omega) = \{\varepsilon = [\varepsilon_{ij}] : \varepsilon_{ij} = \varepsilon_{ji} \in L_2(\Omega)\},\ [= M\ (!)] \\ & & H_0^1(\Omega) = \{u = [u_i] : u_i \in H^1(\Omega),\ u = \mathbf{O} \text{ auf } \Gamma_u\} = V_0, \\ M & = & L_2(\Omega) = \{\sigma = [\sigma_{ij}] : \sigma_{ij} = \sigma_{ji} \in L_2(\Omega)\}. \end{array}\right)$$

Dann erhält man aus (3.75) mit 1) – 3) direkt die gemischte Variationsformulierung:

$$\left\{\begin{array}{l|llll} (D\varepsilon, \eta)_0 & -(\eta, \sigma)_0 & = & 0 & \forall\ \eta \in L_2(\Omega), \\ & (\varepsilon(v), \sigma)_0 & = & (f, v)_0 + \int_{\Gamma_t} t^T v\, ds, & \forall\ v \in H_0^1(\Omega), \\ \hline -(\varepsilon, \tau)_0 + (\varepsilon(u), \tau)_0 & & = & 0 & \forall\ \tau \in L_2(\Omega) \end{array}\right. \tag{3.76}$$

- Offenbar gilt: $(3.76) \underset{\text{1. HR}}{\Longleftrightarrow (3.64)} \underset{\text{prim. VF}}{\Longleftrightarrow (3.52)}$ !

- (3.76) kann damit wieder in der Form eines abstrakten gemischten VP der Art (2.2) geschrieben werden:

(3.76)
$$\boxed{\begin{array}{llll} \multicolumn{4}{l}{\text{Ges. } (\varepsilon, u) \in X = L_2(\Omega) \times H_0^1(\Omega) \text{ und } \sigma \in M = L_2(\Omega):} \\ a(\varepsilon, u; \eta, v) \;+\; b(\eta, v; \sigma) & = & < F; \eta, v > & \forall\, (\eta, v) \in X, \\ b(\varepsilon, u; \tau) & = & < G; \tau > & \forall\, \tau \in M, \\ \text{mit} & & & \\ a(\varepsilon, u; \eta, v) & := & (D\,\varepsilon, \eta)_0, & \\ b(\eta, v; \sigma) & := & -(\eta, \sigma)_0 + (\varepsilon(v), \sigma)_0, & \\ < F; \eta, v > & := & 0 + (f, v)_0 + \int\limits_{\Gamma_t} t^T\, v\, ds & \\ < G; \tau > & := & 0 & \end{array}}$$

- Standardvoraussetzungen (2.3):
  1. $F \in X^*, \quad G \in M^*$ (mms) o.k.
  2. $a(\cdot,\cdot), \quad b(\cdot,\cdot)$ ↟ (mms) o.k.
  3. LBB–Bedingung:

$$\sup_{(\eta, v) \in X} \frac{b(\eta, v; \sigma)}{\|(\eta, v)\|_X} = \sup_{(\eta, v) \in L_2 \times H_0^1} \frac{-(\eta, \sigma)_0 + (\varepsilon(v), \sigma)_0}{(\|\eta\|_0^2 + \|v\|_1^2)^{1/2}} \geq$$

$$\underset{\eta = -\sigma \in L_2,\; v = \mathbf{O} \in H_0^1}{\overset{\uparrow}{\geq}} \frac{\|\sigma\|_0^2}{\|\sigma\|_0} = \underbrace{\boxed{1}}_{\beta_1} \|\sigma\|_0 \quad \forall\, \sigma \in M$$

  4. $$\begin{aligned} V_0 &\equiv \ker B \equiv \{(\eta, v) \in X : b(\eta, v; \tau) = 0 \;\; \forall\, \tau \in M\} \equiv \\ &\equiv \{(\eta, v) \in L_2 \times H_0^1 : -(\eta, \tau)_0 + (\varepsilon(v), \tau)_0 = 0 \;\; \forall\, \tau \in M = L_2\} - \end{aligned}$$

Ellipt. v. $a(\cdot,\cdot)$ :

$$\begin{aligned} a(\eta, v; \eta, v) &= (D\,\eta, \eta)_0 = \tfrac{1}{2}(D\,\eta, \eta)_0 + \tfrac{1}{2}(D\,\eta, \eta)_0 \overset{\downarrow}{=} \\ &\overset{\uparrow}{=} \tfrac{1}{2}(D\,\eta, \eta)_0 + \tfrac{1}{2}(\varepsilon(v), D\,\varepsilon(v))_0 \geq \\ &\geq \tfrac{\lambda_{\min}(D)}{2} [\|\eta\|_0^2 + \|\varepsilon(v)\|_0^2] \geq \\ &\underset{\substack{\text{2. KORN} \\ \text{L. 3.4}}}{\geq} \underbrace{\boxed{\tfrac{\lambda_{\min}(D)}{2} \min\{1, c_{K,l}^2\}}}_{\alpha_1} [\|\eta\|_0^2 + \|v\|_1^2] \quad \forall\, (\eta, v) \in V_0 = \ker B. \end{aligned}$$

$$\boxed{\begin{array}{l} (\eta,\tau)_0 = (\varepsilon(v),\tau)_0 \;\; \forall\, \tau \in M = L_2 \\ \text{a) } \eta = \varepsilon(v) \\ \text{b) } \tau = D\eta \in L_2 \longrightarrow (\eta, D\eta)_0 = (\varepsilon(v), D\eta)_0 \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\quad = (\varepsilon(v), D\varepsilon(v))_0 \end{array}}$$

- $\boxed{\text{Satz 2.3}} \Longrightarrow$ 1) $\exists! \, ((\varepsilon, u), \sigma) \in X \times M$
  2) A-priori–Abschätzungen

- **Ü 3.7**

  Schreiben Sie abstrakt die gemischte FE–Approximation von (3.76) auf, und geben Sie analog zu Ü 3.4 die Bedingungen an, sodaß die diskrete LBB–Bedingung und die $V_{0h}$–Elliptizität von $a(\cdot,\cdot)$ gilt, wobei $V_{0h} := \{(\eta_h, v_h) \in X_h : b(\eta_h, v_h; \tau_h) = 0 \;\forall\, \tau_h \in M_h\}$.
  Stellen Sie Relationen zur primalen VF her.

## Gemischte Formulierung in $X = L_2(\Omega) \times (L_2(\Omega))^3$ und $M = H(\mathrm{div}, \Omega)$:

- Idee: 1) schwache Formulierung von $D\varepsilon - \sigma = 0$,
  2) schwache Formulierung von $-\mathrm{div}\;\sigma = f$,
  3) schwache Formulierung von $-\varepsilon + \varepsilon(u) = 0$
  $\oplus$ partielle Integration.

- **Ü 3.8**

  Stellen Sie in Analogie zur gemischten Formulierung nach Hellinger und Reisner in $H(\mathrm{div}, \Omega) \times L_2(\Omega)$ die gemischte VF von (3.75) mit den Ideen 1) – 3) auf, und untersuchen Sie das erhaltene gemischte VP sowie deren gemischte FE–Approximation, d.h.

  $*$ Def. der Räume bzw. lineare Mannigfaltigkeit !
  $*$ Gemischte Formulierung ableiten, RB diskutieren und evtl. die wesentl. RB homogenisieren !
  $*$ Abstrakte Form (2.2) !
  $*$ Standardvoraussetzungen (2.3) ! ( Satz 2.3)
  $*$ Gemischte FE–Approximation !
  $*$ a) diskrete LBB–Bed. } $\Longrightarrow$ 1. Satz 2.4
  b) $V_{0h}$ – Elliptizität } 2. Satz 2.5

## Bemerkung: in 3D

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| ● primale VF | : | 3 ges. Fkt. | : | $u$ | $\leftarrow$ | Standardmethode ! |
| • Hellinger – Reisner | : | 9 ges. Fkt. | : | $u, \sigma$ | $\leftarrow$ | $\sigma$ sind in der Praxis wichtig ! |
| • Hu–Washizu | : | 15 ges. Fkt. | : | $u, \varepsilon, \sigma$ | $\leftarrow$ | wird praktisch nicht verwendet ! |

### 3.2.4 Inkompressible und fast inkompressible Materialien

■ **Problematik:**

Btr. primale VF (3.52) für homogenes, isotropes Material. Dann ist die dazugehörige Bilinearform

(3.77)
$$a(u,v) = \lambda\,(\mathrm{div}\ u, \mathrm{div}\ v)_0 + 2\,\mu\,(\varepsilon(u), \varepsilon(v))_0$$

im Prinzip $\overset{H_0^1}{V_0}$–elliptisch und $\overset{H_0^1}{V_0}$–beschränkt, d.h. $\exists\ \mu_1, \mu_2 = \text{const.} > 0$:

(3.78)
$$\begin{cases} \mu_1\,\|v\|_1^2 & \leq & a(v,v) \quad \forall\ v \in V_0 = \{v \in [H^1(\Omega)]^3 : v = 0 \text{ auf } \Gamma_u\}, \\ |a(u,v)| & \leq & \mu_2\,\|u\|_1\,\|v\|_1 \quad \forall\ u,v \in V_0, \quad (\mathrm{meas}_2\,\Gamma_u > 0), \end{cases}$$

aber $\mu_2/\mu_1 \longrightarrow \infty$ für $\nu \longrightarrow 0.5$ $\left(\Leftrightarrow \lambda = \frac{E\,\nu}{(1+\nu)(1-2\,\nu)} \longrightarrow \infty\right)$, d.h. primale VF (3.52) wird schlecht konditioniert für fast inkompressible Materialien (vgl. Pkt. 3.2.2).

■ **Ausweg:** Formulierung als gemischtes Variationsproblem mit Strafterm (vgl. abstrakte Formulierung in Pkt. 2.3):

- Ausgangspunkt: Primale VF (3.52)

(3.52)
$$\lambda\,(\mathrm{div}\ u, \mathrm{div}\ v)_0 + 2\,\mu\,(\varepsilon(u), \varepsilon(v))_0 = < F, v > \quad \forall\ v \in V_0 = H_0^1(\Omega)$$

- Idee: Führen die neue Variable

(3.79)
$$p = \lambda\,\mathrm{div}\ u \equiv \lambda\,\varepsilon_{ii}(u) \quad (\widehat{=} \text{ hydrostatischer Druck})$$

in (3.52) ein. Dann ergibt das zusammen mit der schwachen Formulierung von (3.79) die folgende gemischte VF mit Strafterm ($\mathrm{meas}_2\,\Gamma_u > 0$, aber $\Gamma_u \neq \Gamma$):

(3.80)
$$\boxed{\begin{array}{lcll} \text{Ges. } (u,p) \in X \times M = H_0^1(\Omega) \times L_2(\Omega) : & & & \\ 2\,\mu\,(\varepsilon(u), \varepsilon(v))_0 + (\mathrm{div}\ v, p)_0 & = & < F, v > & \forall\ v \in H_0^1(\Omega), \\ (\mathrm{div}\ u, q)_0 - \frac{1}{\lambda}\,(p,q)_0 & = & 0 & \forall\ q \in L_2(\Omega). \end{array}}$$

- Bemerkung zur 1. RWA ($\Gamma_u = \Gamma$):

  Im Falle der 1. RWA ($H_0^1(\Omega) = [\overset{\circ}{H}{}^1(\Omega)]^3$) folgt aus der 2. Gleichung von (3.80) für $q = 1 \in L_2(\Omega)$:

  $$+\frac{1}{\lambda}\,(p,1)_0 = (\mathrm{div}\ u,1)_0 = \int\limits_\Omega \mathrm{div}\ u\,dx = -0 + \int\limits_\Gamma \underbrace{u}_{\substack{\|\\ 0}} \cdot \vec{n}\ ds = 0, \text{ d.h.}$$

  $$\int\limits_\Omega p\,dx = 0 \quad \text{im Falle der 1. RWA} \tag{3.81}$$

  $$\Longrightarrow M = \left\{ p \in L_2(\Omega) : \underset{\uparrow}{\int\limits_\Omega} p\,dx \equiv (p,1)_0 = 0 \right\} = L_2(\Omega)|_{\mathbb{R}^1}$$

  $$\text{mit } \|p\|_M = \|p\|_0 = \inf_{c \in \mathbb{R}^1} \|p + c\|_0$$

- (3.80) kann als abstraktes Variationsproblem (2.34) mit Strafterm geschrieben werden ($\mathrm{meas}_2\,(\Gamma_u) > 0,\ \Gamma_u \neq \Gamma$)

$$\boxed{\begin{array}{llll} \multicolumn{4}{l}{\text{Ges. } u \in X = H_0^1(\Omega) \text{ und } p \in M = M_c = L_2(\Omega):} \\ a(u,v) & + \quad b(v,p) & = \ <F,v> & \forall\, v \in X, \\ b(u,q) & - \quad t^2\,c(p,q) & = \ <G,q> & \forall\, q \in M, \\ \text{mit} & & & \\ a(u,v) & := \ 2\,\mu\,(\varepsilon(u),\varepsilon(v))_0 & & \\ b(v,p) & := \ (\mathrm{div}\ v,p)_0 & & \\ c(p,q) & := \ (p,q)_0, \quad t^2 = 1/\lambda, & & \\ <F,v> & := \ \int\limits_\Omega f^T\,v\,dx + \int\limits_{\Gamma_t} t^T\,v\,ds, & <G,q> = 0 & \end{array}} \tag{3.80}$$

- Voraussetzungen von Satz 2.11:
  1. Standardvoraussetzungen (2.3):
     - $F \in X^*$, $G \in M^*$ (mms) o.k.
     - $a(\cdot,\cdot)$, $b(\cdot,\cdot)$ ✝ (mms) o.k.
     - LBB–Bedingung: $\to$ nicht trivial ! o.k.

       $$\sup_{v \in H_0^1(\Omega)} \frac{(\mathrm{div}\ v,p)}{\|v\|_1} \geq \beta_1\,\|p\|_0 \quad \forall\, p \in L_2(\Omega)$$

     ↯ Ist völlig identisch zur LBB–Bedingung für das Stokes–Problem (siehe Vorlesung über *„Numerische Methoden in der Strömungsmechanik“* [30] bzw. Standardliteratur [7], [12]) !

- $a(\cdot,\cdot)$ ist sogar $X$–elliptisch !

$$a(v,v) = 2\,\mu\,\|\varepsilon(v)\|_0^2 \underset{\uparrow \atop \boxed{\text{Lemma 3.4: (3.58)}}}{\geq} \underset{\| \atop \alpha_1}{\boxed{2\,\mu\,c_{K,l}^2}}\,\|v\|_1^2 \quad \forall\, v \in H_0^1(\Omega)$$

2. $a(v,v) \geq 0 \quad \forall\, v \in X;$

   $|a(u,v)| \leq \|u\|\,\|v\| \quad \forall\, u,v \in X \;$ mit $\; \|u\|^2 := a(u,u)$

   $|a(u,v)| \leq \alpha_2^{0.5}\,\|u\|_1\,\|v\| \quad \forall\, u,v \in X$

   $\longrightarrow$ trivial ! o.k.

3. $c(\cdot,\cdot) : M \times M \to \mathbb{R}^1$:
   - $c(q,q) = \|q\|_0^2 \geq 0 \quad \forall\, q \in M$ o.k.
   - $c(q,p) = c(p,q) \quad \forall\, p,q \in M$ o.k.
   - $|c(q,p)| \leq |q|_c\,|p|_c = \|q\|_0\,\|p\|_0 \quad \forall\, p,q \in M$ o.k.

- **Satz 2.11** $\Longrightarrow$

(3.82)

| |
|---|
| 1. $L = L(t) : X \times M \longmapsto X^* \times M^*$ – Isomorphismus, d.h. $\exists\,!\;(u,p) \in X \times M$: (3.80) |
| 2. $\|L^{-1}(t)\|_{[X^*\times M^* \mapsto X\times M]} \leq c = \text{const.}$ mit $c \neq c(t)$ für $t \in [0,1]$. |

## ■ Der Fall $t \to 0$ ($\lambda \to \infty$):

- Aus der Theorie der gemischten Variationsprobleme mit Strafterm (Pkt. 2.3) folgt

(3.83)
$$(u(t),p(t)) := L^{-1}(t)\,(F,G) \;\underset{t\to 0}{\overset{\text{gl.}}{\longrightarrow}}\; (u(0),p(0)) := L^{-1}(0)\,(F,G)$$

in $X \times M$, wobei $(u(0),p(0)) \in X \times M$ die Lösung für den Fall inkompressibler Materialien ($\nu = 1/2$) ist:

(3.84)

$$\boxed{\begin{array}{lll} \multicolumn{3}{l}{\text{Ges. } u \equiv u(0) \in X, \;\; p \equiv p(0) \in M :} \\ 2\,\mu\,(\varepsilon(u),\varepsilon(v))_0 + (\operatorname{div} v, p)_0 & = \; < F, v > & \forall\, v \in H_0^1(\Omega) \\ (\operatorname{div} u, q)_0 & = \; 0 & \forall\, q \in L_2(\Omega) \end{array}}$$

- **Ü 3.9**

| |
|---|
| Beweisen Sie dieses Resultat, d.h. (3.83), unter Verwendung der Resultate von Satz 2.11 ! |

- <u>Bemerkung:</u> Inkompr. Elastizitätsproblem (3.84) $\longmapsto$ Stokes–Problem (Nu II [22])

$$2\,\mu\,(\underbrace{\varepsilon\,(u),\varepsilon\,(v)}_{\text{Verschiebungen}})_0 \quad\longmapsto\quad (\underbrace{\nabla u,\nabla v}_{\text{Geschwindigkeiten}})_0$$

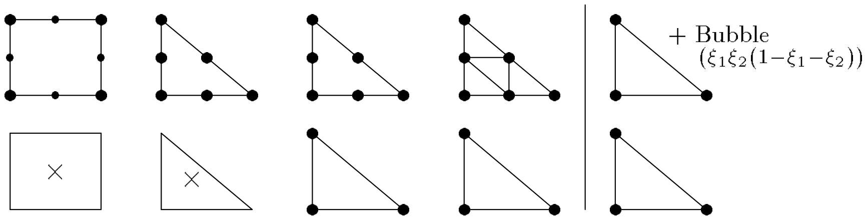
## ■ **<u>FE–Diskretisierung und Analysis ( $\Lsh$ diskrete LBB–Bedingung !):</u>**

$$\boxed{\begin{array}{l}\text{FE–Analysis von}\\ \text{(3.80) und (3.84)}\end{array}} \;\widehat{=}\; \boxed{\begin{array}{l}\text{FE–Analysis des}\\ \text{Stokes–Problems}\end{array}}$$

Insbesondere können die aus der Strömungsmechanik bekannten stabilen Elementepaare für $u$ und $p$ ($\Leftrightarrow$ diskr. LBB mit $\tilde{\beta}_1 \neq \tilde{\beta}_1(h)$ !) zur FE–Diskretisierung von (3.80) bzw. (3.84) verwendet werden:

<u>z.B.:</u> $u_h$:

$p_h$:




Taylor–Hood    Mini–Element

# Kapitel 4

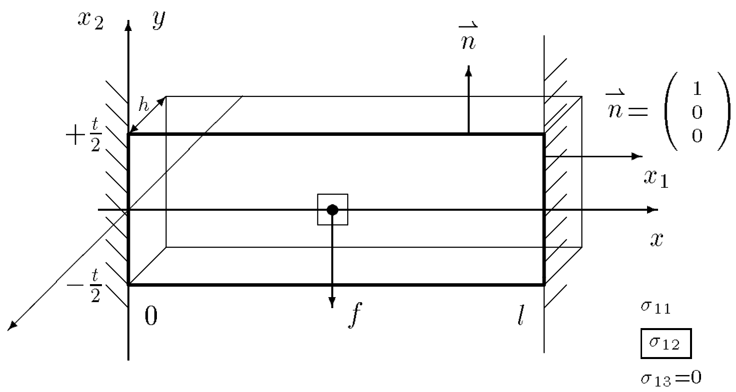
# Strukturmechanische Modelle und ihre FE-Approximation

## 4.1 Der Timoshenko–Balken

### 4.1.1 Balkenmodelle

- **Btr. Scheibe (ESZ: vgl. Pkt. 3.1.4.3)**

$$\omega = \overset{\text{2D}}{\underset{\substack{\| \\ (0,l) \\ \| \\ (a,b)\ \text{mit}\ l=b-a}}{I}} \times \left(-\frac{t}{2}, +\frac{t}{2}\right) \subset I\!R^2$$




unter den folgenden kinetischen und kinematischen Annahmen:

- $t \ll l, \ \ t \approx h$
- $f_1 = 0, \ \ t_1 = 0;$

  Btr. der Einfachheit halber

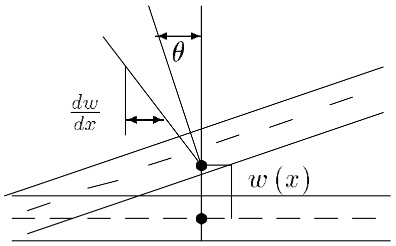
  * nur Volumenkräfte: $f_2\,(x, y) = f\,(x)$
  * $y = \pm t/2$: kräftefrei (d.h. auch $t_2 = 0$) [und $z = 0, h$: kräftefrei]
  * $x = 0, l$: homogene Verschiebungsrbd.: $u\,(x, y) = \begin{bmatrix} u_1(x, y) \\ u_2(x, y) \end{bmatrix} \equiv \mathbf{O}$

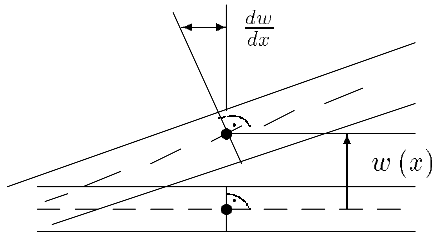
- Verschiebungsansätze für

a) Timoshenko–Balken: $\underset{t\to 0}{\longrightarrow}$ b) Bernoulli–Balken:

(4.1)
$$\boxed{\begin{aligned} u_1(x,y) &= -\,y\,\theta\,(x), \\ u_2(x,y) &= w\,(x), \\ &\theta\,(x) - \text{Verdrehung} \end{aligned}} \qquad \boxed{\begin{aligned} u_1(x,y) &= -\,y\,w'(x), \\ u_2(x,y) &= w\,(x), \\ &\text{d.h. } \theta = w' \text{ (Normalenhypothese)} \end{aligned}}$$

schubweicher Balken — schubstarrer Balken




## Aus $(4.1)_{a)}$ ergeben sich die folgenden Verzerrungen:

(4.2)
$$\begin{cases} \varepsilon_{11} = \dfrac{\partial u_1}{\partial x_1} = -\,y\,\theta'(x) & [= -\,y\,w''(x) \mathrel{\widehat{=}} \text{b)}] \\[2ex] \varepsilon_{12} = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\partial u_1}{\partial x_2} + \dfrac{\partial u_2}{\partial x_1}\right) = \dfrac{1}{2}\,(-\,\theta + w') & [= 0 \mathrel{\widehat{=}} \text{schubstarr !}] \\[2ex] \varepsilon_{22} = \dfrac{\partial u_2}{\partial x_2} = 0 \end{cases}$$

■ **<u>Energiefunktional (homogenes, isotropes Material):</u>**

$$\text{(4.3)}\quad J(u) \underset{\substack{\uparrow\\ \text{Scheibe}\\ \text{(ESZ)}}}{=} \frac{1}{2}\int_\omega (\sigma_{11}\varepsilon_{11} + 2\,\sigma_{12}\,\varepsilon_{12} + \sigma_{22}\,\varepsilon_{22})\,dx_1\,dx_2 - \int_\omega f^T u\,dx =$$

$$\underline{\text{HOOKE}\overset{\text{ESZ}}{\ (3.41)}\ :}\quad \begin{bmatrix}\sigma_{11}\\ \sigma_{22}\\ \sigma_{12}\end{bmatrix} = \frac{E}{1+\nu}\left\{\begin{bmatrix}\varepsilon_{11}\\ \varepsilon_{22}\\ \varepsilon_{12}\end{bmatrix} + \frac{\nu}{1-\nu}\begin{bmatrix}\varepsilon_{11}+\varepsilon_{22}\\ \varepsilon_{11}+\varepsilon_{22}\\ 0\end{bmatrix}\right\}$$

$$= \frac{1}{2}\int_\omega \frac{E}{1+\nu}\,[\underbrace{(\varepsilon_{11} + \frac{\nu}{1-\nu}\,(\varepsilon_{11} + \overset{\substack{0\\ \|}}{\varepsilon_{22}}))\,\varepsilon_{11}}_{=\frac{1}{1-\nu}\,\varepsilon_{11}^2} + 2\,\varepsilon_{12}^2 +$$

$$+ \left(\varepsilon_{22} + \frac{\nu}{1-\nu}\,(\varepsilon_{11}+\varepsilon_{22})\right)\overset{\substack{0\\ \|}}{\varepsilon_{22}}]\,dx_1\,dx_2 - \int_\omega f(x_1) w(x_1)\,dx_1\,dx_2 =$$

$$= \frac{1}{2}\int_\omega \frac{E}{1-\nu^2}\left[\varepsilon_{11}^2 + 2\,(1-\nu)\,\varepsilon_{12}^2\right]\,dx\,dy - \int_\omega f(x)\,w(x)\,dx\,dy =$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^l \int_{-\frac{t}{2}}^{+\frac{t}{2}} \frac{E}{1-\nu^2}\left[y^2\,\theta'^2 + 2\,(1-\nu)\,\frac{1}{4}\,(w'-\theta)^2\right]\,dx\,dy - t\int_0^l f\,w\,dx =$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^l \frac{E}{1-\nu^2}\left[\frac{t^3}{12}\,\theta'^2 + \frac{1}{2}\,(1-\nu)\,t\,(w'-\theta)^2\right]\,dx - t\int_0^l f\,w\,dx =$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{E}{1-\nu^2}\,\frac{t^3}{12}\right)\int_0^l [\theta'^2 + \overset{\substack{\tilde{t}^{-2}\\ \|}}{\boxed{6\,(1-\nu)\,t^{-2}}}\,(w'-\theta)^2]\,dx - t\int_0^l f\,w\,dx =$$

$$= \left[\frac{1}{2}\int_0^l [\underset{\substack{\uparrow\\ \text{Biegeterm}}}{\theta'^2} + \underbrace{\tilde{t}^{-2}\,(w'-\theta)^2}_{\substack{\uparrow\\ \text{Scherterm}}}]\,dx - \int_0^l \tilde{f}\cdot w\,dx\right]\underbrace{\left(\frac{E}{1-\nu^2}\;\frac{t^3}{12}\right)}_{=\ \text{const.}}$$

mit

$$\tilde{f} \equiv \tilde{f}(x) = \left(\frac{E}{1-\nu^2}\,\frac{t^3}{12}\right)^{-1} t\,f(x) = \frac{1-\nu^2}{E}\,\frac{12}{t^2}\,f(x),$$

$$\tilde{t}^{-2} = 6\,(1-\nu)\,t^{-2}.$$

■ **Betrachten deshalb folgende äquivalente mathematische Modelle des Timoshenko–Balkens ($\tilde{t} \mapsto t,\ \tilde{f} \mapsto f$):**

- Minimumproblem:

(4.4)

$$\boxed{\begin{array}{l} \text{Ges. } w \in \overset{\circ}{H}{}^1(I) \text{ und } \theta \in \overset{\circ}{H}{}^1(I): \\ J(w,\theta) = \inf\limits_{\substack{v \in \overset{\circ}{H}{}^1(I) \\ \psi \in \overset{\circ}{H}{}^1(I)}} J(v,\psi) \\ \text{mit } \quad I = (0,l) \text{ und dem Energiefunktional (Ritzfunktional)} \\ \qquad J(v,\psi) := \frac{1}{2}\int\limits_0^l [(\psi'(x))^2 + t^{-2}(v'(x) - \psi(x))^2]\,dx - \int\limits_0^l f\,v\,dx \end{array}}$$

- Variationsproblem:

(4.5)

$$\boxed{\begin{array}{l} \text{Ges. } w \in \overset{\circ}{H}{}^1(I) \text{ und } \theta \in \overset{\circ}{H}{}^1(I): \\ a(w,\theta;v,\psi) = (f,v)_0 \quad \forall\ v \in \overset{\circ}{H}{}^1(I), \quad \forall\ \psi \in \overset{\circ}{H}{}^1(I), \\ \text{wobei } I = (0,l), \ \ (f,v)_0 = (f,v)_{0,I} = \int\limits_0^l f(x)\,v(x)\,dx, \\ \qquad a(w,\theta;v,\psi) \ := \ \int\limits_0^l [\theta'\,\psi' + t^{-2}(w'-\theta)\,(v'-\psi)]\,dx = \\ \qquad\qquad\qquad\qquad = \ (\theta',\psi')_{0,I} + t^{-2}(w'-\theta, v'-\psi)_{0,I} \end{array}}$$

■ **Für den Bernoulli–Balken $(4.1)_{\mathrm{b})}$ erhält man wegen $\boldsymbol{\theta = w'}$ das Variationsproblem:**

(4.6)
$$\boxed{\text{Ges. } w \in \overset{\circ}{H}{}^2(I) : \int\limits_0^l w''v''\,dx = \int\limits_0^l f\,v\,dx \quad \forall\ v \in \overset{\circ}{H}{}^2(I)}$$

welches offenbar der 1. RWA für eine Dgl. 4. Ordnung entspricht:

$$\boxed{\begin{array}{llllll} \multicolumn{6}{l}{w^{(4)}(x) = f(x), \quad x \in I = (0,l)} \\ \underline{\text{RB:}} & w(0) & = & w'(0) & = & 0 \\ & w(l) & = & w'(l) & = & 0 \end{array}}$$

### 4.1.2 Verschiebungsansatz und reduzierte Integration

- **Ausgangspunkt:** = Primale Variationsformulierung (4.5) in $X = \overset{\circ}{H}{}^1(I) \times \overset{\circ}{H}{}^1(I)$:

(4.5) Ges. $(w,\theta) \in X : a(w,\theta; v,\psi) = (f,v)_0 \quad \forall\, (\psi, v) \in X.$

- **Lemma 4.1:**

> Die in (4.5) definierte Bilinearform $a(\cdot,\cdot) : X \times X \mapsto I\!R^1$ ist symmetrisch, $X$-elliptisch und $X$-beschränkt.
> Insbesondere gelten für $0 < t \leq 1$ die Ungleichungen
>
> $$\left\{\begin{array}{llll} \text{a)}\ a(v,\psi;v,\psi) & \geq & \mu_1 (\|\psi'\|_0^2 + \|v'\|_0^2) & \forall\,(v,\psi)\in X, \\ \text{b)}\ |a(w,\theta;v,\psi)| & \leq & \mu_2 \|(w,\theta)\|_X \, \|(v,\psi)\|_X & \forall\,(w,\theta),(v,\psi)\in X \end{array}\right.$$
>
> mit $\|(w,\theta)\|_X^2 = \|\psi'\|_0^2 + \|v'\|_0^2$, $\mu_1 = \frac{1}{\max\{1+2\,l^2, 2\}}$, $\mu_2 = c \cdot t^{-2}$.

$\uparrow$
$c = 1 + 2\,l + l^2$

**Beweis:** (mms)

- $X$–Elliptizität:

$$\begin{aligned}
\|\psi'\|_0^2 + \|v'\|_0^2 &\leq \|\psi'\|_0^2 + (\|v'-\psi\|_0 + \|\psi\|_0)^2 \leq \\
&\leq \|\psi'\|_0^2 + 2\,\|v'-\psi\|_0^2 + 2\,\|\psi\|_0^2 \leq \\
&\leq \|\psi'\|_0^2 + 2\,\|v'-\psi\|_0^2 + 2\,l^2\,\|\psi'\|_0^2 \leq
\end{aligned}$$

Friedrichs-Ungl.: $\|\psi\|_0 \leq l\,\|\psi'\|_0 \quad \forall\,\psi \in \overset{\circ}{H}{}^1(I)$

$$\boxed{1 \leq t^{-2}} \quad \leq \underbrace{\max\{1+2\,l^2, 2\}}_{\mu_1^{-1}} \underbrace{[\|\psi'\|_0^2 + t^{-2}\,\|v'-\psi\|_0^2]}_{a(v,\psi;v,\psi)}$$

- $X$–Beschränktheit:

$$\begin{aligned}
|a(w,\theta;v,\psi)| &\leq |(\theta',\psi')_0 + t^{-2}(w'-\theta, v'-\psi)_0| \leq \\
&\leq \|\theta'\|_0\,\|\psi'\|_0 + t^{-2}\,\overbrace{\|w'-\theta\|_0\,\|v'-\psi\|_0}^{(\|w'\|_0+\|\theta\|_0)\,(\|v'\|_0+\|\psi\|_0)} \\
\boxed{1 \leq t^{-2}} \rightarrow \quad &\leq t^{-2}\{\|\theta'\|_0\,\|\psi'\|_0 + \|w'\|_0\,\|v'\|_0 + \|\theta\|_0\,\|v'\|_0 + \\
&\qquad + \|w'\|_0\,\|\psi\|_0 + \|\theta\|_0\,\|\psi\|_0\} \\
\text{Friedrichs-Ungl.} \rightarrow \quad &\leq t^{-2}(1+2\,l+l^2)\,\|(w,\theta)\|_X\,\|(v,\psi)\|_X
\end{aligned}$$

**q.e.d.**

■ **Satz 4.2:**

| | | |
|---|---|---|
| Vor.: | Sei $t \in (0,1]$ und $f \in L_2(I)$ mit $I = (0,l)$. | |
| Bh.: | 1. | $\exists\,!\,(w,\theta) \in X$ : (4.5). |
| | 2. | Lsg. $(w,\theta) \in X$ läßt sich durch Fixpunktiteration bestimmen. |

Beweis: folgt sofort aus Satz I.2.9 von Lax & Milgram und Lemma 4.1.

**q.e.d.**

■ **Konditioniertheit der Ausgangsaufgabe (4.5):**

- Aus Lemma 4.1 folgt
$$\kappa\,(A) := \|A\|_{[X\to X^*]}\|A^{-1}\|_{[X^*\to X]} \le \frac{\mu_2}{\mu_1} = \text{const.}\ t^{-2},$$
wobei $A \in \mathcal{L}\,(X, X^*) : < A\,(w,\theta), (v,\psi) > := a\,(w,\theta; v,\psi)$. Das läßt vermuten (?), daß das VP (4.5) für $t \to 0$ immer schlechter konditioniert wird !

- Es gilt nun in der Tat

(4.7) $$\kappa\,(A) \;=\; O\,(t^{-2}) \quad \text{für } t \to 0\,!$$

Tatsächlich,
$$\frac{a\,(v,\psi;v,\psi)}{\|\psi'\|_0^2 + \|v'\|_0^2} = \begin{cases} (O)\,(1) & \text{für } v = x^2(l-x)^2,\ \ \psi = v' \quad (*) \\ O\,(t^{-2}) & \text{für } v = 0,\ \ \underset{\psi'=l-2x}{\psi = x\,(l-x)} \quad (**) \end{cases}$$

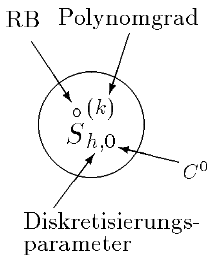
$$(*)\quad \left.\begin{aligned} a\,(v,v';v,v') &= \int_0^l v''v''\,dx = 24\int_0^l v\,dx = \tfrac{24}{30}\,l^5 \\ \|v''\|_0^2 + \|v'\|_0^2 &= \end{aligned}\right\} O\,(1)\ \surd$$

$$(**)\quad \frac{a\,(v,\psi;v,\psi)}{\|\psi'\|_0^2 + \|v'\|_0^2} = \frac{\|\psi'\|_0^2 + t^{-2}\,\|\psi\|_0^2}{\|\psi'\|_0^2} = 1 + t^{-2}\,\frac{\|\psi\|_0^2}{\|\psi'\|_0^2} = O\,(t^{-2})\ \surd$$

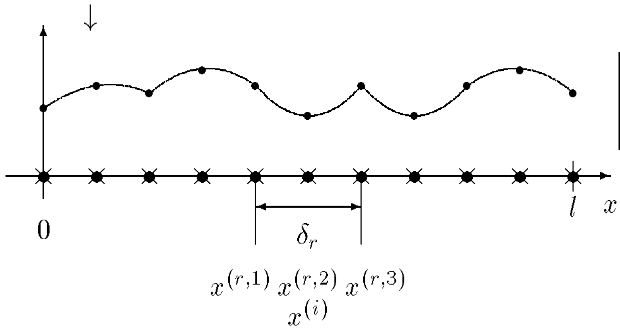
## ■ **Standarde FE–Approximation:**

- Konforme FE–Teilräume: $X_h \subset X$

(4.8)
$$X_h = \overset{\circ}{S}{}^{(k)}_{h,0} \times \overset{\circ}{S}{}^{(k)}_{h,0} \subset X = \overset{\circ}{H}{}^1(I) \times \overset{\circ}{H}{}^1(I), \quad k \geq 2 \quad (k \geq 1)$$
$$\downarrow$$
$$\overset{\circ}{S}{}^{(k)}_{h,0} := S_h^{(k)} \cap \overset{\circ}{H}{}^1(I) \subset C(\bar{I})$$
$$\downarrow$$
$$S_h^{(k)} := \{v \in L_2(I) : v|_{\delta_r} \in P_k \;\; \forall\, r \in I\!R_h\} \not\subset C(\bar{I})$$
$$\hookrightarrow S_{h,0}^{(k)} := S_h^{(k)} \cap H^1(I) \subset C(\bar{I})$$
$$\downarrow$$




z.B.: $k = 2$




$\boxed{\text{Nu I} \;\; \text{Nu II}}$

- FE–Schema: ($\exists\,!$ + Fixpunktiteration: o.k. ($\uparrow$))

$(4.5)_h$ Ges. $(w_h, \theta_h) \in X_h$ : $\quad a(w_h, \theta_h; v_h, \psi_h) = (f, v_h)_0 \quad \forall\, (v_h, \psi_h) \in X_h$

$$\updownarrow$$

$(\underline{4.5})_h$ Ges. $(\underline{w}_h, \underline{\theta}_h)^T \in I\!R^{N_h}$ : $\quad \underset{\text{spd}}{K_h} \; \binom{\underline{w}_h}{\underline{\theta}_h} \equiv \binom{\underline{f}_h}{\mathbf{O}}$ in $I\!R^{N_h}$

- Cea–Satz I.4.3 + Approximationssatz II.4.5 liefern:

(4.9)
$$\|w - w_h\|_1 + \|\theta - \theta_h\|_1 \leq \underset{(\mu_2/\mu_1)}{\bar{c}\, t^{-2}} \Big[ \inf_{v_h \in \overset{\circ}{S}{}^{(k)}_{h,0}} \|w - v_h\|_1 + \inf_{\psi_h \in \overset{\circ}{S}{}^{(k)}_{h,0}} \|\theta - \psi_h\|_1 \Big]$$
$$s \leq k$$
$$\leq \bar{c}\, a_{1,s+1} \underbrace{t^{-2} h^s}_{?} (\|w\|_{s+1} + \|\theta\|_{s+1}), \text{ falls } w, \theta \in H^{s+1}(I) \;\; (\text{siehe } \boxed{\text{Ü } 4.2}).$$
für $t \ll h$ z.B. $k = s = 2 \;\curvearrowright\; (h/t)^2 > 1$, falls $t < h$ !

- Konditionszahl (siehe Satz II.4.4):

(4.10)
$$\kappa(K_h) = O(t^{-2} h^{-2}) \;\; !?$$

■ **Selektive reduzierte Integration:**

- Ersetzen FE–Schema $(4.5)_h$

$$(4.5)_h \qquad (\theta_h', \psi_h')_0 + \underline{t^{-2}\,(w_h' - \theta_h, v_h' - \psi_h)_0} = (f, v_h)_0 \quad \forall\ (v_h, \psi_h) \in X_h$$

durch ein modifiziertes FE–Schema mit abgeschwächtem Scherterm

$$(\widetilde{4.5})_h \qquad (\theta_h', \psi_h')_0 + t^{-2}\,(\Pi_h\,[\underset{\substack{\cap\\ S_h^{(k-1)}}}{w_h'} - \underset{\substack{\cap\\ S_h^{(k)}}}{\theta_h}], v_h' - \psi_h)_0 = (f, v_h)_0 \quad \forall\ (v_h, \psi_h) \in X_h$$

wobei

$$(4.11) \qquad \Pi_h :\ L_2(I) \longmapsto S_h^{(k-1)} - L_2 - \text{orthogonaler Projektor, d.h.}$$
$$(\Pi_h\, v, v_h)_0 = (v, v_h)_0 \quad \forall\ v_h \in S_h^{(k-1)}$$

- Bemerkung: Den Term $(\Pi_h\,[w_h' - \theta_h], v_h' - \psi_h)_0$ kann man praktisch durch reduzierte Integration realisieren ( ↳ Integrationsformel, die exakt für Polynome $2\,(k-1)$-ten Grades anstelle $2\,k$-ten Grades ist !)

- Resultat: Die Lösungen $(\tilde{w}_h, \tilde{\theta}_h) \in X_h$ von $(\widetilde{4.5})_h$ approximieren die Lsg. $(w, \theta) \in X$ von (4.5) wesentlich besser und unabhängig von $t$ $(t \to 0)$ als die standarden FE–Lsg. $(w_h, \theta_h) \in X_h$ von $(4.5)_h$ !

- Strenge mathematische Begründung dieses „Phänomens“ gelingt mit der Theorie der gemischten FE–Ansätze (siehe Pkt. 4.1.3) !

### 4.1.3 Gemischte Variationsformulierung

■ **Btr. primale Variationsformulierung**

$$(4.5) \qquad (\theta', \psi')_0 + \underbrace{t^{-2}\,(w' - \theta}_{\gamma = t^{-2}\,(w' - \theta)\,\in L_2(I)},\ v' - \psi)_0 = (f, v)_0 \quad \forall\ (v, \psi) \in X$$

und führen den Scherterm

$$(4.12) \qquad \gamma := t^{-2}\,(w' - \theta) \in L_2(I)$$

als neue Variable ein. Damit erhalten wir eine gemischte Variationsformulierung mit Störterm (vgl. Pkt. 2.3):

$$
(4.13)\quad
\boxed{
\begin{array}{llllll}
\multicolumn{6}{l}{\text{Ges. } (w,\theta) \in X = \overset{\circ}{H}{}^1(I) \times \overset{\circ}{H}{}^1(I) \text{ und } \gamma \in M = L_2(I):} \\
(\theta',\psi')_0 & + & (v'-\psi,\gamma)_0 & = & (f,v)_0 & \forall\,(v,\psi)\in X \\
\boldsymbol{a((w,\theta);(v,\psi))} & + & \boldsymbol{b((v,\psi);\gamma)} & = & \boldsymbol{< f,(v,\psi) >} & \\
(w'-\theta,\eta)_0 & - & t^2\,(\gamma,\eta)_0 & = & 0 & \forall\,\eta\in M \\
\boldsymbol{b((w,\theta),\eta)} & - & \boldsymbol{t^2\,c(\gamma,\eta)} & = & \boldsymbol{< g,\eta >} &
\end{array}
}
$$

die offenbar zu (4.5) <u>äquivalent</u> ist ( $\curvearrowright \exists\,!$ ) ! (mms) #

■ **Auf die gemischte Variationsformulierung (4.13) ist der <u>Satz 2.11</u> anwendbar,** da die Bilinearform $c(\cdot,\cdot) := (\cdot,\cdot)_0 : L_2(I) \times L_2(I) \longrightarrow I\!R^1 \quad (M \times M \to I\!R^1)$ offenbar stetig ist:

- **<u>Satz 4.3:</u>**

> Durch die gemischte Variationsformulierung mit Störterm
>
> $$(4.13)\quad \begin{cases} (\theta',\psi')_0 + (v'-\psi,\gamma)_0 &= \; < f_1, v > + < f_2, \psi > \quad \forall\,(v,\psi)\in X \\ (w'-\theta,\eta)_0 - t^2\,(\gamma,\eta)_0 &= \; (g,\eta)_0 \qquad\qquad\qquad\quad\; \forall\,\eta\in M \end{cases}$$
>
> wird ein Isomorphismus
>
> $$\begin{array}{rcl} L : X \times M \equiv \overset{\circ}{H}{}^1(I)^2 \times L_2(I) & \longmapsto & H^{-1}(I)^2 \times L_2(I) \\ (w,\theta;\gamma) & \rightleftarrows & (f_1,f_2;g) \end{array}$$
>
> definiert. Für $0 \le t \le 1$ sind $L$ und $L^{-1}$ gleichmäßig in $t$ beschränkt.

- **<u>Beweis:</u>** Zeigen, daß die Vor. von Satz 2.11 erfüllt sind:
  1. Standardvoraussetzungen (2.3):
     - $(f_1,f_2) \in X^* = H^{-1}(I)^2, \quad g \in M^* = L_2(I)$ o.k.
     - $a(\cdot,\cdot), \; b(\cdot,\cdot)$ $\ast$ (mms) o.k.
     - LBB–Bedingung:

$$\sup_{(w,\theta)\in X} \frac{b((w,\theta),\gamma)}{\|(w,\theta)\|_X} \equiv \sup_{(w,\theta)} \frac{(w'-\theta,\gamma)_0}{(\|w'\|_0^2 + \|\theta'\|_0^2)^{1/2}} \overset{!}{\ge} \beta_1\,\|\gamma\|_0 \quad \forall\,\gamma\in L_2(I)$$

? $\forall$ (fix) $\gamma \in L_2 \quad \exists\,(w,\theta) \in \overset{\circ}{H}{}^1 \times \overset{\circ}{H}{}^1$: $\gamma = w' - \theta$ ?

Sei $\gamma \in L_2(I) = L_2(0,l)$ bel., fix. ↷ Setzen

$$
(4.14) \qquad \left\{
\begin{array}{rcl}
\kappa & = & -\,l^{-3} \int\limits_0^l \gamma\,(\xi)\,d\xi, \\
\theta\,(x) & = & \kappa\,[x^2(3\,l-2\,x)]' = \kappa\,6\,x\,(l-x) \in \overset{\circ}{H}{}^1, \\
w\,(x) & = & \int\limits_0^x \gamma\,(\xi)\,d\xi + \kappa\,x^2(3\,l-2\,x) \qquad \in \overset{\circ}{H}{}^1\,.
\end{array}
\right.
$$

Es gilt: $\gamma = w' - \theta = \gamma\,(x) + \kappa\,[\cancel{x^2(3\,l-2\,x)}]' - \kappa\,[\cancel{x^2(3\,l-2\,x)}]' = \gamma$

Setzen nun dieses Paar $(w,\theta) \in X$ in LBB–

$$
\sup_{(w,\theta)} \frac{(w'-\theta,\gamma)_0}{(\|w'\|_0^2+\|\theta'\|_0^2)^{1/2}} \underset{\uparrow}{\geq} \frac{(\gamma,\gamma)_0}{(\|w'\|_0^2+\|\theta'\|_0^2)^{1/2}} \geq C\,(l)\,\frac{\|\gamma\|_0^2}{\|\gamma\|_0} = \underbrace{C\,(l)}_{=\beta_1}\,\|\gamma\|_0
$$

$$\boxed{(4.14)\quad (w,\theta) : \gamma = w' - \theta}$$

NR:

$$
\boxed{
\begin{array}{lcl}
|\kappa| & = & l^{-3}\,|\int\limits_0^l \gamma\,d\xi| \leq l^{-3}\,l^{1/2}\,\|\eta\|_0 = l^{-5/2}\,\|\gamma\|_0, \\
\|\theta'\|_0 & \leq & |\kappa|\,6\,\|(l-2\,x)\|_0 \leq c_1(l)\,\|\gamma\|_0, \\
\|w'\|_0 & \leq & \|\gamma\|_0 + |\kappa|\,6\,\|x\,(l-x)\|_0 \leq c_2(l)\,\|\gamma\|_0 \\
\text{mit} & & c_1(l) \;=\; 6\,l^{-5/2}\,\|(l-2\,x)\|_0 = \\
 & & c_2(l) \;=\; (1+6\,l^{-5/2})\,\|x\,(l-x)\|_0 =
\end{array}
}
$$

- $V_0 \equiv \ker B \equiv \{(w,\theta) \in X : w' = \theta\}$ – Elliptizität von $a\,(\cdot,\cdot)$:
  Sei $(w,\theta) \in V_0$, d.h. $w' = \theta$ ↷

$$
\begin{array}{rcl}
a\,(w,\theta;w,\theta) & = & (\theta',\theta') = \|\theta'\|_0^2 = \frac{1}{2}\,\|\theta'\|_0^2 + \frac{1}{2}\,\|\theta'\|_0^2 \\
 & \underset{\uparrow}{\geq} & \frac{1}{2}\,\|\theta'\|_0^2 + \frac{1}{2\,c_F^2}\,\|\theta\|_0^2 \\
\text{Friedrichs-Ungl.:} & & \|\theta\|_0 \leq c_F\,\|\theta'\|_0 \quad \forall\,\theta \in \overset{\circ}{H}{}^1(I), \;\; c_F = l \\
 & = & \frac{1}{2}\,\|\theta'\|_0^2 + \frac{1}{2\,c_F^2}\,\|w'\|_0^2 \geq \underbrace{\frac{1}{2}\min\left\{1,\frac{1}{c_F^2}\right\}}_{=\alpha_1}\,\|(w,\theta)\|_X^2
\end{array}
$$

2. Zusätzliche Vor. an $a\,((w,\theta);(v,\psi)) := (\theta',\psi')_0$: (mms)
   - $a\,(w,\theta;w,\theta) = \|\theta'\|_0^2 \geq 0 \quad \forall\,(w,\theta) \in X$ o.k.
   - $|a\,(w,\theta;v,\psi)| \leq \|\theta'\|_0\,\|\psi'\|_0 \leq \|(w,\theta)\|_X\,\|\psi'\|_0$ o.k.
3. Voraussetzungen an $c\,(\cdot,\cdot) := (\cdot,\cdot)_0 : L_2 \times L_2 \to I\!R^1$: (mms)
   - $c\,(\gamma,\gamma) = \|\gamma\|_0^2 \geq 0$
   - $c\,(\gamma,\eta) = c\,(\eta,\gamma)$
   - $|c\,(\gamma,\eta)| \leq \|\gamma\|_0\,\|\eta\|_0$

**q.e.d.**

- $\boxed{\text{Ü 4.1}}$

Man zeige, daß die Lösung $(w(t), \theta(t), \gamma(t))$ des festeingespannten Timoshenko–Balkens für $t \to 0$ gegen die Lösung $(w(0), \theta(0), \gamma(0))$ des festeingespannten Bernoulli–Balkens (gem. VF) in $X \times M = \overset{\circ}{H}{}^1(I)^2 \times L_2(I)$ konvergiert, d.h.

$<f_2, v> = (f, v)_0$
$f_2 = 0$
$g = 0$

$$\begin{pmatrix} w(t) \\ \theta(t) \\ \gamma(t) \end{pmatrix} := L^{-1}(t) \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \\ g \end{pmatrix} \xrightarrow{t \to 0} \begin{pmatrix} w(0) \\ \theta(0) \\ \gamma(0) \end{pmatrix} := L^{-1}(0) \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \\ g \end{pmatrix}$$

in $X \times M$ mit $O(t^2)$.

Lösung:

- Der Fehler

$$\begin{pmatrix} \Delta w(t) \\ \Delta\theta(t) \\ \Delta\gamma(t) \end{pmatrix} = \underset{(4.13)}{\overset{\text{Timoshenko}}{\overset{\downarrow}{\begin{pmatrix} w(t) \\ \theta(t) \\ \gamma(t) \end{pmatrix}}}} - \underset{(4.13)_{t=0}}{\overset{\text{Bernoulli}}{\overset{\downarrow}{\begin{pmatrix} w(0) \\ \theta(0) \\ \gamma(0) \end{pmatrix}}}} \in X \times M$$

genügt offenbar der gemischten Variationsformulierung

$$\begin{aligned} (\Delta\theta', \psi')_0 + (v' - \psi, \Delta\gamma)_0 &= 0 & \forall\, (v, \psi) \in X, \\ (\Delta w' - \Delta\theta', \eta)_0 - &= t^2 (\gamma(t), \eta)_0 & \forall\, \eta \in M. \end{aligned}$$

- Aus Satz 4.3 folgt

$$\begin{aligned} \left\| \begin{pmatrix} \Delta w(t) \\ \Delta\theta(t) \\ \Delta\gamma(t) \end{pmatrix} \right\|_{X \times M} &\leq \|L^{-1}(0)\|\, t^2 \left\| \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \gamma(t) \end{pmatrix} \right\|_{X^* \times M^*} \overset{\overset{M = M^* = L_2(I)}{\downarrow}}{\leq} \\ &\leq \|L^{-1}(0)\|\, t^2 \left\| L^{-1}(t) \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \\ g \end{pmatrix} \right\|_{X \times M} \leq \\ &\leq \underset{\text{gl. }\dagger}{t^2 \|L^{-1}(0)\| \|L^{-1}(t)\|} \left\| \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \\ g \end{pmatrix} \right\|_{X^* \times M^*} \xrightarrow{t \to 0} 0, \end{aligned}$$

d.h. $\left\| \begin{matrix} \Delta w(t) \\ \Delta\theta(t) \\ \Delta\gamma(t) \end{matrix} \right\|_{X \times M} = O(t^2)$ für $t \to 0$. #

## ■ <u>Äquivalenz einer gemischten FE–Approximation von (4.13) zum modifizier–ten FE–Schema $(\widetilde{4.5})_h$ mit selektiver reduzierter Integration:</u>

- Analog zur Herleitung der gemischten VF (4.13) aus (4.5) mit (4.12) führt $(\widetilde{4.5})_h$ mit dem diskreten reduzierten Scherterm

(4.15) $$\gamma_h := t^{-2}\Pi_h\,(w_h' - \theta_h) \in S_h^{(k-1)}$$

auf die <u>gemischte FE–Approximation</u>

$(\widetilde{4.13})_h$
$$\boxed{\begin{array}{lcl} \text{Ges. } (w_h,\theta_h) \in X_h = \overset{\circ}{S}{}^{(k)}_{h,0} \times \overset{\circ}{S}{}^{(k)}_{h,0} \text{ und } \gamma_h \in M_h = S_h^{(k-1)} : & & \\ (\theta_h', \psi_h')_0 + (v_h' - \psi_h, \gamma_h)_0 & = & (f, v_h)_0 \quad \forall\, (v_h,\psi_h) \in X_h \\ (w_h' - \theta_h, \eta_h)_0 - t^2\,(\gamma_h, \eta_h)_0 & = & 0 \qquad\qquad \forall\, \eta_h \in M_h \end{array}}$$

von (4.13) mit den speziell gewählten Räumen

(4.16) $$X_h = \overset{\circ}{S}{}^{(k)}_{h,0} \times \overset{\circ}{S}{}^{(k)}_{h,0} \quad \text{und} \quad \underline{\underline{M_h = S_h^{(k-1)}}} \;!$$

Tatsächlich, die schwache Formulierung von (4.15) ergibt

$$t^2(\gamma_h,\eta_h)_0 = (\Pi_h(w_h'-\theta_h),\eta_h)_0 \overset{(4.11)}{=} (w_h'-\theta_h,\eta_h)_0 \quad \forall\, \eta_h \in S_h^{(k-1)}$$

die zweite Gleichung von $(\widetilde{4.13})_h$.

- Offenbar ist $\underline{\underline{(\widetilde{4.13})_h \text{ äquivalent zu } (\widetilde{4.5})_h}}$ ! (mms)

## ■ <u>$V_{0h}$–Elliptizität und diskrete LBB–Bedingung für die Raumwahl (4.16):</u>

- **<u>Lemma 4.4:</u>**

> <u>Vor.:</u> $X_h = \overset{\circ}{S}{}^{(k)}_{h,0} \times \overset{\circ}{S}{}^{(k)}_{h,0}$, $M_h = S_h^{(k-1)}$, $k \geq 2$
>
> <u>Bh.:</u> Dann gilt:
>
> 1. $V_{0h} \equiv \{(v_h,\psi_h) \in X_h : b\,(v_h,\psi_h;\eta_h) = 0 \;\; \forall\, \eta_h \in M_h\}$–Elliptizität:
>
>    (4.17) $$a\,(v_h,\psi_h;v_h,\psi_h) \geq \tilde{\alpha}_1\, \|(v_h,\psi_h)\|_X^2 \quad \forall\,(v_h,\psi_h) \in X_h,$$
>
>    mit $\tilde{\alpha}_1 = \frac{1}{2}\min\{1, c_F^{-2}\}$, $c_F = l$.
>
> 2. Diskrete LBB–Bedingung:
>
>    $\exists\; \tilde{\beta}_1 = \text{const.} > 0,\; \tilde{\beta}_1 \neq \tilde{\beta}_1(h)$:
>
>    (4.18) $$\sup_{(v_h,\psi_h)\in X_h} \frac{b\,(v_h,\psi_h;\eta_h)}{\|(v_h,\psi_h)\|_X} \geq \tilde{\beta}_1\,\|\eta_h\|_M \quad \forall\,\eta_h \in M_h.$$

- **<u>Beweis:</u>**

<u>zu 1:</u> • $(v_h, \psi_h) \in V_{0h}$, d.h. $b\,((v_h, \psi_h); \eta_h) = 0 \quad \forall\, \eta_h \in M_h$

$$\Vert>$$

$$(v_h' - \psi_h, \eta_h)_0 = 0 \quad \forall\, \eta_h \in S_h^{(k-1)}$$

$$\Vert>$$

$$(v_h', \eta_h)_0 = (\psi_h, \eta_h)_0 \quad \forall\, \eta_h \in S_h^{(k-1)}$$

$$(4.11) \longrightarrow \Vert>$$

$$v_h' = \Pi_h\, \psi_h \in S_h^{(k-1)}$$

• $\|\Pi_h\, \psi_h\|_0 \le \|\psi_h\|_0$, da $\Pi_h$ – $L_2$–Orthoprojektor

F-Ungl.

• $a\,(v_h, \psi_h; v_h, \psi_h) = \|\psi_h'\|_0^2 = \frac{1}{2}\,\|\psi_h'\|_0^2 + \frac{1}{2}\,\|\psi_h'\|_0^2 \;\overset{\downarrow}{\ge}$

$$\ge \frac{1}{2}\,\|\psi_h'\|_0^2 + \frac{1}{2\,c_F^2}\,\|\psi_h\|_0^2 \ge \frac{1}{2}\,\|\psi_h'\|_0^2 + \frac{1}{2\,c_F^2}\,\|\Pi_h\,\psi_h\|_0^2 =$$

$$= \frac{1}{2}\,\|\psi_h'\|_0^2 + \frac{1}{2\,c_F^2}\,\|v_h'\|_0^2 \ge \underbrace{\frac{1}{2}\,\min\{1, c_F^{-2}\}}_{=\tilde\alpha_1}\,(\|\psi_h'\|_0^2 + \|v_h'\|_0^2) \quad \forall\,(v_h, \psi_h) \in V_{0h} \qquad \#$$

F–Ungl.:
$\|\psi_h\|_0 \le c_F \|\psi_h'\|_0$
$c_F = l$

<u>zu 2:</u> $$\sup_{(v_h, \psi_h) \in X_h} \frac{(v_h' - \psi_h, \eta_h)_0}{(\|v_h'\|_0^2 + \|\psi_h'\|_0^2)^{1/2}} \overset{!}{\ge} \tilde\beta_1\,\|\eta_h\|_0 \quad \forall\, \eta_h \in M_h = S_h^{(k-1)}$$

a) Falls $k \ge 3$, dann ist die Konstruktion (4.14) direkt anwendbar:

$\eta_h \in S_h^{(k-1)}$ geg.

$\kappa = -\,l^{-3} \int\limits_0^l \eta_h\,(\xi)\,d\xi$

$\psi_h(x) = \kappa\,[x^2\,(3\,l - 2\,x)]' = 6\,\kappa\,\overbrace{x\,(l - x)}^{=\bar\psi} \in \overset{\circ}{S}{}_{h,0}^{(k)} \qquad (k \ge 2)$

$v_h(x) = \int\limits_0^x \eta_h(\xi)\,d\xi + \kappa\,x^2 (3\,l - 2\,x) \in \overset{\circ}{S}{}_{h,0}^{(k)} \qquad (k \ge 3)$

$\quad \in S_{h,0}^{(k)}$

↳ Beweis analog zu Satz 4.3 ! (mms)

b) <u>$k = 2$:</u> (mms)

Hinweis: $\bar\psi = x\,(l - x) \quad \longmapsto \quad \bar\psi_h \in \overset{\circ}{S}{}_{h,0}^{(1)}$:

$\bar\psi_h(x) > 0 \quad \forall\, x \in (0, l)$

$\int\limits_I \bar\psi_h\,dx \ne 0$ **q.e.d.**

- **Bemerkung 4.5:**

$$\text{Die Paarung } X_h = \overset{\circ}{S}{}^{(k)}_{h,0} \times \overset{\circ}{S}{}^{(k)}_{h,0} \text{ und } M_h = \begin{array}{l} S_h^{(k-2)} \curvearrowright V_{0h}\text{–Elliptizität geht verloren ! } (*) \\ \uparrow \\ S_h^{(k-1)} \text{ ist genau ausgewogen !} \\ \downarrow \\ S_h^{(k)} \curvearrowright \text{ diskrete LBB–Bd. wird zerstört ! } (**) \end{array}$$

■ **Satz 4.6:**

Vor.:
1. $f \in L_2(I),\ \ t \in [0,1] \quad (t \in (0,1] \text{ und } t = 0\ !)$
2. $X_h = \overset{\circ}{S}{}^{(k)}_{h,0} \times \overset{\circ}{S}{}^{(k)}_{h,0},\ \ M_h = S_h^{(k-1)},\ \ k \geq 2$

Bh.:
1. $\exists!\ (w_h, \theta_h; \gamma_h) \in X_h \times M_h :\ (\widetilde{4.13})_h$
2. Die diskreten Analoga $L_h$ und $L_h^{-1}$ zu $L$ und $L^{-1}$ sind gleichmäßig beschränkt in $t$.
3. Es gilt die Diskretisierungsfehlerabschätzung

$$(4.19) \qquad \|w - w_h\|_1 + \|\theta - \theta_h\|_1 + \|\gamma - \gamma_h\|_0 \leq$$
$$\leq c \left( \inf_{v_h \in W_h} \|w - v_h\|_1 + \inf_{\psi_h \in \Theta_h} \|\theta - \psi_h\|_1 + \right.$$
$$\left. + \inf_{\eta_h \in M_h} \|\gamma - \eta_h\|_0 \right)$$

mit $W_h = \overset{\circ}{S}{}^{(k)}_{h,0},\ \ \Theta_h = \overset{\circ}{S}{}^{(k)}_{h,0},\ \ M_h = S_h^{(k-1)}$ und
$c = \text{const.} > 0,\quad c = c\,(l,k),$
$c \neq c\,(h,t)$, solange $0 \leq t \leq 1$.

**Beweis:** (mms)

zu 1. und 2.: analog zu Satz 4.3 #

zu 3.: analog zu Satz 2.5 ($t = 0$)
(! ohne Störterm: $\curvearrowright$ für $t \in (0,1]$ sind Modifikationen notwendig !!).

**q.e.d.**

■ $\boxed{\textbf{Ü 4.2}}$

> Es sei $f \in H^{s-1}(I)$ mit $s \geq 0$ ($s = 0 \curvearrowright\; f \in H^{-1}(I) \curvearrowright\; (f, v)_0 \mapsto < f, v >$).
> Man zeige, daß dann für die Lösung $w \in \overset{\circ}{H}{}^1(I)$, $\theta \in \overset{\circ}{H}{}^1(I)$ und $\gamma \in L_2(I)$ von (4.13) die folgenden Regularitätsaussagen gelten:
>
> 1) $w \in H^{s+1}(I), \quad \theta \in H^{s+1}(I), \quad \gamma \in H^s(I)$;
>
> 2) $\exists\, c = \text{const.} > 0; \quad c \neq c\,(t)$:
>
> $(*)\ \|w\|_{s+1} + \|\theta\|_{s+1} + \|\gamma\|_s \leq c\,\|f\|_{s-1}$

$$(4.13)\ \begin{cases} (\theta', \psi')_0 + (v' - \psi, \gamma)_0 &= \ (f, v)_0 \quad \forall\, (v, \psi) \in X = \overset{\circ}{H}{}^1 \times \overset{\circ}{H}{}^1 \\ (w' - \theta, \eta)_0 - t^2(\gamma, \eta)_0 &= \ 0 \qquad\quad\ \forall\, \eta \in M = L_2 \end{cases}$$

<u>Lösung:</u>

- <u>$s = 0$:</u> folgt $(*)$ aus Satz 4.3: $\curvearrowright\ \|L^{-1}\| \leq c \neq c\,(t)$ ! #

- <u>$s = 1$:</u> $f \in L_2$ : (4.13) $\curvearrowright\ (v', \gamma)_0 = (f, v)_0 \quad \forall\, v \in \overset{\circ}{H}{}^1 \curvearrowright\ \gamma' = -f \in L_2$ per Def.

$$\Rightarrow \boxed{\gamma \in H^1 \text{ und } \|\gamma'\|_0 \leq \|f\|_0} \quad \text{(i)}$$

$$\gamma \in H^1 \quad \curvearrowright \quad \gamma = t^{-2}(w' - \theta) \curvearrowright\ w' = \theta + t^2\gamma \in H^1 \curvearrowright\ w'' = \theta' + t^2\gamma' \in L_2$$

$$\curvearrowright \quad \boxed{w \in H^2 \text{ und } \|w''\|_0 \leq \|\theta'\|_0 + t^2\,\|\gamma'\|_0} \quad \text{(ii)}$$

$$(\theta', \psi') \quad = \quad (\gamma, \psi)_0 \quad \forall\, \psi \in \overset{\circ}{H}{}^1 \curvearrowright\ \exists\, \theta'' = -\gamma \in L_2$$

$$\curvearrowright \quad \boxed{\theta \in H^2 \text{ und } \|\theta''\|_0 \leq \|\gamma\|_0} \quad \text{(iii)}$$

Aus $\boxed{s = 0}$ und (i) – (iii) folgt sofort $(*)$. #

- <u>$s \geq 2$:</u> (4.13) $\underset{s=1}{\iff}$ Euler-Gl.: $\boxed{\begin{array}{l} -\gamma' = f \\ -\theta'' - \gamma = 0 \\ \gamma = t^{-2}(w' - \theta) \end{array}} \iff \boxed{\begin{array}{l} -t^{-2}(w' - \theta)' = f \\ -\theta'' - t^{-2}(w' - \theta) = 0 \\ w\,(0) = w\,(l) = 0 \\ \theta\,(0) = \theta\,(l) = 0 \end{array}}$

**q.e.d.**

■ **Folgerung 4.7:**

Vor.: 1. $f \in H^{s-1}(I)$ mit $1 \leq s \leq k$, $t \in [0,1]$

2. $X_h = \overset{\circ}{S}{}^{(k)}_{h,0} \times \overset{\circ}{S}{}^{(k)}_{h,0}$, $M_h = S_h^{(k-1)}$, $k \geq 2$

Bh.: Dann gilt die Diskretisierungsfehlerabschätzung

$$\|w - w_h\|_1 + \|\theta - \theta_h\|_1 + \|\gamma - \gamma_h\|_0 \leq \bar{c}\, h^s \, \|f\|_{s-1}, \quad \bar{c} \neq \bar{c}\,(t,h) \tag{4.20}$$

**Beweis:** folgt sofort aus Satz 4.6, $\boxed{\text{Ü } 4.2}$ und Approx.-Satz II.4.5. **q.e.d.**

## 4.2 Plattenmodelle

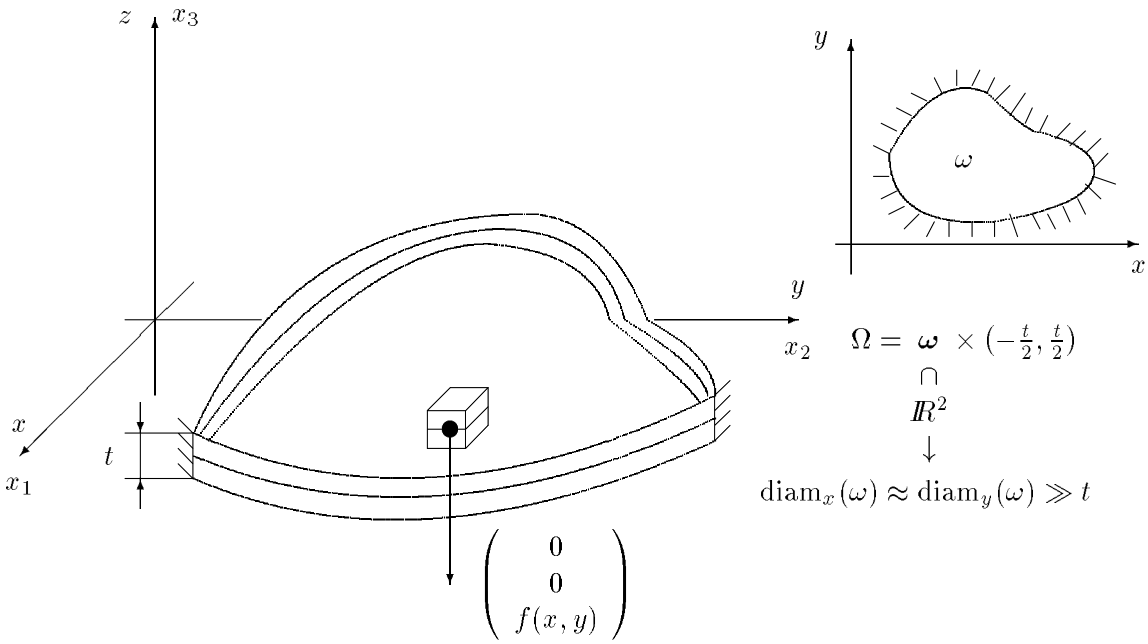
### 4.2.1 Hypothesen von Mindlin–Reissner und Kirchhoff–Love

■ **Btr. „dünne“ Platte**

$$\Omega = \omega \times \left(-\frac{t}{2}, +\frac{t}{2}\right) \subset \mathbb{R}^3 \tag{4.21}$$

aus homogenem und isotropem, linear elastischem Material mit konstanter Dicke $t$, $0 < t \ll \text{diam}\,(\omega)$, deren Mittelebene $\omega \subset \mathbb{R}^2$ mit der $(x,y)$–Ebene zusammenfällt. Der Einfachheit halber betrachten wir nur den Fall, daß die Platte

(4.22)
- a) fest eingespannt ist und
- b) nur durch vertikale (d.h. orthogonal zur Mittelebene) Volumenkräfte belastet wird.




## ■ Hypothesen von Mindlin und Reissner:

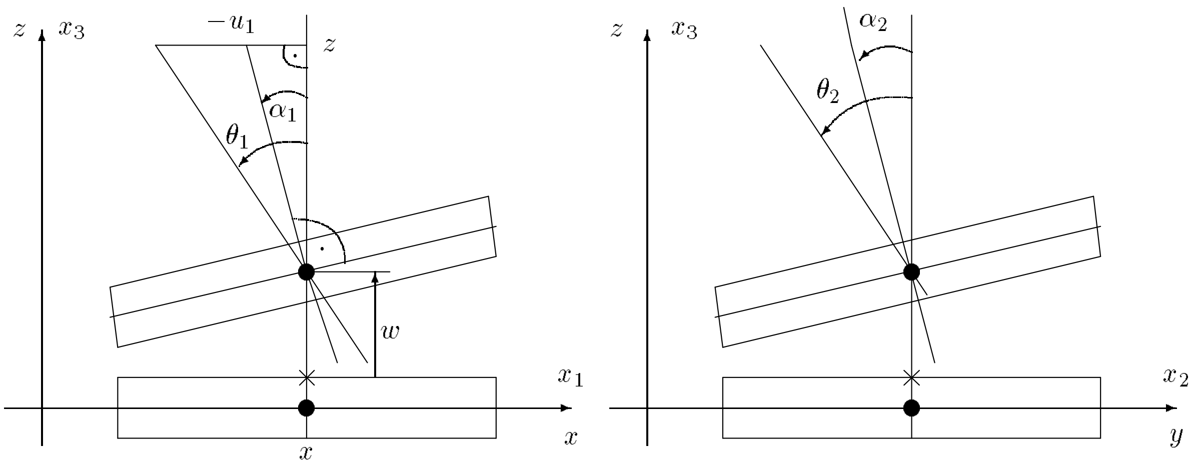
| | |
|---|---|
| H 1: | Linearitätshypothese:<br>Die Segmente auf jeder Normalen (zur Mittelebene) werden linear deformiert, und ihre Bilder liegen auf Geraden. |
| H 2: | Die Verschiebung in $z$-Richtung hängt nicht von $z$ ab. |
| H 3: | Die „Punkte" auf der Mittelebene werden nur in $z$-Richtung deformiert. |
| H 4: | $\sigma_{33} \approx 0 \quad (\curvearrowright \; \sigma_{33} = 0 \; !?)$ |

- (H 1) – (H 3) $\curvearrowright$ Verschiebungsansätze:

$$
(4.23) \quad \left\{ \begin{array}{lcl} u_3(x,y,z) & = & w\,(x,y) - \text{transversale Verschiebung, Durchbiegung,} \\ & & \qquad\qquad \text{Normalverschiebung} \\ u_i(x,y,z) & = & -z\,\theta_i\,(x,y), \quad i = 1,2 \\ & & \quad \downarrow \\ & & \quad \theta = (\theta_1, \theta_2) - \text{Verdrehung} \end{array} \right.
$$

- Illustration: $\hookrightarrow$ schubweiche Platte

$$\theta_1(x,y) \approx \tan\theta_1 = \frac{-u_1(x,y)}{z} \qquad\qquad \theta_2 \approx \tan\theta_2 = \frac{-u_2}{z}$$




$$\tan\alpha_1 = \frac{\partial\, w}{\partial\, x_1} \qquad\qquad \tan\alpha_2 = \frac{\partial\, w}{\partial\, x_2}$$

## Hypothesen von Kirchhoff–Love (Kirchhoff–Platte):

> H 1 – H 4 ($\uparrow$)
>
> + H 5: Normalenhypothese:
> Normale zur Mittelebene sind im deformierten Zustand wieder Normale zur (deformierten) Mittelfläche.

- (4.23) + (H 5) $\hookrightarrow$ Verschiebungsansätze: $\theta = \nabla w$

(4.24)
$$\left.\begin{cases} u_3(x,y,z) = w\,(x,y) \\ \theta_i(x,y) = \dfrac{\partial}{\partial\, x_i}\, w\,(x,y) \\ u_i(x,y,z) = -z\,\dfrac{\partial\, w}{\partial\, x_i}\,(x,y) \end{cases}\right\} \quad i = 1,2$$

- Illustration: $\hookrightarrow$ schubstarre Platte

## ■ Verzerrungszustand (für Mindlin = Reissner Platte):

- Aus Verschiebungsansatz (4.23) folgt

$$(4.25)\quad \left\{\begin{aligned} \varepsilon_{ij}(u) &= \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j}+\frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right) \underset{\substack{\uparrow \\ u_i=-z\,\theta_i,\ i=1,2}}{=} -\,z\,\varepsilon_{ij}(\theta),\quad i=1,2 \quad [-z\,w_{,ij}\ \ \text{KL}] \\ \varepsilon_{i3}(u) &= \varepsilon_{3i}(u)=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_3}+\frac{\partial u_3}{\partial x_i}\right)=\frac{1}{2}\left(-\,z\,\underbrace{\frac{\partial \theta_i}{\partial x_3}}_{=\,0}-\theta_i+\frac{\partial w}{\partial x_i}\right) \\ &= \frac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial x_i}-\theta_i\right),\quad i=1,2 \qquad [=0\ \ \text{KL}] \end{aligned}\right.$$

- Aus (H 4), d.h. $\sigma_{33} \cong 0$, und dem HOOKEschen Gesetz (3.29) für homogenes und isotropes Material ergibt sich:

$$0 \underset{\approx}{=} \sigma_{33} = \frac{E}{(1+\nu)\,(1-2\,\nu)}\,[\nu\,\varepsilon_{11}+\nu\,\varepsilon_{22}+(1-\nu)\,\varepsilon_{33}],\ \text{d.h.}$$

$$(4.26)\qquad \boxed{\varepsilon_{33} \cong -\,\frac{\nu}{1-\nu}\,[\varepsilon_{11}+\varepsilon_{22}]}$$

$$\varepsilon_{33}=\frac{\nu}{1-\nu}\,z\left[\frac{\partial\theta_1}{\partial x_1}+\frac{\partial\theta_2}{\partial x_2}\right]=\frac{\nu}{1-\nu}\,z\left\{\begin{array}{ll}\operatorname{div}\theta, & \text{MR}\\ \Delta w, & \text{KL}\end{array}\right.$$

- Bemerkung: (?)

  Die Beziehung

$$(4.26)\qquad \varepsilon_{33}=-\,\frac{\nu}{1-\nu}\,[\varepsilon_{11}+\varepsilon_{22}] \qquad (\text{H } 4)$$

  und die aus (4.23) folgende Beziehung

$$(4.27)\qquad \varepsilon_{33}=\frac{\partial u_3}{\partial x_3}=\frac{\partial w}{\partial z}=0 \qquad (\text{H } 2,\ \text{H } 3)$$

  sind eigentlich nur dann konsistent, wenn $\varepsilon_{11}+\varepsilon_{22}=0$ ist. In der Praxis wird zur Berechnung der inneren Energie der Ansatz (4.26) bzw. (4.27) mit verschiedenen „Korrekturfaktoren“ verwendet (??). Für unsere weitere Analysis ist das ohne Belangen !

### 4.2.2 Primale Variationsformulierungen

- **Btr. Energiefunktional (3.53) für homogenes und isotropes Material:**

$$(4.28) \qquad J(u) \underset{\substack{\uparrow \\ (3.53)}}{\overset{3D}{=}} \underbrace{\frac{1}{2}\int_\Omega \sigma_{ij}(u)\,\varepsilon_{ij}(u)\,dx}_{\text{innere Energie}} - \underbrace{\left(\int_\Omega f^T u\,dx + \int_{\Gamma_t} t^T u\,ds\right)}_{\substack{\text{potentielle Energie} \\ \text{der äußeren Kräfte}}} =$$

$$= \quad \ldots \quad (\downarrow)$$

- **Berechnung der Terme im Energiefunktional für die MR–Platte:**

  - Geometrie:

$$(4.21) \qquad \Omega = \omega \times (-\tfrac{t}{2}, +\tfrac{t}{2}) \quad \curvearrowright \quad \int_\Omega \ldots\,dx = \int_{-t/2}^{t/2} dz \int_\omega \ldots\,dx\,dy$$

  - Verschiebungsrandbedingungen auf $\Gamma_u = \partial\,\omega \times (-\frac{t}{2}, +\frac{t}{2})$:

$$(4.29) \qquad u \equiv \left.\begin{bmatrix} u_1(x) \\ u_2(x) \\ u_3(x) \end{bmatrix}\right|_{\partial\omega\times(-\frac{t}{2},+\frac{t}{2})} \overset{(4.22)_{\mathrm{a)}}}{=} \mathbf{O} \iff \frac{(4.23) \;\; w = 0, \;\; \theta = \mathbf{O} \text{ auf } \partial\,\omega \quad (4.29)_{\mathrm{MR}}}{(4.24) \;\; w = 0, \;\; \frac{\partial w}{\partial \vec{n}} = 0 \text{ auf } \partial\,\omega \quad (4.29)_{\mathrm{KL}}}$$

  - Kräfterandbedingungen auf $\Gamma_t = \omega \times \{z = \pm t/2\}$:

$$(4.30) \qquad t \overset{(4.22)_{\mathrm{b)}}}{=} \mathbf{O} \text{ auf } \Gamma_t$$

  - Volumenkräfte:

$$(4.31) \qquad f(x) \underset{(4.22)_{\mathrm{b)}}}{=} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ f(x,y) \end{bmatrix} \quad \curvearrowright \quad f^T u = f_3\,u_3 = f(x,y)\,w(x,y)$$

- Umschreibung des Arbeitstermes $\sigma^T \varepsilon$:

$$(4.32)\quad \sigma^T \varepsilon = \sigma_{ij}(u)\,\varepsilon_{ij}(u) = \sum_{i,j=1}^{3} \varepsilon_{ij}\sigma_{ij} =$$

$$= \sum_{i,j=1}^{2} \varepsilon_{ij}\sigma_{ij} + 2\sum_{j=1}^{2} \varepsilon_{3j}\sigma_{3j} =$$

HOOKE (3.29):

$$\sigma_{11} = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)}\Big[(1-\nu)\,\varepsilon_{11} + \nu\,\varepsilon_{22} + \nu\Big(\overbrace{-\frac{\nu}{1-\nu}[\varepsilon_{11}+\varepsilon_{22}]}^{\overset{(4.26)}{=}\ \varepsilon_{33}}\Big)\Big]$$

$$= \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)}\left[\frac{(1-2\nu+\nu^2)\,\varepsilon_{11}+\nu\,(1-\nu)\,\varepsilon_{22}-\nu^2(\varepsilon_{11}+\varepsilon_{22})}{1-\nu}\right]$$

$$= \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)}\left[\frac{(1-2\nu)\,\varepsilon_{11}+\nu\,(1-2\nu)\,\varepsilon_{22}}{1-\nu}\right]$$

$$= \frac{E}{1+\nu}\left[\varepsilon_{11} + \frac{\nu}{1-\nu}\,(\varepsilon_{11}+\varepsilon_{22})\right]$$

$$\sigma_{22} = \frac{E}{1+\nu}\left[\varepsilon_{22} + \frac{\nu}{1-\nu}\,(\varepsilon_{11}+\varepsilon_{22})\right] \quad \text{(analog)}$$

$$\sigma_{ij} = \frac{E}{1+\nu}\,\varepsilon_{ij},\quad i,j=\overline{1,3} : i \neq j$$

$$= \frac{E}{1+\nu}\left[\sum_{i,j=1}^{2} \varepsilon_{ij}^2 + \frac{\nu}{1-\nu}\,(\varepsilon_{11}+\varepsilon_{22})^2 + 2\sum_{j=1}^{2} \varepsilon_{3j}^2\right]$$

$$\left[\begin{aligned} &= \frac{E}{1+\nu}\sum_{\substack{i,j=1\\(i,j)\neq(3,3)}}^{3} \varepsilon_{ij}^2 + \frac{E\,\nu}{(1+\nu)\,(1-\nu)}\,(\varepsilon_{11}+\varepsilon_{22})^2 \\ &\left\{\frac{E}{1+\nu} = 2\,\mu,\quad \frac{E\,\nu}{(1+\nu)\,(1-\nu)} \overset{(3.30)}{=} \lambda\,\frac{2\,\mu}{\lambda+2\,\mu}\right. \\ &= 2\,\mu \sum_{\substack{i,j=1\\(i,j)\neq(3,3)}}^{3} \varepsilon_{ij}^2 + \lambda\,\frac{2\,\mu}{\lambda+2\,\mu}\,(\varepsilon_{11}+\varepsilon_{22})^2 \end{aligned}\right]$$

$$\overset{(4.25)}{\overset{\downarrow}{=}} 2\,\mu \sum_{i,j=1}^{2} z^2\,\varepsilon_{ij}^2\,(\theta) + 4\,\mu\,\frac{1}{4}\,|\nabla w - \theta|^2 + \lambda\,\frac{2\,\mu}{\lambda+2\,\mu}\,z^2\,(\operatorname{div}\theta)^2$$

- **Aus (4.28) erhalten wir nun mit (4.21), (4.29) – (4.32) das Energiefunktional für die MR–Platte:**

$$
\begin{aligned}
(4.33)\quad J(u) &= \frac{1}{2}\int_\omega \int_{-t/2}^{+t/2} \sigma^T(u)\,\varepsilon(u)\,dx - \int_{-t/2}^{+t/2}\int_\omega f(x,y)\,w(x,y)\,dx\,dy\,dz \\
&\qquad \frac{z^3}{3}\Big|_{-\frac{t}{2}}^{+\frac{t}{2}} = \frac{2}{3}\left(\frac{t}{2}\right)^3 = \frac{t^3}{12} \\
&\qquad \downarrow \\
&= \frac{1}{2}\int_\omega \left[2\,\mu\,\frac{t^3}{12}\sum_{i,j=1}^{2}\varepsilon_{ij}^2(\theta) + \mu\,t\,|\nabla w - \theta|^2 + \lambda\,\frac{2\,\mu}{\lambda+2\,\mu}\,\frac{t^3}{12}\,(\mathrm{div}\;\theta)^2\right] dx\,dy - \\
&\qquad - t\int_\omega f\cdot w\,dx\,dy = \\
&= \frac{1}{2}\Bigg[\underbrace{\frac{t^3}{12}\int_\omega\left[2\,\mu\sum_{i,j=1}^{2}\varepsilon_{ij}^2(\theta) + \lambda\,\frac{2\,\mu}{\lambda+2\,\mu}\,(\mathrm{div}\;\theta)^2\right] dx\,dy}_{\text{Biegeanteil}} + \\
&\qquad + \underbrace{\mu\,t\int_\omega |\nabla w - \theta|^2\,dx\,dy}_{\text{Scherterm}}\Bigg] - t\int_\omega f\,w\,dx\,dy = \\
&= t^3\left\{\frac{1}{2}\left[a(\theta,\theta) + \mu\,t^{-2}\int_\omega |\nabla w - \theta|^2\,dx_1\,dx_2\right] - \int_\omega t^{-2} f\,w\,dx_1\,dx_2\right\}
\end{aligned}
$$

- **Mit der Skalierung**

  - $\tilde{t}^{-2} \;=\; (\sqrt{\mu}/t)^2 \;\rightsquigarrow\; t^{-2}$
  - $\tilde{f} \;=\; t^{-2} f \;\rightsquigarrow\; f$

  führt das Energieminimierungsproblem

  $$J(u) \longrightarrow \min$$

  über der Menge der geometrisch zulässigen Verschiebungen auf das folgende Minimumproblem für die MR–Platte:

$(4.34)_{\mathrm{MP}}$

Ges. $w \in \overset{\circ}{H}{}^1(\omega)$ und $\theta = (\theta_1, \theta_2) \in \left[\overset{\circ}{H}{}^1(\omega)\right]^2$:

$$J(w,\theta) = \inf_{\substack{v \in \overset{\circ}{H}{}^1(\omega) \\ \varphi \in \overset{\circ}{H}{}^1(\omega)^2}} J(v,\varphi)$$

mit dem Energiefunktional

$$J(v,\varphi) := \tfrac{1}{2}\left[a(\varphi,\varphi) + t^{-2}\int_\omega |\nabla v - \varphi|^2\, dx_1\, dx_2\right] - \int_\omega f\, v\, dx_1\, dx_2,$$

wobei

$$a(\varphi,\varphi) := \tfrac{1}{12}\int_\omega \left[2\,\mu \sum_{i,j=1}^{2} \varepsilon_{ij}^2(\varphi) + \lambda\, \tfrac{2\,\mu}{\lambda+2\,\mu}\, (\operatorname{div}\varphi)^2\right] dx_1\, dx_2$$

für die MR–Platte, das offenbar (mms) zu dem folgenden primalen Variationsproblem äquivalent ist:

$(4.34)_{\mathrm{VP}}$

Ges. $(w,\theta) \in X = \overset{\circ}{H}{}^1(\omega) \times \left(\overset{\circ}{H}{}^1(\omega)\right)^2$ :

$$\underbrace{a(\theta,\varphi) + t^{-2}\,(\nabla w - \theta, \nabla v - \varphi)_0}_{=:\, a(w,\theta;\, v,\varphi)} = \underbrace{(f,v)_0}_{=:< F;\, v,\varphi >} \qquad \forall\, (v,\varphi) \in X.$$

■ $\boxed{\textbf{Ü 4.3}}$

Man zeige, daß

1. die Voraussetzungen des Satzes I.2.9 von Lax & Milgram erfüllt sind (↬ $\exists!$ + Fixpunktiteration) und
2. das Variationsproblem (4.34) ähnlich wie im Falle des Timoshenko–Balkens für $t \to 0$ schlecht konditioniert wird, d.h. $\mu_2/\mu_1 \to \infty$ für $t \to 0$.

## ■ Standarde FE–Approximation der MR–Platte:

- Konforme FE–Teilräume $X_h \subset X = \mathring{H}^1(\omega) \times \left(\mathring{H}^1(\omega)\right)^2$:

  $\omega \rightsquigarrow \Omega \subset \mathbb{R}^2$ (Mittelfläche)

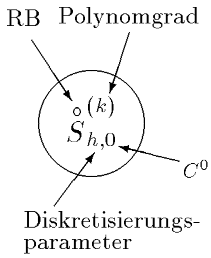
$$(4.35)\quad X_h = \mathring{S}^{(k)}_{h,0} \times \left(\mathring{S}^{(k)}_{h,0}\right)^2 \subset X \longleftarrow \boxed{\text{2D } C^0\text{–Elemente}}\,!$$

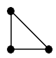
$$\mathring{S}^{(k)}_{h,0} := S_h^{(k)}(\Omega_h) \cap \mathring{H}^1(\Omega) \subset C(\bar{\Omega})$$

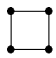
$$\bar{\Omega}_h = \bigcup_{r \in \mathbb{R}_h} \bar{\delta}_r \subset \Omega : \quad \text{reguläre Triang. (Nu II [22])},\quad \text{dist}\,(\partial\Omega_h, \partial\Omega) = O\left(h^{k+1}\right)$$

$$S_h^{(k)} = \{v \in L_2(\Omega_h) : v|_{\delta_r} \leftrightarrow v|_\Delta \subset Q_\Delta \ \ \forall\, r \in \mathbb{R}_h\} \not\subset C^0(\Omega_h)$$

$$Q_\Delta \supset P_k$$




z.B.: $Q_\Delta = P_k$:  $k = 1$

$Q_\Delta = Q_k$:  $k = 1$

- FE–Schema: ( $\boxed{\text{Ü } 4.3}$ $\curvearrowright$ $\exists!$ + Fixpunktiteration: o.k.)

$$(4.34)_h \quad \text{Ges. } (w_h, \theta_h) \in X_h : \quad a\,(w_h, \theta_h; v_h, \varphi_h) = (f, v_h)_0 \quad \forall\, (v_h, \varphi_h) \in X_h$$

$$\updownarrow \qquad\qquad \updownarrow$$

$$(\underline{4.34})_h \quad \text{Ges. } (\underline{w}_h, \underline{\theta}_h)^T \in \mathbb{R}^{N_h} : \quad \underset{\text{spd}}{K_h} \binom{\underline{w}_h}{\underline{\theta}_h} = \binom{\underline{f}_h}{\mathbf{O}} \ \text{ in } \mathbb{R}^{N_h}$$

- Cea–Satz I.4.3 + Approximationssatz II.4.5 liefern:

$$(4.36)\quad \|w - w_h\|_1 + \|\theta - \theta_h\|_1 \le \frac{\mu_2}{\mu_1} \left[ \inf_{v_h \in \mathring{S}^{(k)}_{h,0}} \|w - v_h\|_1 + \inf_{\varphi_h \in \left(\mathring{S}^{(k)}_{h,0}\right)^2} \|\theta - \varphi_h\|_1 \right] \le$$

$$\le \underset{\underset{t \to 0}{\longrightarrow \infty}}{(\mu_2/\mu_1)}\, h^s \left(\|w\|_{s+1} + \|\theta\|_{s+1}\right), \text{ falls } w_i\, \theta_i \in H^{s+1}(\Omega),\ s \le k$$

$$\longleftarrow \boxed{\text{Ü } 4.3}\,! \qquad \boxed{q = 2}\ ?$$

- Konditionszahl (siehe Satz II.4.4):

$$(4.37)\qquad \kappa\,(K_h) = 0\left(\frac{\mu_2}{\mu_1}\, h^{-2}\right) \underset{\underset{\boxed{\text{Ü } 4.3}}{\uparrow}}{=} O\left(t^{-q}\, h^{-2}\right), \quad h \to 0, \quad t \to 0\ !$$

■ **Primale Variationsformulierung für die fest eingespannte KL–Platte und ihre FE–Approximation:**

- Mit der Normalenhypothese (vgl. (4.24))

  (4.38) $$\theta = \nabla w$$

  ergibt sich das Energiefunktional (4.33) zu:

  (4.39) $$J(u) = t^3 \left\{ \frac{1}{2}\, a(\nabla w, \nabla w) - \int_\omega \underbrace{t^{-2} f}_{=\tilde{f} \rightsquigarrow f} \; w \, dx_1 \, dx_2 \right\}$$

- Mit der Skalierung

  $\tilde{f} = t^{-2} f \rightsquigarrow f$ und mit $\omega \rightsquigarrow \Omega$

  führt das Energieminimierungsproblem

  $J(u) \longrightarrow \min$

  über der Menge der geometrisch zulässigen Verschiebungen zum folgenden Minimumproblem für die KL–Platte:

(4.40)$_{\text{MP}}$

$$\boxed{\begin{aligned}
&\text{Ges. } w \in \overset{\circ}{H}{}^2(\Omega) : J(w) = \inf_{v \in \overset{\circ}{H}{}^2(\Omega)} J(v), \text{ wobei}\\
J(v) &= \frac{1}{2}\, a(\nabla v, \nabla v) - \int_\Omega f\, v \, dx_1\, dx_2,\\
a(\nabla v, \nabla w) &\equiv \frac{1}{12}\int_\Omega \Bigg[ 2\mu \sum_{i,j=1}^{2} \underbrace{\varepsilon_{ij}(\nabla v)}_{v_{,ij}} \underbrace{\varepsilon_{ij}(\nabla w)}_{w_{,ij}} + \\
&\qquad + \lambda \frac{2\mu}{\lambda + 2\mu} \underbrace{\operatorname{div} \nabla v}_{\Delta v} \underbrace{\operatorname{div} \nabla w}_{\Delta w} \Bigg] dx = \\
&= \frac{1}{12}\int_\Omega \left[ 2\mu \sum_{i,j=1}^{2} v_{,ij}\, w_{,ij} + \lambda \frac{2\mu}{\lambda+2\mu} \Delta v \, \Delta w \right] dx
\end{aligned}}$$

- Offenbar ist das Minimumproblem (4.41)$_{\text{MP}}$ äquivalent zum folgenden primalen Variationsproblem für die KL–Platte:

(4.40)$_{\text{VP}}$

$$\boxed{\begin{aligned}
&\text{Ges. } w \in X = \overset{\circ}{H}{}^2(\Omega) : \\
&a(\nabla v, \nabla w) = (f, v)_0 \quad \forall\, v \in X
\end{aligned}}$$

- **Lemma 4.8:**

(4.41)
$$\boxed{\begin{array}{l} a\,(\nabla v, \nabla w) = c \int\limits_{\Omega} \Delta w\, \Delta v\, dx_1\, dx_2 \quad \forall\; v, w \in \overset{\circ}{H}{}^2(\Omega) \\[2ex] \text{mit}\;\; c = \dfrac{\mu}{3} \cdot \dfrac{\lambda + \mu}{\lambda + 2\,\mu}\,. \end{array}}$$

**Beweis:**

$$a\,(\nabla v, \nabla w) = \frac{1}{12} \int\limits_{\Omega} \Big[ 2\,\mu\, \underbrace{w_{,ij}\, v_{,ij}}_{\text{b)}} + \lambda\, \frac{2\,\mu}{\lambda + 2\,\mu}\, \underbrace{\Delta w\, \Delta v}_{\text{a)}} \Big]\, dx_1\, dx_2$$

$$\begin{aligned} \text{a)}\;\; \Delta w\, \Delta v \;&=\; (w_{,11} + w_{,22})\,(v_{,11} + v_{,22}) = w_{,11}\, v_{,11} + \underline{w_{,11}\, v_{,22}} + \underline{\underline{w_{,22}\, v_{,11}}} + w_{,22}\, v_{,22} \\ \text{b)}\;\; w_{,ij}\, v_{,ij} \;&=\; w_{,11}\, v_{,11} + \underline{w_{,12}\, v_{,12}} + \underline{\underline{w_{,12}\, v_{,12}}} + w_{,22}\, v_{,22} \end{aligned}$$

Nun gilt offenbar $\forall\; v, w \in \overset{\bullet}{C}{}^{\infty}(\Omega)$:

$$\int\limits_{\Omega} \frac{\partial^2 w}{\partial x\, \partial y}\, \frac{\partial^2 v}{\partial x\, \partial y}\, dx\, dy = -\int\limits_{\Omega} \frac{\partial^3 w}{\partial\, x^2\, \partial y}\, \frac{\partial v}{\partial y}\, dx\, dy + \int\limits_{\partial\Omega} \frac{\partial^2 w}{\partial x\, \partial y}\, \underbrace{\frac{\partial v}{\partial y}}_{=\,0}\, n_x\, ds =$$

$$= \int\limits_{\Omega} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\, \frac{\partial^2 v}{\partial y^2}\, dx\, dy - \int\limits_{\partial\Omega} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\, \frac{\partial v}{\partial y}\, n_y\, ds + \int\limits_{\partial\Omega} \frac{\partial^2 w}{\partial x\, \partial y}\, \frac{\partial v}{\partial y}\, n_x\, ds =$$

$$= \int\limits_{\Omega} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\, \frac{\partial^2 v}{\partial y^2}\, dx\, dy$$

Wegen $\overline{\overset{\bullet}{C}{}^{\infty}(\Omega)}^{\|\cdot\|_2} = \overset{\circ}{H}{}^2(\Omega)$ folgt (4.41) sofort. **q.e.d.**

- Das primale Variationsproblem $(4.40)_{\text{VP}}$ für die fest eingespannte KL–Platte ist offenbar äquivalent zur Variationsformulierung

$(4.42)_{\text{VP}}$
$$\boxed{\text{Ges. } w \in \overset{\circ}{H}{}^2(\Omega) : \int\limits_{\Omega} \Delta w\, \Delta v\, dx = \int\limits_{\Omega} \bar{f}\, v\, dx \quad \forall\; v \in \overset{\circ}{H}{}^2(\Omega)}$$

des 1. biharmonischen RWPs (vgl. auch Nu II, Pkt. 3.1.2.3 [22])

$(4.42)_{\text{KF}}$
$$\boxed{\begin{array}{rcl} \Delta^2 w & = & \bar{f} \;\;\text{in}\;\; \Omega \\ w = \dfrac{\partial w}{\partial\, \vec{n}} & = & 0 \;\;\text{auf}\;\; \partial\,\Omega \end{array}}$$

mit geeignet gewähler rechter Seite

$$\bar{f} = \frac{3}{\mu}\,\frac{\lambda + 2\,\mu}{\lambda + \mu}\,\underset{\substack{\uparrow \\ (4.40)}}{f} \;=\; \frac{3}{\mu}\,\frac{\lambda + \mu}{\lambda + 2\,\mu}\,t^{-2}\,\underset{\substack{\uparrow \\ \text{Volumenkraftdichte (!)}}}{f}$$

- $\boxed{\text{Ü 4.4}}$

  Man zeige, daß $\exists\ \mu_1, \mu_2 = \text{const.} > 0$:

  a) $a\,(\nabla v, \nabla v) \;\;\geq \mu_1\,\|v\|_2^2 \qquad \forall\ v \in \overset{\circ}{H}{}^2(\Omega)$,

  b) $|a\,(\nabla w, \nabla v)| \leq \mu_2\,\|w\|_2\,\|v\|_2 \quad \forall\ v, w \in \overset{\circ}{H}{}^2(\Omega)$

  und berechne $\mu_1 = ?$
  $\mu_2 = ?$ ,

  wobei $\|v\|_2^2 := |v|_2^2 := \int\limits_\Omega (v_{,11}^2 + 2\,v_{,12}^2 + v_{,22}^2)\,dx\,dy$.

  Aus dem Satz I.2.9 von Lax & Milgram folgt dann für geg. $f \in L_2(\Omega)$ bzw. $H^{-1}(\Omega)$:

  1. $\exists !\ w \in \overset{\circ}{H}{}^2(\Omega)$: (4.40) $\equiv$ (4.42)
  2. Fixpunktiteration zur Bestimmung von $w$.

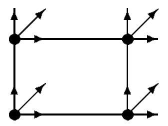
- FE–Approximationen:

  1. Konforme FE–Approximationen:

     $\to$ erfordern wegen $X_h \subset X = \overset{\circ}{H}{}^2(\Omega)$ $\boxed{\boxed{C^1\text{–Elemente}}}$ !

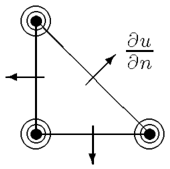
     $\to$ Beispiele von klassischen $C^1$–Elementen:

     - Hermite–Element:
       $Q_\triangleright = Q_3 \supset P_3$

       $u^{(r,\alpha,\beta)} := \partial^\beta u_h(x)$
       $\beta = (\beta_1, \beta_2),\ \ \beta_i = 0, 1$
       d.h. $u,\ u_x,\ u_y,\ u_{xy}$

     - Agyris–Element:
       $Q_\triangleright = P_5$

       $u,\ u_x,\ u_y,\ u_{xx},\ u_{xy},\ u_{yy}$

     $\to$ FE–Schema: $X_h = \text{span}\,\{p^{(i,\beta)} : i \in \omega_h,\ \ \beta \in \text{DOF}_i\} \subset X$

$$\begin{array}{lll} (4.40)_h & \text{Ges. } w_h \in X_h : & a\,(\nabla w_h, \nabla v_h) = (f, v_h)_0 \quad \forall\ v_h \in X_h \\ \updownarrow & \qquad\updownarrow & \text{spd} \\ (\underline{4.40})_h & \text{Ges. } \underline{w}_h \in I\!R^{N_h} : & K_h\,\underline{w}_h = \underline{f}_h \ \text{ in } \ I\!R^{N_h} \end{array}$$

$\rightarrow$ Resultate:

1) Cea– und „Approximationssätze“ liefern (mms !?)

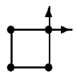
$$\|w - w_h\|_2 \leq \frac{\mu_2}{\mu_1} \inf_{v_h \in X_h} \|w - v_h\|_2 \leq c\, h^{s-2}\, \|w\|_s, \quad 2 < s \leq k,$$

falls $w \in \overset{\circ}{H}{}^2(\Omega) \cap H^s(\Omega)$, $\;Q_\Delta \supset P_k$.

2) $\kappa\,(K_h) = O\,(h^{-4})$ (vgl. Satz II.4.4)

2. Nichtkonforme FE–Approximationen: $X_h \not\subset X$ !

$(4.43)_h$ Ges. $w_h \in X_h : a_h\,(w_h, v_h) = (f, v_h)_{0h} \quad \forall\, v_h \in X_h$

z.B.: – ADINI–Element  $u, u_x, u_y \curvearrowright O\,(h)$

– DKT–Element (Discrete–Kirchhoff–Triangle) [4]

Erfordern spezielle Analysis (2. Strangsches Lemma, Äquivalenz zu gem. FE–Approximationen).

### 4.2.3 Gemischte Methoden für die Kirchhoff–Platte

## Formale Ableitung einer gemischten Formulierung:

- Das Kirchhoffsche Plattenproblem (4.40) kann offenbar auch als Minimumproblem für den Verdrehungsvektor $\theta$ mit der Nebenbedingung $\theta = \nabla w$ in Gleichungsform formuliert werden:

(4.44)
$$\boxed{\tfrac{1}{2}\, a\,(\theta, \theta) - (f, w)_0 \;\longrightarrow\; \min \qquad \text{unter der NB: } \theta = \nabla w}$$

wobei

(4.45)
$$a\,(\theta, \varphi) = \frac{1}{12} \int\limits_\Omega \left[ 2\,\mu\, \varepsilon_{ij}(\theta)\, \varepsilon_{ij}(\varphi) + \lambda\, \frac{2\,\mu}{\lambda + 2\,\mu}\, \operatorname{div} \theta\, \operatorname{div} \varphi \right] dx_1\, dx_2$$

eine symmetrische Bilinearform ist.

- Das MP (4.44) mit NB ist mathematisch exakt als restringiertes Minimumproblem (RMP) der Form (2.28) formulierbar:

(4.44)
$$\boxed{\begin{array}{l} \text{Ges. } (w, \theta) \in \overbrace{V_0 = \{(v, \varphi) \in X = ?\, :\;}^{\boldsymbol{V_g}} \overbrace{(\nabla v - \varphi, \eta)_0 = 0}^{\boldsymbol{b\,((v,\varphi),\eta)}} \;\; \forall\, \eta \in M = ?\} : \\[2ex] \qquad J\,(w, \theta) = \inf\limits_{(v, \varphi) \in V_0} J\,(v, \varphi) \\[2ex] \text{mit} \\[2ex] \qquad J\,(v, \varphi) := \tfrac{1}{2}\, a\,(\varphi, \varphi) - (f, v)_0 \end{array}}$$

- Dem <u>restringierten Minimumproblem</u> (4.44) ist das folgende <u>gemischte Variationsproblem</u> (GVP) zugeordnet:

(4.46)
$$\boxed{\begin{array}{llll}
\multicolumn{4}{l}{\text{Ges. } (w,\theta) \in X = ? \text{ und } \gamma \in M = ? \quad \text{(Lagrange–Faktor):}} \\
a(\theta,\varphi) & + (\nabla v - \varphi, \gamma)_0 & = (f,v)_0 & \forall\, (v,\varphi) \in X \\
\boldsymbol{a((w,\theta);(v,\varphi))} & \boldsymbol{+\, b((v,\varphi);\gamma)} & \boldsymbol{= \,< f;(v,\varphi) >} & \boldsymbol{\forall\, (v,\varphi) \in X} \\
(\nabla w - \theta, \eta)_0 & & = 0 & \forall\, \eta \in M \\
\boldsymbol{b((w,\theta);\eta)} & & \boldsymbol{= \,< g, \eta >} & \boldsymbol{\forall\, \eta \in M}
\end{array}}$$

wobei

$$\boldsymbol{a((w,\theta);(v,\varphi))} := a(\theta,\varphi) = \frac{1}{12}\int_\Omega \left[2\,\mu\,\varepsilon_{ij}(\theta)\,\varepsilon_{ij}(\varphi) + \lambda\,\frac{2\,\mu}{\lambda+2\,\mu}\,\mathrm{div}\,\theta\,\mathrm{div}\,\varphi\right] dx\,dy,$$

$$\boldsymbol{b((w,\theta);\eta)} := \,< \nabla w - \theta, \eta >_{M^*\times M} = (\nabla w - \theta, \eta)_0$$

$$\boldsymbol{< f;(v,\varphi) >} := \,< f, v >, \quad \boldsymbol{g = 0}.$$

- Für die <u>fest eingespannte Kirchhoff–Platte</u> gibt es die folgenden Möglichkeiten, die Räume $X$ und $M$ zu wählen:

1) <u>Kanonische Wahl:</u>

$$\begin{array}{ccccccc}
X = & \overset{\circ}{H}{}^2(\Omega) & \times & \overset{\circ}{H}{}^1(\Omega)^2, & M = & H^{-1}(\Omega)^2 & \\
& \Cup \; ? & & \Cup & & \Cup & \\
& w & & \theta & & \gamma \; ? & \cancel{L_2(\Omega)^2} \\
& \Cap \; \text{o.k.} & & \Cap & & \Cap &
\end{array}$$

2) $X = \overset{\circ}{H}{}^1(\Omega) \times \overset{\circ}{H}{}^1(\Omega)^2, \quad M = H^{-1}(\mathrm{div},\Omega) \subset H^{-1}(\Omega)^2$

mit $H^{-1}(\mathrm{div},\Omega) := \{\eta \in H^{-1}(\Omega)^2 : \mathrm{div}\,\eta \in H^{-1}(\Omega)\} \subset H^{-1}(\Omega)^2$.

■ **<u>Zur Wahl 1):</u>** $X = \underset{}{\overset{w}{\overset{\circ}{H}{}^2(\Omega)}} \times \overset{\theta}{[\overset{\circ}{H}{}^1(\Omega)]^2}, \quad \overset{\gamma}{M} = \overset{[\overset{\circ}{H}{}^1(\Omega)^2]^*}{[H^{-1}(\Omega)]^2}$ :

- $\|(w,\theta)\|_X = \left[\|w\|_2^2 + \|\theta\|_1^2\right]^{0.5}, \quad \|w\|_2 = \|\nabla w\|_1 = |||w|||_2,$
  $\|\theta\|_1 = \|\nabla\theta\|_0 = |||\theta|||_1;$

$$\|\eta\|_M \equiv \|\eta\|_{-1} := \sup_{\varphi \in \overset{\circ}{H}{}^1(\Omega)^2} \frac{< \varphi, \eta >_{M^*\times M}}{\|\varphi\|_1}$$

- Die Bilinearformen $a(\cdot,\cdot)$ und $b(\cdot,\cdot)$ sind offenbar stetig !
  - $|a((w,\theta),(v,\varphi))| = |a(\theta,\varphi)| \leq \underset{\substack{\downarrow \\ \alpha_2 = ? \quad (\text{mms})}}{\alpha_2} \|\theta\|_1 \, \|\varphi\|_1 \leq \alpha_2 \, \|(w,\theta)\|_X \, \|(v,\varphi)\|_X$ o.k.
  - $|b((w,\theta),\eta)| = | < \nabla w - \theta, \eta > | \leq | < \nabla w, \eta > | + | < \theta, \eta > | =$

$$= \boxed{\frac{| < \nabla w, \eta > |}{|||\nabla w|||_1}} \, |||\nabla w|||_1 + \boxed{\frac{| < \theta, \eta > |}{|||\theta|||_1}} \, |||\theta|||_1 \leq$$

$$\leq \sup_{\varphi \in \overset{\circ}{H}{}^1(\Omega)^2} \frac{< \varphi, \eta >}{|||\varphi|||_1} \, |||\nabla w|||_1 + \sup_{\varphi \in \overset{\circ}{H}{}^1(\Omega)^2} \frac{< \varphi, \eta >}{|||\varphi|||_1} \, |||\theta|||_1 =$$

$$= (\|w\|_2 + \|\theta\|_1) \, \|\eta\|_{-1} \leq \underset{\substack{\| \\ \beta_2}}{\boxed{\sqrt{2}}} \, \|(w,\theta)\|_X \, \|\eta\|_M \qquad \#$$

- Elliptizität von $a(\cdot,\cdot)$ auf dem Kern
  $V_0 := \{(v,\varphi) \in X : b((v,\varphi);\eta) \equiv < \nabla v - \varphi, \eta > = 0 \;\; \forall\, \eta \in M = H^{-1}(\Omega)^2\}$
  der Bilinearform $b(\cdot,\cdot)$, d.h. für $\varphi = \nabla v$ in $\overset{\circ}{H}{}^1(\Omega)^2$:

$$a((v,\varphi),(v,\varphi)) = a(\varphi,\varphi) \geq \frac{2\,\mu}{12} \, \|\varepsilon(\varphi)\|_0^2 \underset{\substack{\uparrow \\ \boxed{\text{Lemma 3.2: 1. KORNsche Ungl.}}}}{\geq} \frac{2\,\mu}{12} \, \frac{1}{2} \, |||\varphi|||_1^2 =$$

$$= \frac{\mu}{12} \left[ \frac{1}{2} \, |||\varphi|||_1^2 + \frac{1}{2} \, |||\varphi|||_1^2 \right] = \frac{\mu}{24} \left[ |||\nabla v|||_1^2 + |||\varphi|||_1^2 \right] =$$

$$= \frac{\mu}{24} \, \|(v,\varphi)\|_X^2, \text{ d.h. } \alpha_1 = \mu/24. \qquad \#$$

- <u>LBB–Bedingung:</u>

$$\sup_{(v,\varphi) \in X} \frac{b((v,\varphi),\eta)}{\|(v,\varphi)\|_X} = \sup_{(v,\varphi) \in X} \frac{< \nabla v - \varphi, \eta >}{[\|v\|_2^2 + \|\varphi\|_1^2]^{0.5}} \underset{\substack{\boxed{v=0} \\ \downarrow}}{\geq}$$

$$\geq \sup_{\varphi \in \overset{\circ}{H}{}^1(\Omega)^2} \frac{- < \varphi, \eta >}{\|\varphi\|_1} = \|\eta\|_{-1} = \|\eta\|_M, \text{ d.h. } \beta_1 = 1. \qquad \#$$

- Damit sind alle Voraussetzungen des Satzes 2.2 von Brezzi erfüllt. Folglich gilt:

**Satz 4.9:**

| | |
|---|---|
| Vor.: | 1) $X = \overset{\circ}{H}{}^2(\Omega) \times \overset{\circ}{H}{}^1(\Omega)^2, \quad M = H^{-1}(\Omega)^2$ |
| | 2) $f \in H^{-2}(\Omega)$ |
| Bh.: | Dann gilt: |
| | 1) $\exists!\ ((w,\theta),\gamma) \in X \times M :\quad (4.46)$ |
| | 2) A-priori–Abschätzung: $\exists\ c = \text{const.} > 0$: |
| | (4.47) $\quad \|w\|_2 + \|\theta\|_1 + \|\gamma\|_{-1} \le c\,\|f\|_{-2}$ |

- Bemerkung:

  Blum & Rannacher [1980] zeigen unter den Voraussetzungen

  1) $\Omega$ – konvex,
  2) $f \in H^{-1}(\Omega)$

  das Regularitätsresultat:

$$(4.48)\qquad \begin{cases} 1) & w \in H^3(\Omega),\quad \theta \in H^2(\Omega)^2,\quad \gamma \in L_2(\Omega)^2 \\ 2) & \|w\|_3 + \|\theta\|_2 + \|\gamma\|_0 \le \bar{c}\,\|f\|_{-1}. \end{cases}$$

## ■ Zur Wahl 2): $X = \overset{w}{\overset{\circ}{H}{}^1(\Omega)} \times \overset{\theta}{\left[\overset{\circ}{H}{}^1(\Omega)\right]^2}, \quad \overset{\gamma}{M} = H^{-1}(\text{div},\Omega)$:

- $\|(w,\theta)\|_X = \left[\|w\|_1^2 + \|\theta\|_1^2\right]^{0.5}, \quad \|w\|_1 = \|\nabla w\|_0 = |||w|||_1,$

  $\|\theta\|_1 = \|\nabla\theta\|_0 = |||\theta|||_1;$

$$\begin{aligned} H^{-1}(\text{div},\Omega) &:= \left\{\eta \in \left[H^{-1}(\Omega)\right]^2 : \text{div}\ \eta \in H^{-1}(\Omega)\right\} \\ &\underset{\substack{\uparrow \\ \partial\Omega \in C^{0,1}\ \text{Konusbed.}}}{=} \overline{[C^\infty(\Omega)]^2}^{\|\cdot\|_{H^{-1}(\text{div},\Omega)}} \end{aligned}$$

$$\boxed{< v, \text{div}\ \eta > = -< \nabla v, \eta > \quad \forall\, v \in \overset{\circ}{H}{}^1}$$

$$(4.49)\qquad \|\eta\|_M \equiv \|\eta\|_{H^{-1}(\text{div},\Omega)} := \left(\|\eta\|_{-1}^2 + \|\text{div}\ \eta\|_{-1}^2\right)^{1/2}.$$

- Die Bilinearformen $a(\cdot,\cdot)$ und $b(\cdot,\cdot)$ sind offenbar stetig !
  - $|a((w,\theta),(v,\varphi))| = |a(\theta,\varphi)| \le \underset{\substack{\downarrow \\ \alpha_2 = ?}}{\alpha_2} \|\theta\|_1\,\|\varphi\|_1 \le \alpha_2\,\|(w,\theta)\|_X\,\|(v,\varphi)\|_X$

    $(\uparrow)\quad$ #

$\circ\ |b\,((w,\theta),\eta)| = |<\nabla w-\theta,\eta>| \leq |<\nabla w,\eta>| + |<\theta,\eta>| \leq$

$$\leq \sup_{v\in \overset{\circ}{H}{}^1(\Omega)} \frac{-<\nabla v,\eta>}{\||\nabla v|\|_0}\,\|\nabla w\|_0 + \sup_{\varphi\in \overset{\circ}{H}{}^1(\Omega)^2} \frac{<\varphi,\eta>}{\|\nabla\varphi\|_0}\,\|\nabla\theta\|_0 =$$

$$= \underbrace{\boxed{\sup_{v\in \overset{\circ}{H}{}^1(\Omega)} \frac{<v,\operatorname{div}\eta>}{\|v\|_1}}}_{\|\operatorname{div}\eta\|_{-1}}\,\|w\|_1 + \underbrace{\boxed{\sup_{\varphi\in \overset{\circ}{H}{}^1(\Omega)^2} \frac{<\varphi,\eta>}{\|\varphi\|_1}}}_{\|\eta\|_{-1}}\,\|\theta\|_1 \leq$$

$$\leq \left(\|\operatorname{div}\eta\|_{-1}^2 + \|\eta\|_{-1}^2\right)^{1/2}\left(\|w\|_1^2+\|\theta\|_1^2\right)^{1/2} =$$

$$= 1\,\|(w,\theta)\|_X\,\|\eta\|_M \quad \forall\,(w,\theta)\in X \quad \forall\,\eta\in M,\ \text{d.h. } \beta_2 = 1 \qquad \#$$

- LBB–Bedingung:

$$\sup_{(v,\varphi)\in X}\frac{b\,((v,\varphi),\eta)}{\|(v,\varphi)\|_X} = \sup_{(v,\varphi)\in X}\frac{<\nabla v-\varphi,\eta>}{[\|v\|_1^2+\|\varphi\|_1^2]^{0.5}} =$$

$$= \frac{1}{2}\sup_{(v,\varphi)\in X}\frac{<\nabla v-\varphi,\eta>}{[\|v\|_1^2+\|\varphi\|_1^2]^{0.5}} + \frac{1}{2}\sup_{(v,\varphi)\in X}\frac{<\nabla v-\varphi,\eta>}{[\|v\|_1^2+\|\varphi\|_1^2]^{0.5}} \geq$$

$$\geq \frac{1}{2}\underbrace{\overset{\boxed{v=0}}{\boxed{\sup_{\varphi\in \overset{\circ}{H}{}^1(\Omega)^2}\frac{-<\varphi,\eta>}{\|\varphi\|_1}}}}_{=\|\eta\|_{-1}} + \frac{1}{2}\underbrace{\overset{\boxed{\varphi=\mathbf{O}}}{\boxed{\sup_{v\in \overset{\circ}{H}{}^1(\Omega)}\frac{\pm<\nabla v,\eta>}{\|v\|_1}}}}_{=\|\operatorname{div}\eta\|_{-1}} =$$

$$= \frac{1}{2}\left(\|\eta\|_{-1}+\|\operatorname{div}\eta\|_{-1}\right) \underset{\substack{\uparrow \\ a+b\geq\sqrt{a^2+b^2}\quad\forall\,a,b\geq 0}}{\geq} \frac{1}{2}\left(\|\eta\|_{-1}^2+\|\operatorname{div}\eta\|_{-1}^2\right)^{1/2},$$

d.h. $\beta_1 = \dfrac{1}{2}$ $\quad\#$

- Elliptizität von $a\,(\cdot,\cdot)$ auf dem Kern

  $V_0 = \{(v,\varphi)\in X : <\nabla v-\varphi,\eta> = 0\ \ \forall\,\eta\in M = H^{-1}(\operatorname{div},\Omega)\}$

  der Bilinearform $b\,(\cdot,\cdot)$, d.h. $\varphi = \nabla v$ in $L_2(\Omega)^2$:

$$a\,((v,\varphi),(v,\varphi)) = a\,(\varphi,\varphi) \geq \frac{2\,\mu}{12}\,\|\varepsilon\,(\varphi)\|_0^2 \underset{\substack{\uparrow \\ \boxed{\text{Lemma 3.2: 1. KORNsche Ungl.}}}}{\geq} \frac{2\,\mu}{12}\,\frac{1}{2}\,\||\varphi|\|_1^2 =$$

$$= \frac{\mu}{12}\left[\frac{1}{2}\,|||\varphi|||_1^2 + \frac{1}{2}\,|||\varphi|||_1^2\right\} \underset{\uparrow}{\geq} \frac{\mu}{12}\left\{\frac{1}{2}\,|||\varphi|||_1^2 + \frac{1}{2\,c_F^2}\,\|\varphi\|_0^2\right] =$$

FRIEDRICHS–Ungl.: $\|\varphi\|_0 \leq c_F\,|\varphi|_1 \quad \forall\, \varphi \in \overset{\circ}{H}{}^1(\Omega)^2$

$\varphi = \nabla v \in L_2(\Omega)^2$

$$\downarrow$$

$$= \frac{\mu}{12}\left\{\frac{1}{2}\,\|\varphi\|_1^2 + \frac{1}{2\,c_F^2}\,\|\nabla v\|_0^2\right\} \geq \underbrace{\boxed{\frac{\mu}{24}\,\min\,\{1, c_F^{-2}\}}}_{=\,\alpha_1}\,\|(v,\varphi)\|_X^2,$$

d.h. $\alpha_1 = \dfrac{\mu}{24}\,\min\,\{1, c_F^2\}.$ #

- Damit sind wiederum alle Voraussetzungen des Satzes 2.2 von Brezzi erfüllt. Folglich gilt:

**Satz 4.10:**

| | | |
|---|---|---|
| Vor.: | 1) | $X = \overset{\circ}{H}{}^1(\Omega) \times \overset{\circ}{H}{}^1(\Omega)^2, \quad M = H^{-1}(\mathrm{div},\Omega)$ |
| | 2) | $f \in H^{-1}(\Omega)$ |
| Bh.: | | Dann gilt: |
| | 1) | $\exists!\ ((w,\theta),\gamma) \in X \times M:\quad (4.46)$ |
| | 2) | A-priori–Abschätzung: $\exists\ c = \text{const.} > 0$: |
| | | (4.50) $\qquad \|w\|_1 + \|\theta\|_1 + \|\gamma\|_{H^{-1}(\mathrm{div},\Omega)} \leq c\,\|f\|_{-1}$ |

- Bemerkung:
  Falls das Gebiet $\Omega$ konvex ist, dann gelten sogar die Regularitätsaussagen (4.48) !

## ■ Gemischte FE–Approximationen:

- Gemischte FEM für (4.46) mit der Räumewahl 1):

**Ü 4.5*** Geben Sie FE–Räume $X_h$ und $M_h$ an, sodaß

1. $a(\cdot,\cdot)$ $V_{0h}$–elliptisch ist,
2. die diskrete LBB–Bedingung erfüllt ist.

- Gemischte FEM für (4.46) mit der Räumewahl 2):
  $\longrightarrow$ siehe Pkt. 4.2.4 „Gemischte Methoden für die Mindlin–Reissner–Platte“, z.B. MITC7 [4]

■ **Ü 4.6** $\quad \Delta^2 u = f$ in $\Omega$, $\quad u = \dfrac{\partial u}{\partial u} = 0 \quad \Longrightarrow \quad \begin{array}{l} p = \Delta u \quad + \text{RB} \\ \Delta u = f \end{array}$

### 4.2.4 Gemischte Methoden für die Mindlin–Reissner–Platte

## ■ Herleitung der gemischten Formulierung:

- Ausgangspunkt: = primale Variationsformulierung $(4.34)_{\mathrm{VP}}$:

$$(4.34)_{\mathrm{VP}} \qquad \boxed{\begin{array}{l} \text{Ges. } (w,\theta) \in X := \overset{\circ}{H}{}^1(\Omega) \times \overset{\circ}{H}{}^1(\Omega)^2 : \\ a(\theta,\varphi) + \underbrace{t^{-2}\,(\nabla w - \theta}_{=:\,\gamma}, \nabla v - \varphi)_0 = (f,v)_0 \quad \forall\,(v,\varphi) \in X. \end{array}}$$

- Analog zum Timoshenko–Balken führen wir den Scherterm

$$(4.51) \qquad \gamma := t^{-2}\,(\nabla w - \theta) \;\in\; L_2(\Omega)^2 \quad ? \quad (\mathrm{LBB}\ (\uparrow))$$

als neue Variable ein. Damit erhalten wir eine gemischte Variationsformulierung mit Störterm (vgl. Pkt. 2.3):

$$(4.52) \qquad \boxed{\begin{array}{lclcl} \multicolumn{5}{l}{\text{Ges. } (w,\theta) \in X := \overset{\circ}{H}{}^1(\Omega) \times \overset{\circ}{H}{}^1(\Omega)^2 \text{ und}} \\ \multicolumn{5}{l}{\qquad \gamma \in M_c = L_2(\Omega)^2 \subseteq M = H^{-1}(\mathrm{div},\Omega) :} \\ a(\theta,\varphi) & + & (\nabla v - \varphi, \gamma)_0 & = & (f,v)_0 \qquad \forall\,(v,\varphi) \in X \\ \boldsymbol{a((w,\theta),(v,\varphi))} & + & \boldsymbol{b((v,\varphi),\gamma)} & = & \boldsymbol{< f;(v,\varphi) >} \quad \boldsymbol{\forall\,(v,\varphi) \in X} \\ (\nabla w - \theta, \eta)_0 & - & t^2\,(\gamma,\eta)_0 & = & 0 \qquad \forall\,\eta \in M_c \\ \boldsymbol{b((w,\theta),\eta)} & - & \boldsymbol{t^2\,c(\gamma,\eta)} & = & \boldsymbol{< g,\eta >} \qquad \boldsymbol{\forall\,\eta \in M_c} \end{array}}$$

wobei

$$\boldsymbol{a((w,\theta),(v,\varphi))} := a(\theta,\varphi) = \tfrac{1}{12}\int_\Omega \Big[2\,\mu\,\varepsilon_{ij}(\theta)\,\varepsilon_{ij}(\varphi) + \lambda\,\tfrac{2\,\mu}{\lambda+2\,\mu}\,\mathrm{div}\,\theta\,\mathrm{div}\,\varphi\Big]\,dx_1\,dx_2$$

$$\boldsymbol{b((w,\theta),\eta)} := \;<\underbrace{\nabla w - \theta}_{\in\, L_2(\Omega)^2}, \eta>_{M^* \times M} = (\nabla w - \theta, \eta)_0$$

o.k.

$$\boldsymbol{< f;(v,\varphi) >} := (f,v)_0$$

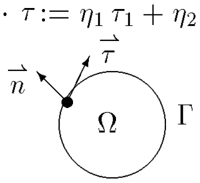
$$\boldsymbol{g = \mathrm{O}}$$

## ■ Zu den Räumen $\boldsymbol{M = H^{-1}(\mathrm{div}, \Omega)}$ und $\boldsymbol{M^* = ?}$:

- **Definition 4.11:** (Verallgemeinerte Rotation)

> Eine Funktion $\rho \in L_2(\Omega)$ heißt (verallgemeinerte) Rotation einer Vektorfunktion $\eta \in L_2(\Omega)^2$, falls
>
> $$\int\limits_\Omega \rho \cdot \mu \, dx = - \int\limits_\Omega \left( \eta_2 \frac{\partial \mu}{\partial x_1} - \eta_1 \frac{\partial \mu}{\partial x_2} \right) dx \quad \forall\, \mu \in \overset{\bullet}{C}{}^\infty(\Omega) \overset{!}{=} D(\Omega).$$
>
> Man schreibt: $\rho = \mathrm{rot}\, \eta \in L_2(\Omega)$.

- **Definition 4.12:** $H(\mathrm{rot}, \Omega)$, $\overset{\circ}{H}(\mathrm{rot}, \Omega)$

> $$H(\mathrm{rot}, \Omega) := \{\eta \in L_2(\Omega)^2 : \mathrm{rot}\, \eta \in L_2(\Omega)\} \subset L_2(\Omega)^2$$
>
> $$\overset{\circ}{H}(\mathrm{rot}, \Omega) := \{\eta \in H(\mathrm{rot}, \Omega) : \eta \cdot \vec{\tau} := \eta_1 \tau_1 + \eta_2 \tau_2 = 0 \text{ auf } \Gamma = \partial\Omega\}$$
>
> ∃ der Spur ! (mms*)
>
> 
> 
>
> $|\vec{\tau}| = 1$
>
> $$\|\eta\|_{H(\mathrm{rot},\Omega)} := \left(\|\eta\|_0^2 + \|\mathrm{rot}\, \eta\|_0^2\right)^{1/2}$$

- $\boxed{\textbf{Ü 4.6}}$

> Man zeige, daß
>
> $$\eta = \nabla v - \varphi \in \overset{\circ}{H}(\mathrm{rot}, \Omega) \subset L_2(\Omega)^2,$$
>
> falls $v \in \overset{\circ}{H}{}^1(\Omega)$ und $\varphi \in \overset{\circ}{H}{}^1(\Omega)^2$ !

<u>Lösung:</u>

- $\eta \in L_2(\Omega)^2$
- $\mathrm{rot}\, \nabla v = \mathbf{O} \in L_2(\Omega)$ !,
  da nach Def. 4.10
  $$-\int\limits_\Omega \left( \frac{\partial v}{\partial x_2} \frac{\partial \mu}{\partial x_1} - \frac{\partial v}{\partial x_1} \frac{\partial \mu}{\partial x_2} \right) dx_1\, dx_2 =$$
  $$= \int\limits_\Omega v \left( \frac{\partial^2 \mu}{\partial x_2\, \partial x_1} - \frac{\partial^2 \mu}{\partial x_1\, \partial x_2} \right) dx_1\, dx_2 + 0 = 0 \quad \text{o.k.}$$
- $\mathrm{rot}\, \varphi := \dfrac{\partial \varphi_2}{\partial x_1} - \dfrac{\partial \varphi_1}{\partial x_2} \in L_2(\Omega)$ ! #

- **Ü 4.7***

  Man zeige, daß
  $$\left(\overset{\circ}{H}(\mathrm{rot},\Omega)\right)^* = H^{-1}(\mathrm{div},\Omega).$$

  Hinweis: a) $H^{-1}(\mathrm{div},\Omega) \subset \left(\overset{\circ}{H}(\mathrm{rot},\Omega)\right)^*$
  unter Benutzung der Helmholtz–Zerlegung (↓)

  b) $\left(\overset{\circ}{H}(\mathrm{rot},\Omega)\right)^* \subset H^{-1}(\mathrm{div},\Omega)$

## ■ Probleme mit der gemischten VF (4.52) für die MR–Platte:

- Auf den ersten Blick scheint

  | gem. VF (4.52) (Mindlin–Reissner–Platte) | analog zur | gem. VF (4.13) (Timoshenko–Balken) |
  |---|---|---|

  behandelbar zu sein.
  Dies ist aber wegen $\boxed{L_2(\Omega)^2 \neq H^{-1}(\mathrm{div},\Omega) \text{ in 2D}}$ nicht der Fall !

- Die LBB–Bedingung kann für $M = L_2(\Omega)^2$ nicht gelten (siehe auch Pkt. 4.2.3: Kirchhoff–Platte) !

  Tatsächlich:
  Wählen
  $$\eta = \widetilde{\mathrm{rot}}\, p \equiv \mathrm{rot}\, p := \begin{bmatrix} -\frac{\partial p}{\partial x_2} \\ \frac{\partial p}{\partial x_1} \end{bmatrix} \in L_2(\Omega)^2, \text{ für } p \in H^1(\Omega).$$

  Dann gilt für bel. $w \in \overset{\circ}{H}{}^1(\Omega)$ und $\theta \in \overset{\circ}{H}{}^1(\Omega)^2$:
  $$b((w,\theta);\eta) := (\nabla w - \theta, \eta)_0 = \underbrace{(\nabla w, \mathrm{rot}\, p)_0}_{=0} - (\theta,\eta)_0$$

  $$\underline{\text{NR:}} \quad (\nabla w, \mathrm{rot}\, p)_0 = \int_\Omega \left(-\frac{\partial w}{\partial x_1}\frac{\partial p}{\partial x_2} + \frac{\partial w}{\partial x_2}\frac{\partial p}{\partial x_1}\right) dx_1\, dx_2 \underset{\substack{\uparrow \\ w|_{\Gamma=\partial\Omega}=0}}{=} 0$$

  $$= -(\theta,\eta)_0 = - <\theta,\eta>_{\overset{\circ}{H}{}^1(\Omega)^2 \times H^{-1}(\Omega)^2} \leq$$

  $$\leq \|\theta\|_1\, \|\eta\|_{-1} \leq \left(\|w\|_1^2 + \|\theta\|_1^2\right)^{0.5} \|\eta\|_{-1}$$

  $$\|\eta\|_{-1} \geq \sup_{(w,\theta)\in X} \frac{b((w,\theta);\eta)}{\|(w,\theta)\|_X} \underset{\uparrow}{\geq} c\,\|\eta\|_0 \quad \forall\, \eta \in H^{-1}(\mathrm{div},\Omega) = \overline{M_c}^{\|\cdot\|}$$

  $$\nexists\, c = \mathrm{const.} > 0 : \qquad \text{(mms)}$$

- Folglich muß $M$ mit einer <u>schwächeren Norm</u> als mit der $L_2$–Norm versehen werden, nämlich mit der Norm des Raumes

$$(4.53) \qquad \left(\overset{\circ}{H}(\mathrm{rot},\Omega)\right)^* \underset{\boxed{\text{Ü } 4.7}}{\overset{\uparrow}{=}} H^{-1}(\mathrm{div},\Omega), \text{ d.h.}$$

$$\|\eta\|_{H^{-1}(\mathrm{div},\Omega)} := \left(\|\eta\|_{-1}^2 + \|\mathrm{div}\ \eta\|_{-1}^2\right)^{1/2}.$$

- Es gilt offenbar:
  a) $M = H^{-1}(\mathrm{div},\Omega) \supset L_2(\Omega)^2 =: M_c$
  b) $\overline{M_c}^{\|\cdot\|_M} = \overline{(L_2(\Omega)^2)}^{\|\cdot\|_{H^{-1}(\mathrm{div},\Omega)}} = H^{-1}(\mathrm{div},\Omega)$ !

- Der Störterm
  $t^2\, c\,(\gamma,\eta) := t^2\,(\gamma,\eta)_0 \mathrel{\hat{=}}$ Diff.–Operator 0-ter Ordnung
  „lebt“ in der Topologie von $H^{-1}(\mathrm{div},\Omega)$, d.h. die MR–Platte ist ein <u>singulär gestörtes</u> VP !

- <u>Situation:</u>
  1. $a\,(\cdot,\cdot) : X \times X \to \mathbb{R}^1$ ist nur auf $V_0 = \ker b$ elliptisch, aber <u>nicht</u> auf $X$ !
  2. $c\,(\cdot,\cdot) := (\cdot,\cdot)_0$ ist nur auf $M_c \times M_c$ definiert, aber nicht auf $M \times M$, wobei $M_c = L_2(\Omega)^2 \subset M = H^{-1}(\mathrm{div},\Omega)$.

- <u>Konsequenz:</u>
  $\Rightarrow$ Allgemeine Theorie aus Pkt. 2.3 — Satz 2.11: $c\,(\cdot,\cdot)$ †, $M = M_c$ / Satz 2.12: $a\,(\cdot,\cdot)$ auf $X$ elliptisch
  ist <u>nicht</u> (jedenfalls nicht direkt) anwendbar !

## ■ Auswege:

1. <u>***X*–Elliptizitätstrick** (Arnold & Brezzi, 1993, [1]):</u>

$$(4.34)_{\mathrm{VP}} \quad a\,(\theta,\varphi) + t^{-2}\,(\nabla w - \theta, \nabla v - \varphi)_0 = (f,v)_0 \quad \forall\,(v,\varphi) \in X$$

$$|||$$

$$(\widetilde{4.34})_{\mathrm{VF}} \quad \underbrace{[a\,(\theta,\varphi) + (\nabla w - \theta, \nabla v - \varphi)_0]}_{\substack{!! \\ \tilde{a}\,((w,\theta);(v,\varphi))}} + \underbrace{\tilde{t}^{-2}(\nabla w - \theta,}_{\substack{=:\ \gamma \text{ (neuer Scherterm)} \\ \tilde{t}^{-2} = t^{-2} - 1 \ \underset{\tilde{t}\to 0}{\overset{t\to 0}{\longrightarrow}}\ \infty}} \nabla v - \varphi)_0 = (f,v)_0 \quad \forall\,(v,\varphi) \in X$$

ist elliptisch auf $X$ !

$\Rightarrow$ gem. VF für MR–Platte, auf die der $\boxed{\text{Satz 2.12}}$ anwendbar ist !

2. **Helmholtz–Zerlegung:** $H^{-1}(\operatorname{div},\Omega) = \nabla \overset{\circ}{H}{}^1(\Omega) + \overrightarrow{\operatorname{rot}}\, L_2(\Omega)|_{\mathbb{R}}$

   Zerlegen in der gem. VF (4.52) den Scherterm $\gamma$ und die entsprechende Testfunktion $\eta$ nach Helmholtz:

(4.54)
$$
\begin{array}{cccccccc}
\gamma & = & \nabla r & \overset{L_2}{\oplus} & \operatorname{rot} p & \in L_2(\Omega)^2 & \rightsquigarrow & \in H^{-1}(\operatorname{div},\Omega) \\
 & & \downarrow & & \downarrow & \nearrow & & \uparrow \\
 & & \overset{\circ}{H}{}^1(\Omega) & & H^1(\Omega)|_{\mathbb{R}} & & \rightsquigarrow & L_2(\Omega)|_{\mathbb{R}} \\
 & & \uparrow & & \uparrow & \searrow & & \downarrow \\
\eta & = & \nabla z & \underset{L_2}{\oplus} & \operatorname{rot} q & \in L_2(\Omega)^2 & \rightsquigarrow & \in H^{-1}(\operatorname{div},\Omega)
\end{array}
$$

   Dann zerfällt (4.52) in

   - Dirichlet–Problem für Poisson $\curvearrowright$ $r \in \overset{\circ}{H}{}^1(\Omega)$
   - Verallgemeinertes Stokes–Problem $\curvearrowright$ $(\theta, p) \in \overset{\circ}{H}{}^1(\Omega)^2 \times H^1(\Omega)|_{\mathbb{R}}$
   - Dirichlet–Problem für Poisson $\curvearrowright$ $w \in \overset{\circ}{H}{}^1(\Omega)$

   Daraus erhält man: $\exists !$ und A-priori–Abschätzung !
   Hinweise zur Wahl der finiten Elemente !

## ■ Der $X$–Elliptizitätstrick:

- Die modifizierte primale VF $(\widetilde{4.34})_{\mathrm{VF}}$ führt auf die gemischte VF mit Störterm:

(4.55)
$$
\boxed{
\begin{array}{llcl}
\multicolumn{4}{l}{\text{Ges. } (w,\theta) \in X := \overset{\circ}{H}{}^1(\Omega) \times \overset{\circ}{H}{}^1(\Omega)^2 \text{ und}} \\
\multicolumn{4}{l}{\qquad \gamma \in M_c = L_2(\Omega)^2 \subset M = H^{-1}(\operatorname{div},\Omega) :} \\[1ex]
[a(\theta,\varphi) + (\nabla w - \theta, \nabla v - \varphi)_0] & + \ (\nabla v - \varphi, \gamma)_0 & = & (f, v)_0 \\
 & & & \forall\, (v,\varphi) \in X \\
\boldsymbol{a((w,\theta),(v,\varphi))} & + \ \boldsymbol{b((v,\varphi),\gamma)} & = & \boldsymbol{< f, (v,\varphi) >} \\
 & & & \boldsymbol{\forall\, (v,\varphi) \in X} \\
(\nabla w - \theta, \eta)_0 & - \ \tilde{t}^2 (\gamma,\eta)_0 & = & 0 \quad \forall\, \eta \in M_c \\
\boldsymbol{b((w,\theta),\eta)} & - \ \boldsymbol{\tilde{t}^2 c(\gamma,\eta)} & = & \boldsymbol{< g, \eta >} \\
 & & & \boldsymbol{\forall\, \eta \in M_c}
\end{array}
}
$$

wobei

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{a}\,((\boldsymbol{w},\boldsymbol{\theta}),(\boldsymbol{v},\boldsymbol{\varphi})) &= a\,(\theta,\varphi) + (\nabla w - \theta, \nabla v - \varphi)_0 \\
\boldsymbol{b}\,((\boldsymbol{v},\boldsymbol{\varphi}),\boldsymbol{\gamma}) &= <\nabla v - \varphi, \gamma> = (\nabla v - \varphi, \gamma)_0 \\
\boldsymbol{c}\,(\boldsymbol{\gamma},\boldsymbol{\eta}) &= (\gamma,\eta)_0 \\
<\boldsymbol{f},(\boldsymbol{v},\boldsymbol{\varphi})> &= <f, v>
\end{aligned}$$

$$\boldsymbol{g = 0}, \;\; \boldsymbol{\tilde{t}^{-2} = t^{-2} - 1} \;\; \curvearrowright \;\; \tilde{t}^2 = \frac{1}{t^{-2}-1} = \frac{t^2}{1-t^2} \le 1, \;\; t \le 1/\sqrt{2} < 1;$$

- <u>Gem. VF (4.55) erfüllt alle Voraussetzungen von Satz 2.12:</u>

1. $f \in H^{-1}(\Omega)$, d.h. $f \in X^*$, $\;\; g \in M_c^*$

2. $$|a\,((w,\theta),(v,\varphi))| := |a\,(\theta,\varphi) + (\nabla w - \theta, \nabla v - \varphi)| \le \underset{\substack{\downarrow \\ \alpha_2 =}}{\alpha_2}\, \|(w,\theta)\|_X \|(v,\varphi)\|_X \qquad \text{(mms)}$$

$$\begin{aligned}
|b\,((v,\varphi),\gamma)| &= |(\nabla v - \varphi,\gamma)_0| = |<\nabla v - \varphi, \gamma>| \le \\
&\le \underset{\substack{\downarrow \\ \boxed{\beta_2 = 1}}}{\beta_2}\, \|(v,\varphi)\|_X\, \|\gamma\|_M \quad \forall\,(v,\varphi) \in X, \quad \forall\,\gamma \in M
\end{aligned}$$

(siehe Pkt. 4.2.3 Kirchhoff–Platte)

3. <u>LBB–Bedingung:</u> analog zur Kirchhoff–Platte (Pkt. 4.2.3)

$$\sup_{(v,\varphi)\in X} \frac{<\nabla v - \varphi, \eta>}{[\|v\|_1^2 + \|\varphi\|_1^2]^{0.5}} \ge \underset{\substack{\downarrow \\ \boxed{\beta_1 = 1/2}}}{\beta_1} \left(\|\eta\|_{-1}^2 + \|\text{div}\ \eta\|_{-1}^2\right)^{1/2}$$

4.* $a\,((\cdot,\cdot),(\cdot,\cdot))$ ist auf ganz $X$ elliptisch, d.h. $\exists\, \alpha_1 = \text{const.} > 0$:

$$a\,((w,\theta),(w,\theta)) = a\,(\theta,\theta) + \|\nabla w - \theta\|_0^2 \ge \underset{\substack{\downarrow \\ \boxed{\alpha_1 = \,?}}}{\alpha_1} (\|w\|_1^2 + \|\theta\|_1^2) \qquad \text{(mms)}$$

<u>Hinweis:</u> Pkt. 4.1.2 Timoshenko–Balken

$$\begin{aligned}
\|\theta\|_1^2 + \|w\|_1^2 &= \|\nabla\theta\|_0^2 + \|\nabla w\|_0^2 \le \\
&\le \|\nabla\theta\|_0^2 + \|(\nabla w - \theta) + \theta\|_0^2 \le \\
&\le \|\nabla\theta\|_0^2 + 2\,\|\nabla w - \theta\|_0^2 + \underset{\substack{\text{Friedrichs–Ungl.} \\ \|\theta\|_0 \le c_F \|\nabla\theta\|_0 \\ \downarrow}}{2\,\|\theta\|_0^2} \le
\end{aligned}$$

$$\le (1 + 2\,c_F^2)\,\|\nabla\theta\|_0^2 + 2\,\|\nabla w - \theta\|_0^2 \overset{\substack{\text{Kornsche–Ungl.}\\ \|\varepsilon(\theta)\|_0^2 \ge \frac{1}{2}\|\nabla\theta\|_0^2\\ \text{Lemma 3.2}\\ \downarrow}}{\le}$$

$$\le 2\,(1 + 2\,c_F^2)\,\|\varepsilon(\theta)\|_0^2 + 2\,\|\nabla w - \theta\|_0^2 \le$$

$$\le 2\,(1 + 2\,c_F^2)\,\frac{12}{2\,\mu}\,a(\theta,\theta) + 2\,\|\nabla w - \theta\|_0^2 \le$$

$$\le \max\left\{\frac{12\,(1 + 2\,c_F^2)}{\mu}, 2\right\}\,(a(\theta,\theta) + \|\nabla w - \theta\|_0^2),$$

$$\text{d.h.}\qquad \alpha_1^{-1} = \max\left\{\frac{12\,(1 + 2\,c_F^2)}{\mu}, 2\right\}.$$

5. Voraussetzung (2.33) an $M_c$ und $c\,(\cdot,\cdot) : M_c \times M_c \to I\!R^1$:
   - $M_c \subset M,\ \ \overline{M_c}^{\|\cdot\|_M} = M$ o.k. für $M_c = L_2(\Omega)^2$ und $M = H^{-1}(\mathrm{div},\Omega)$
   - $c\,(\eta,\eta) = \|\eta\|_0^2 \ge 0 \quad \forall\ \eta \in M_c$ o.k.
   - $c\,(\mu,\eta) = c\,(\eta,\mu) \quad \forall\ \mu,\eta \in M_c$ o.k.
   - $|c\,(\mu,\eta)| \le (c\,(\mu,\mu))^{0.5}\,(c\,(\eta,\eta))^{0.5} = \|\mu\|_0\,\|\eta\|_0 \quad \forall\ \mu,\eta \in M_c$

- **Satz 4.13:**

Vor.: 1) $\partial\,\Omega \in C^{0,1}$

2) $\lambda, \mu = \mathrm{const.} > 0$

3) $f \in H^{-1}(\Omega)$

Bh.: Dann gilt für $\tilde{t} \in [0,1]$, d.h. $t \in [0, 1/\sqrt{2}]$:

1) $\exists\,!\ (w,\theta) \in X = \overset{\circ}{H}{}^1(\Omega) \times \overset{\circ}{H}{}^1(\Omega)^2$ und $\gamma \in M_c = L_2(\Omega)^2$: (4.55)

2) $\exists\ c = \mathrm{const.} > 0,\ \ c \ne c\,(\tilde{t})$:

(4.56) $$\|w\|_1 + \|\theta\|_1 + \|\gamma\|_{H^{-1}(\mathrm{div},\Omega)} + \tilde{t}^2\,\|\gamma\|_0 \le c\,\|f\|_{-1}$$

$\boxed{\text{für } \tilde{t} \in [0,1], \text{ d.h. } t \in [0, 1/\sqrt{2}].}$

**Beweis:** folgt sofort aus Satz 2.12. **q.e.d.**

- **Ü 4.9** $\widehat{=}$ Ü 4.1 Timoshenko $\downarrow$ Bernoulli

  Man zeige, daß die Lösung $(w(t), \theta(t), \gamma(t))$ der fest eingespannten Mindlin–Reissner–Platte (4.55) für $\tilde{t} \to 0$ gegen die Lösung $(w(0), \theta(0), \gamma(0))$ der fest eingespannten Kirchhoff–Platte $(4.55)_{\tilde{t}=0} = (4.46)_{2)}$ in $X \times M = (\overset{\circ}{H}{}^1(\Omega) \times \overset{\circ}{H}{}^1(\Omega)^2) \times H^{-1}(\mathrm{div}, \Omega)$ konvergiert.

## Helmholtz–Zerlegung:

- **Lemma 4.14:** $H^{-1}(\mathrm{div}, \Omega) = \nabla \overset{\circ}{H}{}^1(\Omega) + \mathrm{rot}\ (L_2(\Omega)|_{\mathbb{R}})$

1. Jede Funktion $\eta \in H^{-1}(\mathrm{div}, \Omega)$ ist eindeutig darstellbar als

$$\eta = \nabla z + \mathrm{rot}\, q \equiv \begin{bmatrix} \frac{\partial z}{\partial x_1} \\ \frac{\partial z}{\partial x_2} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{\partial q}{\partial x_2} \\ \frac{\partial q}{\partial x_1} \end{bmatrix} \tag{4.57}$$

   mit $z \in \overset{\circ}{H}{}^1(\Omega)$ und $q \in L_2(\Omega)|_{\mathbb{R}}$.

2. Außerdem sind die Normen

$$\|\eta\|_{H^{-1}(\mathrm{div},\Omega)} \cong \left(\|z\|_1^2 + \|q\|_0^2\right)^{1/2} \tag{4.58}$$

   äquivalent, wobei für $q$ der Repräsentant $(q, 1)_0 = 0$ einzusetzen ist.

**Beweis:** siehe [4], S. 282 – 283.

- **Lemma 4.15:** $L_2(\Omega)^2 = \nabla \overset{\circ}{H}{}^1(\Omega) \overset{L_2}{\oplus} \mathrm{rot}\ (H^1(\Omega)|_{\mathbb{R}})$

Falls $\eta \in L_2(\Omega)^2 \subset H^{-1}(\mathrm{div}, \Omega)$, dann gilt für die Zerlegung (4.57) $\eta = \nabla z + \mathrm{rot}\, q$:

- $q \in H^1(\Omega)|_{\mathbb{R}}$
- $q \in H^1(\Omega)|_{\mathbb{R}}$ ist Lsg. des Neumann–Problems:

  $(\mathrm{rot}\, q, \mathrm{rot}\, \rho)_0 = (\mathrm{div}\ (\eta - \nabla z), \rho)_0 \quad \forall\, \rho \in H^1(\Omega).$

(4.59) • $L_2(\Omega)^2 = \nabla \overset{\circ}{H}{}^1(\Omega) \overset{L_2}{\oplus} \mathrm{rot}\ (H^1(\Omega)|_{\mathbb{R}})$

**Beweis:**

- Setzen nun Helmholtz–Zerlegung (4.54) des

$$\begin{array}{llccc}
\bullet & \text{Scherterms} & \gamma = & \nabla r & \oplus \operatorname{rot} \; p \\
 & & & \downarrow & \downarrow \\
 & & & \overset{\circ}{H}{}^1(\Omega) & H^1(\Omega)|_{\mathbb{R}} \\
 & & & \uparrow & \uparrow \\
\bullet & \text{Testfkt.} & \eta = & \nabla z & \oplus \operatorname{rot} \; q
\end{array}$$

in (4.52) ein:

$$* \; a(\theta,\varphi) + (\nabla v - \varphi, \overbrace{\nabla r \oplus \operatorname{rot} p}^{=\gamma})_0 = (f,v)_0 \quad \forall\, (v,\varphi) \in X$$

1. $(\nabla v, \nabla r)_0 + \underbrace{(\nabla v, \operatorname{rot} p)_0}_{=0} = (f,v)_0 \quad \forall\, v \in \overset{\circ}{H}{}^1(\Omega)$

2. $a(\theta,\varphi) - \underbrace{(\varphi, \operatorname{rot} p)_0}_{= -(\operatorname{rot}\varphi, p)_0} = (\nabla r, \varphi)_0 \quad \forall\, \varphi \in \overset{\circ}{H}{}^1(\Omega)^2$

$$* \; (\nabla w - \theta, \overbrace{\nabla z \oplus \operatorname{rot} q}^{\eta =})_0 - t^2 (\nabla r \oplus \operatorname{rot} p, \nabla z \oplus \operatorname{rot} q)_0 = 0$$

3. $(\nabla w - \theta, \operatorname{rot} q) - t^2 (\nabla r \oplus \operatorname{rot} p, \operatorname{rot} q)_0 = 0$

   $-(\theta, \operatorname{rot} q) - t^2 (\operatorname{rot} p, \operatorname{rot} q)_0 = 0$

4. $(\nabla w, \nabla z)_0 - (\theta, \nabla z)_0 - t^2 (\nabla r, \nabla z)_0 - t^2 \underbrace{(\operatorname{rot} p, \nabla z)_0}_{=0} = 0$

- <u>Resultat:</u>

(4.60)

$$\boxed{\begin{array}{lllll}
\multicolumn{5}{l}{\text{Ges. } r \in \mathbb{R} = \overset{\circ}{H}{}^1(\Omega),\;\; \theta \in \Theta = \overset{\circ}{H}{}^1(\Omega)^2,\;\; p \in P = H^1(\Omega)|_{\mathbb{R}},} \\
\multicolumn{5}{l}{\quad w \in W = \overset{\circ}{H}{}^1(\Omega);} \\
1) & (\nabla r, \nabla v)_0 = (f,v)_0 & & & \forall\, v \in \overset{\circ}{H}{}^1(\Omega) \\
2) & a(\theta,\varphi) + (\operatorname{rot}\varphi, p)_0 & = & (\nabla r, \varphi)_0 & \forall\, \varphi \in \overset{\circ}{H}{}^1(\Omega)^2 \\
3) & (\operatorname{rot}\theta, q)_0 - t^2 (\operatorname{rot} p, \operatorname{rot} q)_0 & = & 0 & \forall\, q \in H^1(\Omega)|_{\mathbb{R}} \\
4) & (\nabla w, \nabla z)_0 = (\theta, \nabla z) + t^2 (f,z)_0 & & & \forall\, z \in \overset{\circ}{H}{}^1(\Omega)
\end{array}}$$

Verallg.
Stokes
$\varphi \to \varphi^\perp = \binom{-\varphi_2}{\varphi_1}$
$\theta \to \theta^\perp$

- Das Problem

  Ges. $\theta \in \overset{\circ}{H}{}^1(\Omega)^2$ und $p \in H^1(\Omega)|_{\mathbb{R}}$:

  2)

  3)

  wird mit der Setzung

  $$\varphi \longmapsto \varphi^\perp = (-\varphi_2, \varphi_1) \in \overset{\circ}{H}{}^1(\Omega)^2 \quad \text{rot}\ \varphi = \text{div}\ \varphi^\perp$$
  $$\theta \longmapsto \theta^\perp = (-\theta_2, \theta_1) \in \overset{\circ}{H}{}^1(\Omega)^2$$

  zu einem Stokes–Problem mit Störterm:

  $$\begin{cases} \tilde{a}\,(\theta^\perp, \varphi^\perp) \;+\; (\text{div}\ \varphi^\perp, p)_0 = (\nabla r, \varphi^\perp) & \forall\, \varphi^\perp \in \overset{\circ}{H}{}^1(\Omega)^2 \\ (\text{div}\ \theta^\perp, q)_0 \;-\; t^2(\text{rot}\ p, \text{rot}\ q)_0 = 0 & \forall\, q \in H^1(\Omega)|_{\mathbb{R}} \end{cases}$$

- Mit Satz 2.11 erhalten wir:
  1. $\exists!$ (4.60) $\widehat{=}$ (4.52)
  2. A-priori–Abschätzungen für (4.60) $\looparrowright$ (4.52) analog zu Satz 4.13
  3. Hinweise zur Elementewahl

■ **Stabile FE–Approximationen:** siehe [4] S. 285 ff.
z.B.: MITC–Elemente $\looparrowright$ MITC 7
$\rightsquigarrow$ Selektive reduzierte Integration in der primalen VF (4.34) !

# Kapitel 5

# Analysis und Numerik von Anfangsrandwertaufgaben der elastisch–plastischen Fließtheorie

In diesem Kapitel werden die wichtigsten Ergebnisse, die vom Autor in der Monographie [18] (mit V.G. Korneev) zu Problemen der elastisch–plastischen Fließtheorie erzielt wurden, kurz zusammengestellt. Eine ausführliche Darstellung sowie die Beweise der entsprechenden Sätze und Lemmata findet der Leser in [18]. Zusätzlich zu den bereits eingeführten Notationen werden auch Bezeichnungen aus der angegebenen Monographie [18], in einigen offensichtlichen Fällen ohne nähere Erläuterung, benutzt. Im Punkt 5.1 geben wir das vom Autor vorgeschlagene regularisierte mathematische Modell zur Beschreibung elastisch–plastischer Deformationsvorgänge an. In den Punkten 5.2 und 5.3 stellen wir entsprechend die analytischen und numerischen Resultate für dieses Modell zusammen. In den Abschnitten 5.4.1 und 5.4.2 geben wir einen kurzen Überblick über die Ergebnisse zu den Auflösungsverfahren für die auf jedem Inkrementschritt entstehenden nichtlinearen Gleichungssysteme. Im abschließenden Abschnitt 5.4.3 wird ein inkrementelles "nested" Iterationsschema für die Aufgaben der elastisch–plastischen Fließtheorie vorgeschlagen und theoretisch begründet.

## 5.1 Ein mathematisches Modell zur Beschreibung von Aufgaben der elastisch–plastischen Fließtheorie

Grundlegend für die Formulierung des (quasistatischen) Anfangsrandwertproblems der elastisch–plastischen Fließtheorie ist das Materialgesetz. Im elastischen Fall gilt das bekannte HOOKEsche Gesetz: $\sigma = D\,e$, wobei $\sigma = [\sigma_{ij}]_{i,j=1,2,3}$ der Spannungstensor, $e = [e_{ij}]_{i,j=1,2,3}$ der Verzerrungstensor und $D = [D_{ijkl}]_{i,j,k,l=1,2,3}$ die Matrix der elastischen Konstante $D_{ijkl}$ sind.
Im plastischen Bereich kann der quasistatische Deformationsprozeß für sich verfestigende Materialien durch ein differentielles Deformationsgesetz beschrieben werden. Von H. Bergander wurde in [3] folgende Standardformulierung vorgeschlagen:

(5.1)
$$\dot\sigma = \begin{cases} D\,\dot e & ,\ \text{falls } f(\sigma,\kappa) < 0 \text{ oder } q^T\dot\sigma \le 0, \\ D\,\dot e - q^T D\,\dot e\,\psi\,D\,q\,, & \text{falls } f(\sigma,\kappa) = 0 \text{ und } q^T\dot\sigma > 0, \end{cases}$$

$$\dot\kappa = \begin{cases} 0 & ,\ \text{falls } f(\sigma,\kappa) < 0 \text{ oder } q^T\dot\sigma \le 0, \\ q^T D\,\dot e\,\psi\,r & ,\ \text{falls } f(\sigma,\kappa) = 0 \text{ und } q^T\dot\sigma > 0, \end{cases}$$

wobei $\kappa = (\kappa_1, \kappa_2, \dots, \kappa_L)^T$ – der Vektor der Verfestigungsparameter,
$f = f(\sigma,\kappa)$ – die Fließfunktion (in [18] "loading function"),
$q = \partial f/\partial\sigma$ – der Gradient auf der Fließfläche,
$r = r(\sigma,\kappa)$ – die Verfestigungsfunktion und
$\psi = \psi(\sigma,\kappa) = (q^T D\,q + U)^{-1}$, $U = -p^T r$, $p = \partial f/\partial\kappa$ weitere Größen sind
(siehe auch [18], Chapter 2).

Die Ableitung nach dem Quasizeitparameter $t$ wird durch einen Punkt über der entsprechenden Größe ausgedrückt, z.B. $\dot\sigma = \partial\sigma/\partial t$.

Aus (5.1) ist ersichtlich, daß neue plastische Deformationen nur im sogenannten aktiven Belastungsfall ($f(\sigma,\kappa) = 0$ und $q^T\dot\sigma > 0$) entstehen können. Dabei erfolgt ein „scharfer" Übergang vom elastischen zum plastischen Materialverhalten im Falle einer erneuten Belastung nach (elastischer) Entlastung. Später werden wir das obige Modell so modifizieren, daß, wie in der Praxis beobachtet wird (siehe z.B. [26], S. 199), dieser Übergang „weich" und glatt erfolgt.

Zunächst führen wir jedoch eine Reihe von Hilfsfunktionen ein, die es gestatten werden, die Beziehung (5.1) kompakt aufzuschreiben:

(5.2)
$$\theta(Y) = \theta_+(Y) = \begin{cases} 0, & \text{falls } Y < 0, \\ 1, & \text{falls } Y \ge 0, \end{cases}$$

$$\theta_-(Y) = \begin{cases} 0, & \text{falls } Y \le 0, \\ 1, & \text{falls } Y > 0, \end{cases}$$

$$\varphi(Y) = Y\,\theta(Y) = Y\,\theta_-(Y),$$

$$\bar\varphi(Y) = \begin{cases} \varphi(Y)\,, & \text{falls } Y \le 1, \\ 1 & ,\ \text{falls } Y \ge 1, \end{cases}$$

$$\psi_\delta = \psi_\delta(\sigma,\kappa) = \begin{cases} \bar\varphi\left((\delta + f(\sigma,\kappa))/\delta\right)\psi(\sigma,\kappa)\,, & \text{falls } \delta > 0, \\ \theta\left(f(\sigma,\kappa)\right)\psi(\sigma,\kappa) & ,\ \text{falls } \delta = 0. \end{cases}$$

Für solche $\dot\sigma$, $\dot e$, $\sigma$ und $\kappa$, die durch die erste Beziehung in (5.1) verbunden sind, gilt die sogenannte Signum–Relation (siehe [18], Lemma 2.1, S. 89 – 90)

(5.3)
$$\operatorname{sign} q^T\dot\sigma \;=\; \operatorname{sign} q^T D\,\dot e.$$

Unter Beachtung von (5.2) und (5.3) können wir nun (5.1) folgendermaßen kompakt aufschreiben:

$$
\begin{aligned}
\dot\sigma &= D\,\dot e - D\,a_\delta(\sigma,\kappa,\dot e),\\
\dot\kappa &= b_\delta(\sigma,\kappa,\dot e),
\end{aligned}
\tag{5.4}
$$

wobei in (5.4) $\delta = 0$ zu setzen ist und $a_\delta(\sigma,\kappa,\dot e)$ und $b_\delta(\sigma,\kappa,\dot e)$ für beliebiges, fixiertes $\delta \ge 0$ durch die Beziehungen

$$
\begin{aligned}
a_\delta(\sigma,\kappa,\dot e) &= \varphi\,(q^T D\,\dot e)\;\psi_\delta(\sigma,\kappa)\;q\,(\sigma,\kappa) \text{ und}\\
b_\delta(\sigma,\kappa,\dot e) &= \varphi\,(q^T D\,\dot e)\;\psi_\delta(\sigma,\kappa)\;r\,(\sigma,\kappa)
\end{aligned}
$$

definiert sind. Einen glatten Übergang vom elastischen zum plastischen Materialverhalten erhält man nun für beliebiges, fixiertes, hinreichend kleines $\delta > 0$ (siehe [18], Punkt 2.5.5, S. 93 – 97). Die Größe $\delta$ kann experimentell bestimmt werden. Diese Modifikation des Materialgesetzes wurde vom Autor erstmals in [19] vorgeschlagen. Die Materialgesetze (5.1) und (5.4) führen auf Differentialoperatoren mit unbeschränkten Nichtlinearitäten (vgl. [27] und siehe [18], Punkt 2.7.2, S. 119 – 122). Um diese unbeschränkten Nichtlinearitäten zu beseitigen, führen wir eine weitere Modifikation von (5.4) durch. Diese Modifikation basiert auf der von V. J. Rivkind und N. N. Uralzeva in [27] vorgeschlagenen Abschneidetechnik und wird nur für hinreichend große Deformationen wirksam. Dazu führen wir eine stetig differenzierbare Funktion $\eta\,(y) \in C^1(\mathbb{R}^1)$ ein, sodaß

$$
\eta\,(y) = \begin{cases} 1 & , \text{ falls } y \le 1,\\ \bar\eta\,(y) & , \text{ falls } 1 \le y \le 2,\\ 0 & , \text{ falls } y \ge 2. \end{cases}
$$

Die Funktion $\bar\eta\,(y)$ kann dabei so gewählt werden, daß die Ungleichung

$$
1 - \nu_0\bar\eta\,(y) + c\,(1 - \bar\eta\,(y)) + 2\,\nu_0\bar\eta'(y)\,y \ge \bar\mu_1 = \text{const.},\quad \forall\, y \in [1,2],
\tag{5.5}
$$

mit einer gewissen positiven Konstante $c \ge \nu_0/4$, die $\bar\mu_1 > 0$ garantiert, gilt, wobei $\nu_0$ die Konstante aus der Ungleichung

$$
0 \le \psi_\delta(\sigma,\kappa)\,q^T(\sigma,\kappa)\,D\,q\,(\sigma,\kappa) \le \nu_0 = \text{const.} < 1
\tag{5.6}
$$

ist (siehe Punkt 5.2.1, Voraussetzung (A1)). Diese Ungleichung besagt mechanisch, daß sich das betrachtete Material „streng“ verfestigt. In [18], S. 120, sind Funktionen $\bar\eta\,(y)$ angegeben, sodaß (5.5) erfüllt ist. Wir erhalten nun das endgültige Materialgesetz in der Form

$$
\begin{aligned}
\dot\sigma &= D\,\dot e - D\,a^{(\gamma)}(\sigma,\kappa,\dot e),\\
\dot\kappa &= b^{(\gamma)}(\sigma,\kappa,\dot e),
\end{aligned}
\tag{5.7}
$$

mit

$$
a^{(\gamma)}(\sigma,\kappa,\dot e) = \eta\left(\frac{\dot e^T D\,\dot e}{\gamma}\right) a_\delta(\sigma,\kappa,\dot e) - c\left(1 - \eta\left(\frac{\dot e^T D\,\dot e}{\gamma}\right)\right)\dot e
$$

$$
b^{(\gamma)}(\sigma,\kappa,\dot e) = \eta\left(\frac{\dot e^T D\,\dot e}{\gamma}\right) b_\delta(\sigma,\kappa,\dot e).
$$

Die Zahl $\gamma$ ist dabei ein beliebiger, aber fixierter positiver Regularisierungsparameter. Für $\gamma = \infty$ wird $\eta\,(\dot{e}^T D\,\dot{e}/\gamma)$ formal gleich 1 gesetzt, sodaß $a^{(\infty)}(\sigma,\kappa,\dot{e}) = a_\delta(\sigma,\kappa,\dot{e})$ und $b^{(\infty)}(\sigma,\kappa,\dot{e}) = b_\delta(\sigma,\kappa,\dot{e})$.
Wir kommen nun zur Formulierung der Anfangsrandwertaufgabe (ARWA) der elastisch–plastischen Fließtheorie. Dazu führen wir die Hilbert–Räume $V$, $S$ und $H$ der geometrisch zulässigen Verschiebungsvektoren $u = (u_1, u_2, u_3)^T$, der Spannungsvektoren $\sigma = [\sigma_{ij}]_{i,j=1,2,3}$ und der Vektoren $\kappa = (\kappa_1, \kappa_2, \ldots, \kappa_L)^T$ der Verfestigungsparameter ein. Folglich sind $V$, $S$ und $H$ entsprechend Unterräume der Räume $[W_2^1(\Omega)]^3$, $[L_2(\Omega)]^9$ und $[L_2(\Omega)]^L$, wobei das vom betrachteten dreidimensionalen Körper eingenommene Gebiet $\Omega$ ($\Omega \subset \mathbb{R}^3$) als beschränkt und hinreichend regulär (zunächst $\partial\,\Omega \in C^{0,1}$) vorausgesetzt wird. Im weiteren betrachten wir der Einfachheit halber für die Verschiebungen homogene Dirichletbedingungen auf dem gesamten Rand $\partial\,\Omega$ von $\Omega$ und setzen deshalb $V = \left[\overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega)\right]^3$ (andere Randbedingungen siehe [18]). Wir führen nun in $V$, $S$ und $H$ die folgenden Skalarprodukte und Normen ein:

$$[u,v]_V = (e\,(u), e\,(v))_{D,\Omega} = \int_\Omega e^T(u)\,D\,e\,(v)\,dx,\ \ |u|_V = [u,u]_V^{0.5};$$

$$[\sigma,\tau]_S = (\sigma,\tau)_{D^{-1},\Omega} = \int_\Omega \sigma^T D^{-1}\tau\,dx,\ \ |\sigma|_S = [\sigma,\sigma]_S^{0.5};$$

$$[\kappa,\lambda]_H = (\kappa,\lambda)_{I,\Omega} = (\kappa,\lambda)_\Omega = \int_\Omega \kappa^T\lambda\,dx,\ \ |\kappa|_H = [\kappa,\kappa]_H^{0.5},$$

wobei $e\,(v) = [e_{ij}(v)]_{i,j=1,2,3}$, $e_{ij}(v) = 0.5\,(v_{i,j} + v_{j,i})$ und $v_{i,j} = \partial\,v_i/\partial\,x_j$ für beliebige $v \in V$. Die Verschiebungsgeschwindigkeitsvektoren $\dot{u} = (\dot{u}_1, \dot{u}_2, \dot{u}_3)^T$ können ebenfalls als Elemente von $V$ betrachtet werden. Entsprechend können die Vektoren $\dot{\sigma}$, $e$ und $\dot{e}$ als Elemente von $S$ und $\dot{\kappa}$ als Elemente von $H$ betrachtet werden. Mit $V^*$ bezeichnen wir im folgenden den zu $V$ dualen Raum und mit $<\cdot,\cdot>$: $V^* \times V \longrightarrow \mathbb{R}^1$ das Dualitätsprodukt. Für gegebenes $F\,(t) \in V^*$, $t \in \mathbf{T} = [0,T]$ (= Quasizeitintervall) kann nun die ARWA $\left(A^{(\gamma)}\right)$ der elastisch–plastischen Fließtheorie wie folgt formuliert werden:

$\left(A^{(\gamma)}\right)$ Gesucht sind Vektorfunktionen $u$, $\sigma$ und $\kappa$, sodaß

(i) das verallgemeinerte Kräftegleichgewicht
$\int_\Omega \dot{\sigma}^T e\,(v)\,dx = < F, v > \quad \forall\, v \in V,\ t \in \mathbf{T} = [0,T],$

(ii) die differentiellen Spannungs–Verzerrungsbeziehungen
$\dot{\sigma} = D\,\dot{e} - D\,a^{(\gamma)}(\sigma,\kappa,\dot{e}),$

(iii) die Evolutionsgleichung
$\dot{\kappa} = b^{(\gamma)}(\sigma,\kappa,\dot{e}),$
für die Verfestigungsparameter,

(iv) die geometrischen Beziehungen
$\dot{e} = \dot{e}\,(u) = [\dot{e}_{ij}(u)]_{i,j=1,2,3} \quad (\dot{e}_{ij}(u) = 0.5\,(\dot{u}_{i,j} + \dot{u}_{j,i}))$

(v) und die Anfangsbedingungen
$u\,(x,0) = \mathbf{O},\ \ \sigma\,(x,0) = \mathbf{O},\ \ \kappa\,(x,0) = \mathbf{O},\ \ x \in \Omega,$

erfüllt werden.

Im nächsten Punkt werden wir zeigen, daß unter geeigneten Voraussetzungen und bei gegebenen $F \in C(\mathbf{T}, V^*)$ eine eindeutig bestimmte Lösung $u \in C^1(\mathbf{T}, V)$, $\sigma \in C^1(\mathbf{T}, S)$, $\kappa \in C^1(\mathbf{T}, H)$ existiert. Unter der etwas schwächeren Voraussetzung $F \in L_\infty(\mathbf{T}, V^*)$ kann immer noch gezeigt werden, daß $\dot{u} \in L_\infty(\mathbf{T}, V)$, $\dot{\sigma} \in L_\infty(\mathbf{T}, S)$ und $\dot{\kappa} \in L_\infty(\mathbf{T}, H)$. Die Räume $C(\mathbf{T}, V^*)$, $C^1(\mathbf{T}, V)$ etc. werden z.B. in [18], Punkt 1.5.3, S. 44 – 46, definiert.
In [29] werden, ausgehend vom hier betrachteten dreidimensionalen Modell, strukturmechanische Modelle untersucht und entsprechende analytische und numerische Resultate bewiesen. Folglich bleiben prinzipiell die in der vorliegenden Arbeit für das 3D–Modell formulierten Resultate auch für verschiedene Scheiben–, Platten– und Schalenmodelle richtig.

## 5.2 Existenz–, Eindeutigkeits– und Regularitätsresultate

Die Resultate der funktionalanalytischen Untersuchung zur Existenz, Eindeutigkeit und Regularität der Lösung der Aufgabe $\left(A^{(\gamma)}\right)$ sind ausführlich im Kapitel 3 der Monographie [18] dargelegt.

### 5.2.1 Zusammenstellung der Voraussetzungen

Zur Herleitung der theoretischen Resultate werden die folgenden drei Voraussetzungen (in [18] "A–properties" genannt) benötigt:

$$\text{(A1)} \quad 0 \le \psi_\delta(\sigma,\kappa)\, q^T(\sigma,\kappa)\, D\, q(\sigma,\kappa) \le$$
$$\le \frac{q^T(\sigma,\kappa)\, D\, q(\sigma,\kappa)}{q^T(\sigma,\kappa)\, D\, q(\sigma,\kappa) - p^T(\sigma,\kappa)\, r(\sigma,\kappa)} \le \nu_0 = \text{const.} < 1,$$

$$\text{(A2)} \quad \left\| \frac{\partial}{\partial \sigma_{ij}}\, a_\delta(\sigma,\kappa,e) \right\|_D, \quad \left\| \frac{\partial}{\partial \kappa_k}\, a_\delta(\sigma,\kappa,e) \right\|_D \le \nu_1 \, \|e\|_D,$$

$$\text{(A3)} \quad \left\| \frac{\partial}{\partial \sigma_{ij}}\, b_\delta(\sigma,\kappa,e) \right\|, \quad \left\| \frac{\partial}{\partial \kappa_k}\, b_\delta(\sigma,\kappa,e) \right\| \le \nu_2 \, \|e\|_D,$$

$$0 \le \psi_\delta(\sigma,\kappa)\, \|q(\sigma,\kappa)\|_D \, \|r(\sigma,\kappa)\| \le \nu_3$$

für alle $\sigma \in I\!R_\sigma = \{\sigma = [\sigma_{ij}]_{i,j=1,2,3} \in I\!R^9 : \sigma_{ij} = \sigma_{ji}\}$, $\kappa \in \mathcal{M}$, $e \in I\!R_\sigma$; $i, j = 1,2,3$; $k = 1,2,\ldots,L$; und für fixiertes $\delta > 0$, wobei $\|x\|_D^2 = x^T D\, x$, $\|x\|^2 = x^T x$, $\mathcal{M} \subset I\!R^L$ die Menge der zulässigen Vektoren $\kappa = (\kappa_1, \kappa_2, \ldots, \kappa_L)^T$ der Verfestigungsparameter ist und $\nu_0$, $\nu_1$, $\nu_2$ und $\nu_3$ gewisse nichtnegative Konstanten mit $\nu_0 < 1$ sind. In [18], Punkt 2.6.1 und 2.6.2, S. 98 – 105, wurden die Voraussetzungen (A1) – (A3) unter anderem für die Fließbedingung von R. v. Mises im Falle isotroper Verfestigung und bei assoziiertem Fließgesetz überprüft und die Konstanten $\nu_0$, $\nu_1$, $\nu_2$ und $\nu_3$ explizit bestimmt (siehe Theorem 2.1 in [18]). Die Voraussetzungen (A1) – (A3) implizieren, daß die Fließfunktion $f(\sigma,\kappa)$ und die Verfestigungsfunktion $r(\sigma,\kappa)$ entsprechend nach $\sigma_{ij}$ und $\kappa_k$ differenzierbar sind. In den meisten praktischen Fällen ist dies erfüllt. Eine Ausnahme bilden die in der Bodenmechanik üblichen Fließfunktionen vom Coulombschen Typ. Diese Fließfunktionen sind in gewissen Punkten nicht differenzierbar und erfordern deshalb eine gesonderte Betrachtung (siehe [18], Punkte 2.6.3 und 2.6.4, S. 105 – 116).

### 5.2.2 Eindeutigkeit der Lösung

**Satz 5.1:**
Es seien die Voraussetzungen (A1) – (A3) und (5.5) erfüllt. Desweiteren sei $\gamma \in (0, \infty)$ fixiert und $F \in L_\infty(\mathbf{T}, V^*)$. Dann hat das Problem $\left(A^{(\gamma)}\right)$ nicht mehr als eine Lösung $(u, \sigma, \kappa)$ mit $\dot{u} \in L_\infty(\mathbf{T}, V)$, $\dot{\sigma} \in L_\infty(\mathbf{T}, S)$ und $\dot{\kappa} \in L_\infty(\mathbf{T}, H)$.

**Beweis:**
Siehe [18], Beweis des Theorems 3.4, S. 146 – 147. ∎

### 5.2.3 Existenzsatz

**Satz 4.2:**
Es seien die Voraussetzungen (A1) – (A3) und (5.5) erfüllt. Desweiteren sei $\gamma \in (0, \infty)$ fixiert und $F \in C(\mathbf{T}, V^*)$. Dann existiert für das Problem $\left(A^{(\gamma)}\right)$ eine eindeutig bestimmte Lösung $u \in C^1(\mathbf{T}, V)$, $\sigma \in C^1(\mathbf{T}, S)$ und $\kappa \in C^1(\mathbf{T}, H)$.

**Beweis:**
Siehe [18], Beweis des Theorems 3.6, S. 151 – 153. ∎

**Bemerkung 5.1:**

1. Der Beweis des Existenzsatzes ist konstruktiv. Es wird eine stetige Variante der Methode der veränderlichen Steifigkeitsparameter benutzt. Bei beliebig gegebenen $u^0 \in C^1(\mathbf{T}, V)$, $\sigma^0 \in C^1(\mathbf{T}, S)$ und $\kappa^0 \in C^1(\mathbf{T}, H)$ wird eine Folge $u^n \in C^1(\mathbf{T}, V)$, $\sigma^n \in C^1(\mathbf{T}, S)$, $\kappa^n \in C^1(\mathbf{T}, H)$ gemäß den Beziehungen

$$\begin{aligned}
&\int_\Omega [\dot{\sigma}^n]^T e\,(v)\,dx = < F, v > \quad \forall\, v \in V,\ \ t \in \mathbf{T} = [0, T],\\
&\dot{\sigma}^n = D\,\dot{e}^n - D\,a^{(\gamma)}(\sigma^{n-1}, \kappa^{n-1}, \dot{e}^n),\\
&\dot{\kappa}^n = b^{(\gamma)}(\sigma^{n-1}, \kappa^{n-1}, \dot{e}^n),\\
&\dot{e}^n = e\,(\dot{u}^n),\\
&u^n(0) = \mathbf{O},\ \ \sigma^n(0) = \mathbf{O},\ \ \kappa^n = \mathbf{O},\\
&n = 1, 2, \ldots,
\end{aligned}$$

konstruiert und gezeigt, daß $u^n$, $\sigma^n$ und $\kappa^n$ bei gegebenen $u^{n-1}$, $\sigma^{n-1}$ und $\kappa^{n-1}$ eindeutig existieren und daß $u^n$ in $C^1(\mathbf{T}, V)$ gegen $u$, $\sigma^n$ in $C^1(\mathbf{T}, S)$ gegen $\sigma$ und $\kappa^n$ in $C^1(\mathbf{T}, H)$ gegen $\kappa$ konvergiert. Darüber hinaus können Konvergenzgeschwindigkeitsabschätzungen erzielt werden (siehe Teil 2 der Aussagen des Theorems 3.6 in [18], S. 151). Die Konvergenzrate läßt sich mit $\tilde{c}^{n-1}/(n-1)!$ abschätzen, wobei $\tilde{c}$ eine gewisse positive Konstante ist.

2. Unter der etwas schwächeren Voraussetzung $F \in L_\infty(\mathbf{T}, V^*)$ kann die Existenz der Lösung der Aufgabe $\left(A^{(\gamma)}\right)$ ebenfalls gezeigt werden. In diesem Falle gilt $\dot{u} \in L_\infty(\mathbf{T}, V)$, $\dot{\sigma} \in L_\infty(\mathbf{T}, S)$ und $\dot{\kappa} \in L_\infty(\mathbf{T}, H)$.

### 5.2.4 Lipschitzstetigkeit bezüglich des Quasizeitparameters

**Satz 5.3:**

Es seien die Voraussetzungen (A1) – (A3) und (5.5) erfüllt. Desweiteren sei $\gamma \in (0, \infty)$ fixiert und $F \in L_\infty(\mathbf{T}, V^*)$. Dann gelten für fast alle $t_1, t_2 \in [0, T]$ die Abschätzungen

$$|\dot{u}(t_2) - \dot{u}(t_1)|_V \leq \frac{k_1}{\mu_1} \, \frac{1 + \nu_0 + c_\gamma + \nu_3}{1 - \nu_0} \, \sqrt{\gamma} \, |F|_{L_\infty(\mathbf{T},V^*)} |t_2 - t_1| + \mu_1^{-1} |F(t_2) - F(t_1)|_{V^*},$$

$$|\dot{\sigma}(t_2) - \dot{\sigma}(t_1)|_S \leq \left(1 + \frac{\mu_2}{\mu_1}\right) k_1 \frac{1 + \nu_0 + c_\gamma + \nu_3}{1 - \nu_0} \, \sqrt{\gamma} \, |F|_{L_\infty(\mathbf{T},V^*)} |t_2 - t_1| + \mu_2 \, \mu_1^{-1} |F(t_2) - F(t_1)|_{V^*},$$

$$|\dot{\kappa}(t_2) - \dot{\kappa}(t_1)|_H \leq \left(\frac{k_1 k_2}{\mu_1} + k_3\right) \frac{1 + \nu_0 + c_\gamma + \nu_3}{1 - \nu_0} \, \sqrt{\gamma} \, |F|_{L_\infty(\mathbf{T},V^*)} |t_2 - t_1| + k_2 \, \mu_1^{-1} |F(t_2) - F(t_1)|_{V^*},$$

wobei $(u, \sigma, \kappa)$ die Lösung von $\left(A^{(\gamma)}\right)$ ist und

$$\mu_1 = \min_{y \geq 0} \left\{ 1 - \nu_0 \, \eta\,(y) + c\,(1 - \eta\,(y)) + \frac{\nu_0^2}{2c} \, \eta\,(y)\, y \right\},$$

$$\mu_2 = \max_{y \geq 0} \{ 1 - \nu_0 \, \eta\,(y) + c\,(1 - \eta\,(y)) - 2\,(c + \nu_0)\, \eta'(y)\, y \},$$

$$c_\gamma = c \qquad (\gamma \in (0, \infty) \text{ fixiert}),$$

$$k_1 = \nu_1 \max_{y \geq 0} \{ \eta\,(y) \sqrt{y} \} \max \left\{ 3 \sqrt{\lambda_2(D)}, \sqrt{L} \right\},$$

$$k_2 = \nu_3 \max_{y \geq 0} \{ 2\, \eta'(y)\, y + \eta\,(y) \},$$

$$k_3 = \nu_2 \max_{y \geq 0} \{ \eta\,(y) \sqrt{y} \} \max \left\{ 3 \sqrt{\lambda_2(D)}, \sqrt{L} \right\},$$

$\lambda_2(D)$ ist der größte Eigenwert der Elastizitätsmatrix $D$.

**Beweis:**

Siehe [18], Beweis des Theorems 3.5, S. 148 – 149. ∎

**Folgerung 5.1:**
Es sei zusätzlich zu den Voraussetzungen des Satzes 5.3 $F \in C^{0,1}(\mathbf{T}, V^*)$, d.h., es existiert eine nichtnegative Konstante Lip $(F)$, sodaß

$$|F(t_2) - F(t_1)|_{V^*} \leq \mathrm{Lip}\,(F)\,|t_2 - t_1| \quad \forall\, t_1, t_2 \in [0, T].$$

Dann gelten für alle $t_1, t_2 \in \mathbf{T} = [0, T]$ die folgenden Abschätzungen

$$\begin{aligned} |\dot{u}(t_2) - \dot{u}(t_1)|_V &\leq k_5\,|t_2 - t_1|, \\ |\dot{\sigma}(t_2) - \dot{\sigma}(t_1)|_S &\leq k_6\,|t_2 - t_1|, \\ |\dot{\kappa}(t_2) - \dot{\kappa}(t_1)|_H &\leq k_7\,|t_2 - t_1|, \end{aligned}$$

wobei
$$\begin{aligned} k_5 &= \frac{k_1}{\mu_1}\,\frac{1 + \nu_0 + c_\gamma + \nu_3}{1 - \nu_0}\,\sqrt{\gamma}\,\max_{t\,\in\,\mathbf{T}} |F|_{V^*} + \mu_1^{-1}\,\mathrm{Lip}\,(F), \\ k_6 &= \left(1 + \frac{\mu_2}{\mu_1}\right) k_1\,\frac{1 + \nu_0 + c_\gamma + \nu_3}{1 - \nu_0}\,\sqrt{\gamma}\,\max_{t\,\in\,\mathbf{T}} |F|_{V^*} + \frac{\mu_2}{\mu_1}\,\mathrm{Lip}\,(F), \\ k_7 &= \left(\frac{k_1\,k_2}{\mu_1} + k_3\right) \frac{1 + \nu_0 + c_\gamma + \nu_3}{1 - \nu_0}\,\sqrt{\gamma}\,\max_{t\,\in\,\mathbf{T}} |F|_{V^*} + \frac{k_2}{\mu_1}\,\mathrm{Lip}\,(F). \end{aligned}$$

Folglich gilt in diesem Falle für die Lösung von $\left(A^{(\gamma)}\right)$, daß $u \in C^{1,1}(\mathbf{T}, V)$, $\sigma \in C^{1,1}(\mathbf{T}, S)$ und $\kappa \in C^{1,1}(\mathbf{T}, H)$.

### 5.2.5 $W_2^2$–Regularität

**Satz 5.4:** (lokale $W_2^2$–Regularität)
Es seien die Voraussetzungen des Satzes 5.1 erfüllt. Darüber hinaus gelte

$$F \in L_\infty(\mathbf{T}, [L_2(G_{2\varepsilon})]^3),$$

wobei $G_{2\varepsilon}$ eine $2\varepsilon$–Umgebung einer beliebigen, in $\Omega$ enthaltenen Kugel $G$ ist, sodaß $\bar{G}_{2\varepsilon} \subset \Omega$ für fixiertes, hinreichend kleines, positives $\varepsilon$.
Dann gelten für die Lösung der Aufgabe $\left(A^{(\gamma)}\right)$ die lokalen Regularitätsaussagen

$$\begin{aligned} \dot{u} &\in L_\infty\left(\mathbf{T}, [W_2^2(G)]^3\right), \\ \dot{\sigma} &\in L_\infty\left(\mathbf{T}, [W_2^1(G)]^9\right), \\ \dot{\kappa} &\in L_\infty\left(\mathbf{T}, [W_2^1(G)]^L\right) \end{aligned}$$

und die Abschätzungen

$$\|\dot{u}\|_{2,G}, \;\; \|\dot{\sigma}\|_{1,G}, \;\; \|\dot{\kappa}\|_{1,G} \leq \bar{c} = \text{const.} < \infty,$$

wobei $\bar{c}$ eine von $D_{ijkl}$ $(i, j, k, l = 1, 2, 3)$, $\nu_p$ $(p = 0, 1, 2, 3)$, $c$, $\sqrt{\gamma}$, $\varepsilon$, $\operatorname*{ess\,sup}_{t\,\in\,[0,T]} \|F\|_{0,G_\varepsilon}$ und $\operatorname*{ess\,sup}_{t\,\in\,[0,T]} |F|_{V^*}$ abhängige, nichtnegative Konstante ist.

**Beweis:**
Der Beweis dieses Satzes wurde erstmalig vom Autor in [19] für einen Spezialfall der Aufgabe $\left(A^{(\gamma)}\right)$ geführt. Den Beweis für den hier betrachteten allgemeinen Fall findet der Leser in [18], S. 155 – 159.

Die im Satz 5.4 angeführten Resultate bleiben natürlich auch für jedes streng innere Teilgebiet $\Omega'$ von $\Omega$ mit hinreichend glattem Rand $\partial\Omega'$ richtig. Mit einer ähnlichen Beweistechnik wurde von A. Tamme in [29] für die erste Anfangsrandwertaufgabe $\left(V = \left[\overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega)\right]^3\right)$ der folgende globale Regularitätssatz bewiesen.

**Satz 5.5:** (globale $W_2^2$–Regularität)
Es seien die Voraussetzungen des Satzes 5.1 erfüllt, und es sei $V = \left[\overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega)\right]^3$. Darüber hinaus gelte $F \in L_\infty(\mathbf{T}, [L_2(\Omega)]^3)$ und $\partial\Omega \in C^2$.

Dann gelten für die Lösung der Aufgabe $\left(A^{(\gamma)}\right)$ die globalen Regularitätsaussagen

$$
\begin{aligned}
&\dot{u} \in L_\infty(\mathbf{T}, [W_2^2(\Omega)]^3),\\
&\dot{\sigma} \in L_\infty(\mathbf{T}, [W_2^1(\Omega)]^9),\\
&\dot{\kappa} \in L_\infty(\mathbf{T}, [W_2^1(\Omega)]^L)
\end{aligned}
$$

und die Abschätzungen

$$\|\dot{u}\|_{2,\Omega},\ \|\dot{\sigma}\|_{1,\Omega},\ \|\dot{\kappa}\|_{1,\Omega} \le \bar{\bar{c}} = \text{const.} < \infty,$$

wobei $\bar{\bar{c}}$ eine von $D_{ijkl}$ $(i,j,k,l = 1,2,3)$, $\nu_p$ $(p = 0,1,2,3)$, $c$, $\sqrt{\gamma}$, $\Omega$ und $\underset{t \in [0,T]}{\text{ess sup}} \|F\|_{0,\Omega}$ abhängige, nichtnegative Konstante ist.

## 5.3 Einige Resultate zur numerischen Untersuchung der Aufgabe $\left(A^{(\gamma)}\right)$ der elastisch–plastischen Fließtheorie

In diesem Punkt betrachten wir die sogenannte inkrementelle Methode zur Quasizeitintegration und kombinieren sie dann mit der Methode der finiten Elemente zur Approximation der Ortskoordinate. Die inkrementelle Methode entspricht dem Eulerschen Polygonenzugverfahren und hat somit erste Genauigkeitsordnung bezüglich des Zeitschrittes $\Delta t$. Die ausführliche Darstellung dieser Untersuchungen findet der Leser im Kapitel 4 der Monographie [18]. Von V.G. Korneev wurde eine Klasse von Zeitintegrationsmethoden zweiter Genauigkeitsordnung vorgestellt. Diese Klasse enthält das Runge–Kutta–Verfahren zweiter Ordnung (siehe [18], Punkt 4.1.3, S. 168 – 178, und Punkt 4.2.6, S. 201 – 209).

### 5.3.1 Untersuchung der inkrementellen Methode

#### 5.3.1.1 Die inkrementelle Methode

Wir unterteilen zunächst das Quasizeitintervall $\mathbf{T} = [0, T]$ durch die Punkte $t_n = n\,\Delta t$, $\Delta t = T/N$, $n = 0, 1, \ldots, N$, in $N$ gleiche Teile und ersetzen die Ableitungen $\dot{u}$, $\dot{e}$, $\dot{\sigma}$, $\dot{\kappa}$ in $\left(A^{(\gamma)}\right)$ durch vorwärtige Differenzen, die wir hier mit $u_t$, $e_t$, $\sigma_t$, $\kappa_t$ und für $t = t_n$ mit $u_t^n$, $e_t^n$, $\sigma_t^n$, $\kappa_t^n$ bezeichnen wollen, z.B.

$$u_t^n = u_t(t_n) = \frac{u\,(t_{n+1}) - u\,(t_n)}{\Delta t} = \frac{u^{n+1} - u^n}{\Delta t} = \frac{\Delta u^n}{\Delta t}.$$

Damit erhalten wir folgendes Schema $\left(A_\Delta^{(\gamma)}\right)$:

$$\left(A_\Delta^{(\gamma)}\right) \quad \begin{aligned} & u_t^n \in V : \int_\Omega \left[e\,(u_t^n) - a^{(\gamma)}(\sigma^n, \kappa^n, e\,(u_t^n))\right]^T D\,e\,(v)\,dx = < F_*(t_n), v > \qquad \forall\, v \in V, \\ & u^{n+1} = u^n + \Delta u^n, \quad \Delta u^n = u_t^n \Delta t, \\ & e^{n+1} = e^n + \Delta e^n, \quad \Delta e^n = e_t^n \Delta t, \quad e_t^n = e\,(u_t^n), \\ & \sigma^{n+1} = \sigma^n + \Delta\sigma^n, \quad \Delta\sigma^n = \left[D\,e\,(u_t^n) - D\,a^{(\gamma)}(\sigma^n, \kappa^n, e\,(u_t^n))\right]\Delta t, \\ & \kappa^{n+1} = \kappa^n + \Delta\kappa^n, \quad \Delta\kappa^n = b^{(\gamma)}(\sigma^n, \kappa^n, e\,(u_t^n))\Delta t, \\ & n = 0, 1, \ldots, N-1, \\ & u^0 = u\,(0) \equiv \mathbf{O}, \quad \sigma^0 = \sigma\,(0) \equiv \mathbf{O}, \quad \kappa^0 = \kappa\,(0) \equiv \mathbf{O}. \end{aligned}$$

Dabei kann $F_*(t_n) \in V^*$ in Abhängigkeit von den Glattheitseigenschaften von $F$ wie folgt gewählt werden:

$$F_*(t_n) = \frac{1}{\Delta t}\int_{t_n}^{t_{n+1}} F\,(t)\,dt \quad \text{oder} \quad F_*(t_n) = F\,(t_n + \beta\,\Delta t) \tag{5.8}$$

mit einem gewissen $\beta \in [0, 1]$.
Die obige Integralidentität stellt die verallgemeinerte Formulierung eines nichtlinearen, elliptischen Differentialgleichungssystems zur Bestimmung von $u_t^n \in V$ dar. Damit ist auf jedem Inkrementschritt $n$ ein derartiges nichtlineares, elliptisches Differentialgleichungssystem zu lösen, das wir auch in der Form der Operatorgleichung

$$A^{(\gamma)}(\sigma^n, \kappa^n)\,u_t^n = F_*(t_n) \tag{5.9}$$

aufschreiben können, wobei $u_t^n \in V$, $F_*(t_n) \in V^*$ und der Operator $A^{(\gamma)}(\sigma^n, \kappa^n) : V \to V^*$ durch die Identität

$$\left\langle A^{(\gamma)}(\sigma^n, \kappa^n)\,u, v\right\rangle = \int_\Omega \left[e\,(u) - a^{(\gamma)}(\sigma^n, \kappa^n, e\,(u))\right]^T D\,e\,(v)\,dx \quad \forall\, u, v \in V \tag{5.10}$$

definiert wird.

**Satz 5.6:**

Es seien die Voraussetzungen (A1) – (A3) und (5.5) erfüllt. Desweiteren sei $\gamma \in (0,\infty)$ fixiert und $F \in L_\infty(\mathbf{T}, V^*)$. Dann existiert für jedes $n = 0, 1, \ldots, N-1$ eine eindeutig bestimmte Vektorfunktion $u_t^n \in V$, die die Integralidentität des Schemas $\left(A_\Delta^{(\gamma)}\right)$ erfüllt und die folglich durch die oben angegebene inkrementelle Methode eindeutig bestimmt werden kann.

**Beweis:**

Siehe [18], erster Teil des Theorems 4.1 und Aussagen des Theorems 3.2. ■

#### 5.3.1.2 Die Konvergenz der inkrementellen Methode

**Satz 5.7:**

Es seien die Voraussetzungen (A1) – (A3) und (5.5) erfüllt. Desweiteren sei $\gamma \in (0,\infty)$ fixiert, $F \in C^{0,1}(\mathbf{T}, V^*)$ und $F_*(t_n)$ sei durch eine der Beziehungen (5.8) definiert. Dann konvergieren $\{u^n\}$, $\{\sigma^n\}$ und $\{\kappa^n\}$ gegen die Lösung $u$, $\sigma$, $\kappa$ der Aufgabe $\left(A^{(\gamma)}\right)$, und es gelten die Konvergenzabschätzungen

$$\begin{aligned}
&|\dot u\,(x,t) - u_t^n(x)|_V \le \left[\mu_1^{-1}\,\mathrm{Lip}\,(F) + \left(1 + \mu_1^{-1}\,\mu_2\right) k_5 + \frac{k_1\,c_1}{\mu_1\,c_2}\,\left(e^{c_2 t} - 1\right)\sqrt{\gamma}\right]\Delta t,\\
&|\dot\sigma\,(x,t) - \sigma_t^n(x)|_S + |\dot\kappa\,(x,t) - \kappa_t^n(x)|_H \le \left(k_6 + k_7 + c_1\,e^{c_2 t}\right)\Delta t,\\
&\forall\, t \in [t_n, t_{n+1}),\quad \forall\, n = 0, 1, \ldots, N-1,
\end{aligned}$$

wobei
$$\begin{aligned}
c_1 &= k_6 + k_7 + \left[\mu_1^{-1}\,\mathrm{Lip}\,(F) + \left(1 - \mu_1^{-1}\,\mu_2\right) k_5\right](\mu_2 + k_2),\\
c_2 &= \left(k_1 + k_3 + \mu_1^{-1} k_1\,(\mu_2 + k_2)\right)\sqrt{\gamma}.
\end{aligned}$$

Die Konstanten $\mu_1$, $\mu_2$, $k_1$, $k_2$ und $k_3$ wurden im Satz 5.3 definiert; die Konstanten $k_5$, $k_6$ und $k_7$ sind in Folgerung 5.1 angegeben.

**Beweis:**

Siehe [18], Punkt 4.1.2, S. 163 – 168. ■

### 5.3.2 Die Kombination der inkrementellen Methode mit der Methode der finiten Elemente

#### 5.3.2.1 Das numerische Schema der inkrementellen Finiten–Elemente–Methode

Wir approximieren jetzt das nichtlineare Differentialgleichungssystem (5.9) mit Hilfe der finiten Elemente. Es sei nun $V_h$ ($V_h \subset V$) eine Finite–Elemente–Approximation (kurz: FE–Approximation) von $V$ und $E_h$ der zu $V_h$ isomorphe Raum der Vektoren der Knotenparameter. Die Elemente von $V_h$ bezeichnen wir mit $u_h$, $v_h$ etc.; die zugehörigen Vektoren aus $E_h$ mit $\underline{u}_h$, $\underline{v}_h$ etc.:

$$V_h \ni u_h \longleftrightarrow \underline{u}_h \in E_h. \tag{5.11}$$

Somit gilt die bekannte Darstellung

$$u_h = \sum_{i=1}^{M(h)} u^{(i)} \varphi_h^{(i)}(x), \quad \underline{u}_h = \left[u^{(i)}\right]_{i=1,2,\ldots,M(h)},$$

wobei $\left\{\varphi_h^{(i)} : i = 1, 2, \ldots, M(h)\right\}$ die FE–Basis von $V_h$ ist (siehe [18], Punkt 4.2.1, S. 179 – 182). Aufgrund der Regularitätsaussagen aus Punkt 5.2.5 der vorliegenden Arbeit beschränken wir uns im weiteren auf lineare, simpliziale Elemente. Es sei also $\Omega$, wie in [18], S. 182 – 190, beschrieben, durch Tetraeder regulär trianguliert, und die Elemente aus $V_h$ seien stückweise lineare (linear über jedem Tetraeder), stetige Vektorfunktionen. Dann gilt für $u \in V \cap \left[W_2^2(\Omega)\right]^3$ (vgl. Satz 5.5) die bekannte Approximationsabschätzung (siehe Vorlesung Numerik II, Satz 4.5 [22] bzw. FE–Standardliteratur, z.B. [8]).

$$E_h(u) \equiv \inf_{v_h \in V_h} \|u - v_h\|_{1,\Omega} \leq a_{1,2} h \|u\|_{2,\Omega}, \tag{5.12}$$

wobei $h$ ein üblicher, „eindimensionaler“ Gitterparameter und $a_{1,2}$ eine von $h$ und $u$ unabhängige Konstante ist. Damit ergibt sich die folgende FE–Approximation $\left(A_{\Delta,h}^{(\gamma)}\right)$ des Schemas $\left(A_{\Delta}^{(\gamma)}\right)$:

$$\left(A_{\Delta,h}^{(\gamma)}\right) \quad \begin{aligned}
& u_{t,h}^n \in V_h : \int_\Omega \left[e\left(u_{t,h}^n\right) - a^{(\gamma)}\left(\sigma_h^n, \kappa_h^n, e\left(u_{t,h}^n\right)\right)\right]^T D\, e\,(v_h)\, dx = < F_*(t_n), v_h > \quad \forall\, v_h \in V_h, \\
& u_h^{n+1} = u_h^n + \Delta u_h^n, \quad \Delta u_h^n = u_{t,h}^n \Delta t, \\
& e_h^{n+1} = e_h^n + \Delta e_h^n, \quad \Delta e_h^n = e_{t,h}^n \Delta t, \quad e_{t,h}^n = e\,(u_{t,h}^n), \\
& \sigma_h^{n+1} = \sigma_h^n + \Delta\sigma_h^n, \quad \Delta\sigma_h^n = D\left[e\left(u_{t,h}^n\right) - a^{(\gamma)}\left(\sigma_h^n, \kappa_h^n, e\left(u_{t,h}^n\right)\right)\right]\Delta t, \\
& \kappa_h^{n+1} = \kappa_h^n + \Delta\kappa_h^n, \quad \Delta\kappa_h^n = b^{(\gamma)}\left(\sigma_h^n, \kappa_h^n, e\left(u_{t,h}^n\right)\right)\Delta t, \\
& n = 0, 1, \ldots, N-1, \\
& u_h^0 = \mathbf{O}, \quad \sigma_h^0 = \mathbf{O}, \quad \kappa_h^0 = \mathbf{O}.
\end{aligned}$$

Aus den Aussagen des Theorems 3.2 in [18] folgt wiederum, daß unter den Voraussetzungen des Satzes 5.6 die Folgen $\left\{u_{t,h}^n\right\}$, $\{u_h^n\}$, $\{\sigma_h^n\}$ und $\{\kappa_h^n\}$ eindeutig bestimmt werden können (siehe auch [18], Punkt 4.2.4).

Aufgrund des sogenannten FEM–Isomorphismus (5.11) ist die Integralidentität zur Bestimmung von $u_{t,h}^n \in V_h$ äquivalent zur Lösung des folgenden nichtlinearen Gleichungssystems:

$$\underline{u}_{t,h}^n \in E_h : A_h^n\left(\underline{u}_{t,h}^n\right) = \underline{F}_h^n, \tag{5.13}$$

wobei $\underline{F}_h^n \in E_h$ und der nichtlineare Steifigkeitsoperator $A_h^n(\cdot) : E_h \to E_h$ durch die folgenden Beziehungen definiert werden:

$$\begin{aligned}
& (\underline{F}_h^n, \underline{v}_h) = < F_*(t_n), v_h > \quad \forall\, \underline{v}_h \leftrightarrow v_h \in V_h, \\
& A_h^n(\underline{v}_h) = A_{e,h}\, \underline{v}_h - A_{p,h}^{(\gamma)}\left(\sigma_h^n, \kappa_h^n, \underline{v}_h^n\right) \underline{v}_h \quad \forall\, \underline{v}_h \in E_h, \\
& (A_{e,h}, \underline{v}_h, \underline{w}_h) = \int_\Omega e^T(v_h)\, D\, e\,(w_h)\, dx, \\
& \left(A_{p,h}^{(\gamma)}\left(\sigma_h^n, \kappa_h^n, \underline{v}_h\right) \underline{v}_h, \underline{w}_h\right) = \int_\Omega \left[a^{(\gamma)}\left(\sigma_h^n, \kappa_h^n, e\,(v_h)\right)\right]^T D\, e\,(w_h)\, dx \\
& \forall\, \underline{v}_h, \underline{w}_h \in E_h, \quad \underline{v}_h, \underline{w}_h \leftrightarrow v_h, w_h \in V_h.
\end{aligned} \tag{5.14}$$

Hierbei bezeichnen $(\cdot,\cdot)$ das gewöhnliche euklidische Skalarprodukt in $E_h$, $A_{e,h}$ die zum entsprechenden linearen Elastizitätsproblem gehörende Steifigkeitsmatrix und $A_{p,h}^{(\gamma)} = A_{p,h}^{(\gamma)}(\sigma_h^n, \kappa_h^n, \underline{v}_h)$ die FE–Plastizitätsmatrix, die vom unbekannten Vektor $\underline{v}_h$ und den aus dem vorhergegangenen Zeitschritt bekannten $\sigma_h^n$ und $\kappa_h^n$ abhängt. Aus (5.9), (5.10) und (5.14) folgt sofort die Beziehung

$$(A_h^n(\underline{v}_h), \underline{w}_h) = \left\langle A^{(\gamma)}(\sigma_h^n, \kappa_h^n)\, v_h, w_h \right\rangle \qquad (5.15)$$
$$\forall\, \underline{v}_h, \underline{w}_h \in E_h, \quad \underline{v}_h, \underline{w}_h \leftrightarrow v_h, w_h \in V_h.$$

Im Punkt 5.4 geben wir einen kurzen Überblick über iterative Verfahren zur Auflösung des in jedem Inkrementschritt entstehenden nichtlinearen Gleichungssystems (5.13).

#### 5.3.2.2 Die Konvergenz der inkrementellen Finite–Elemente–Methode

**Satz 5.8:**
Es seien die Voraussetzungen der Sätze 5.5 und 5.7 erfüllt, und es gelte die Approximationsabschätzung (5.12). Dann konvergiert $\{u_h^n\}$, $\{\sigma_h^n\}$, $\{\kappa_h^n\}$ gegen die Lösung $u$, $\sigma$, $\kappa$ der Aufgabe $\left(A^{(\gamma)}\right)$, und es gelten die Konvergenzabschätzungen

$$|\dot u(x,t) - u_{t,h}^n(x)|_V \le c_{16}\Delta t + 2c_{17}(2\mu+\lambda)^{0.5} a_{1,2} h \operatorname*{ess\,sup}_{t\in[t_n,t_{n+1}]} \|\dot u(t)\|_{2,\Omega},$$

$$|\dot\sigma(x,t) - \sigma_{t,h}^n(x)|_S + |\dot\kappa(x,t) - \kappa_{t,h}^n(x)\|_H \le c_{18}\Delta t + 2c_{19}(2\mu+\lambda)^{0.5} a_{1,2} h \operatorname*{ess\,sup}_{t\in[t_n,t_{n+1}]} \|\dot u(t)\|_{2,\Omega}$$

$$\forall\, t \in [t_n, t_{n+1}), \quad \forall\, n = 0, 1, \ldots, N-1,$$

wobei $\mu$ und $\lambda$ die Laméschen Konstanten und $c_{16}$, $c_{17}$, $c_{18}$, $c_{19}$ von $h$, $\Delta t$ und $u$ unabhängige, positive Konstanten sind.

**Beweis:**
Siehe [18], Punkt 4.2.5, S. 194 – 200. ■

## 5.4 Überblick über einige iterative Verfahren zur Auflösung der auf jedem Inkrementschritt entstehenden nichtlinearen Gleichungssysteme

### 5.4.1 Zweischichtige Iterationsverfahren

Zur Lösung des nichtlinearen Gleichungssystems (5.13) können zweischichtige Iterationsverfahren verwendet werden. Als Startnäherung kann dabei die im vorhergegangenen Inkrementschritt gefundene Lösung $\underline{u}_{t,h}^{n-1}$ dienen. Wir setzen nun $\underline{v}_h = \underline{u}_{t,h}^n$ und lassen bei den übrigen Größen den Inkrementzähler

$n$ (oberer Index) weg. Dann können wir das zweischichtige Iterationsverfahren in der folgenden kanonischen Form schreiben

$$B_h \frac{\underline{v}_h^{k+1} - \underline{v}_h^k}{\tau} + A_h(\underline{v}_h^k) = \underline{F}_h^k, \quad k = 0, 1, \ldots, \tag{5.16}$$

wobei $\underline{v}^0$ die Anfangsnäherung (z.B. die im vorhergegangenen Inkrementschritt gefundene Lösung) und $\tau$ ein noch zu bestimmender Iterationsparameter ist.
Für $A_h(\cdot) \equiv A_h^n(\cdot)$ gilt nun die Beziehung

$$A_h(\underline{u}_h) - A_h(\underline{v}_h) = T_h[\underline{u}_h, \underline{v}_h](\underline{u}_h - \underline{v}_h) \quad \forall\, \underline{u}_h, \underline{v}_h \in E_h, \tag{5.17}$$

wobei der lineare Operator $T_h[\underline{u}_h, \underline{v}_h] : E_h \to E_h$ durch die Identität

$$\begin{aligned}(T_h[\underline{u}_h, \underline{v}_h]\, \underline{z}_h, \underline{w}_h) = \int_\Omega \int_0^1 &\{e\,(z_h) - \eta\,(y)\, \theta_-(q^T D\, e_\theta)\, q^T D\, e\,(z_h)\, \psi_\delta q + \\ &+ \frac{2}{\gamma}\, \eta'(y)\, e_\theta^T D\, e\,(z_h)\, \varphi\,(q^T D\, e_\theta)\, \psi_\delta q + \frac{2}{\gamma}\, c\, \eta'(y)\, e_\theta^T D\, e\,(z_h)\, e_\theta - \\ &- c\,(1 - \eta\,(y))\, e\,(z_h)\}^T D\, e\,(w_h)\, d\theta\, dx \\ \forall\, \underline{z}_h, \underline{w}_h \in E_h,\ \ \underline{z}_h, \underline{w}_h &\longleftrightarrow z_h, w_h \in V_h,\end{aligned} \tag{5.18}$$

für gegebene $\underline{u}_h, \underline{v}_h \leftrightarrow u_h, v_h \in V_h$ eindeutig definiert wird. Hierbei bezeichnen $y = e_\theta^T D\, e_\theta / \gamma$ und $e_\theta = e\,(v_h + \theta\,(u_h - v_h))$. Die Vektorfunktion $q = q\,(\sigma_h, \kappa_h)$ und die Funktion $\psi_\delta = \psi_\delta(\sigma_h, \kappa_h)$ sind für $\sigma_h = \sigma_h^n$ und $\kappa_h = \kappa_h^n$ ($n$ ist der Inkrementzähler) definiert (siehe auch [18], S. 114 – 115). Wir bezeichnen nun die Steifigkeitsmatrix des zugehörenden linearen Elastizitätsproblems mit $K_h$. Aus (5.14) und (5.18) folgt, daß

$$K_h \;=\; A_{e,h} \;=\; T_h\,[\mathbf{0}, \mathbf{0}] \tag{5.19}$$

und

$$(K_h \underline{u}_h, \underline{v}_h) = [u_h, v_h]_V \quad \forall\, \underline{u}_h, \underline{v}_h \longleftrightarrow u_h, v_h \in V_h. \tag{5.20}$$

Desweiteren gelten die Ungleichungen

$$\begin{aligned}&\mu_1(K_h\, \underline{z}_h, \underline{z}_h) \le (T_h[\underline{u}_h, \underline{v}_h]\, \underline{z}_h, \underline{z}_h) \le \mu_2(K_h\, \underline{z}_h, \underline{z}_h) \quad \forall\, \underline{z}_h \in E_h, \\ &|(T_h[\underline{u}_h, \underline{v}_h]\, \underline{z}_h, \underline{w}_h)| \le \mu_2(K_h\, \underline{z}_h, \underline{z}_h)^{0.5}(K_h\, \underline{w}_h, \underline{w}_h)^{0.5} \quad \forall\, \underline{z}_h, \underline{w}_h \in E_h,\end{aligned} \tag{5.21}$$

für beliebige, fixierte $\underline{u}_h, \underline{v}_h \in E_h$ mit den positiven Konstanten $\mu_1$ und $\mu_2$ aus Satz 5.3 (siehe auch [18], Ungleichung (5.3) und die auf (5.16) folgenden Ungleichung). Wir fordern nun, daß positive Konstanten $\bar{\gamma}_1$ und $\bar{\gamma}_2$ existieren, sodaß die Ungleichungen

$$\bar{\gamma}_1(B_h\, \underline{u}_h, \underline{u}_h) \le (K_h\, \underline{u}_h, \underline{u}_h) \le \bar{\gamma}_2(B_h\, \underline{u}_h, \underline{u}_h) \quad \forall\, \underline{u}_h \in E_h \tag{5.22}$$

gelten.
Unter Beachtung von Lemma 3.7 aus [18] und den oben angeführten Beziehungen (5.17) – (5.22) folgt, daß alle Voraussetzungen des Punktes 3.1 erfüllt sind und somit der Satz 3.1 gilt (siehe auch Theorem 5.1 aus [18]), d.h., das Iterationsverfahren (5.16) konvergiert für fixiertes $\tau \in (0, 2/\gamma_2)$ und für eine

beliebige Startnäherung $\underline{v}_h^0 \in E_h$ gegen die eindeutig existierende Lösung $\underline{v}_h = \underline{u}_{t,h}^n$ von (5.13). Für den Fehler $\underline{z}_h^k = \underline{v}_h^k - \underline{v}_h$ gilt die Abschätzung

$$\|\underline{v}_h^k - \underline{v}_h\|_{B_h} \leq \rho^k \|\underline{v}_h^0 - \underline{v}_h\|_{B_h}, \tag{5.23}$$

wobei $\|\underline{u}_h\|_{B_h}^2 = (B_h \underline{u}_h, \underline{u}_h) \quad \forall \underline{u}_h \in E_h$, $\rho = \rho(\tau) = (1 - \tau\gamma_1(2 - \tau\gamma_2))^{0.5}$, $\gamma_1 = \mu_1\bar{\gamma}_1$ und $\gamma_2 = \mu_2^2\bar{\gamma}_2/\mu_1$. Der kleinste Konvergenzfaktor $\rho_0 = \rho_0(\tau_0) = \sqrt{1-\xi}$ wird für $\tau = \tau_0 = 1/\gamma_2$ erreicht, wobei $\xi = \gamma_1/\gamma_2 = (\mu_1/\mu_2)^2\,(\bar{\gamma}_1/\bar{\gamma}_2)$.
Aus diesen Ergebnissen folgt qualitativ, daß jeder für das lineare Elastizitätsproblem geeignete Vorkonditionierungsoperator auch für die hier betrachteten nichtlinearen Probleme erfolgreich verwendet werden kann, ohne daß sich der asymptotische Aufwand an arithmetischen Operationen verschlechtert. In [18], S. 218 – 220 und S. 231 – 232, sind Möglichkeiten zur Wahl von $B_h$ angegeben. Eine praktisch einfach realisierbare Variante besteht darin, $B_h$ als modifizierte unvollständige Cholesky–Zerlegung von $K_h$ (oder auch von $A_{e,h} - \beta A_{p,h}^{(\gamma)}(\sigma_h^n, \kappa_h^n, u_{t,h}^{n-1})$ mit fixiertem $\beta \in (0,1]$) zu wählen (siehe [18], S. 232). In diesem Fall erhält man (dank der Tatsache, daß $\xi$ nur linear von $\bar{\xi} = \bar{\gamma}_1/\bar{\gamma}_2$ abhängt) entsprechend für die Anzahl an notwendigen Iterationen bzw. arithmetischen Operationen entsprechend die Beziehungen $I(\varepsilon) = O(h^{-1}\ln\varepsilon^{-1})$ und $Q(\varepsilon) = O(h^{-4}\ln\varepsilon^{-1})$ (für den hier betrachteten dreidimensionalen Fall). Vorkonditionierungsoperatoren $B_h$, die auf asymptotisch fast optimale Verfahren führen (d.h. $\bar{\xi} = O(1)$, $I(\varepsilon) = O(\ln\varepsilon^{-1})$ und $Q(\varepsilon) = O(h^{-3}\ln\varepsilon^{-1})$ bzw. $O(h^{-3}\ln h^{-1}\ln\varepsilon^{-1})$), lassen sich für die hier betrachteten nichtlinearen Aufgaben z.B. mit Multilevel–Techniken (siehe Vorlesung Numerik II [22] und die dort zitierte Literatur sowie Arbeiten aus dem Sonderband „Plasticity" der Zeitschrift *„Numerical Linear Algebra with Applications"*, v.4, Nr. 3, 1997) konstruieren.
In der Praxis wird oft $B_h = K_h$ gesetzt, sodaß $\bar{\gamma}_1 = \bar{\gamma}_2 = 1$ und folglich $\xi = \gamma_1/\gamma_2 = (\mu_1/\mu_2)^2$ gilt. Damit ist $I(\varepsilon) = O(\ln\varepsilon^{-1})$ von $h$ unabhängig. Die elastische Steifigkeitsmatrix $K_h$ wird im Preprocessing faktorisiert, und auf jedem Iterationsschritt wird nur noch ein Vorwärts– und Rückwärtseinsetzen durchgeführt. Die Faktorisierung benötigt im 3D–Falle $O(h^{-7})$ arithmetische Operationen; das Vorwärts– und Rückwärtseinsetzen immerhin noch $O(h^{-5})$ arithmetische Operationen. Damit bleiben diese Verfahren weit hinter dem Optimum zurück; sie sind allerdings allgemein anwendbar. Eine andere, wesentlich effektivere Variante besteht darin, die Gleichungssysteme

$$K_h\,\underline{w}_h^k = \underline{r}_h^k \quad (\text{mit } \underline{r}_h^k = \underline{F}_h - A_h(\underline{v}_h^k) \text{ und } \underline{w}_h^k = (\underline{v}_h^{k+1} - \underline{v}_h^k)/\tau) \tag{5.24}$$

nur näherungsweise iterativ zu lösen. Dies führt auf die sogenannten zweistufigen Iterationsverfahren (Inner-Outer–Iterations).

### 5.4.2 Zweistufige Iterationsverfahren

Wir wählen wiederum $B_h = K_h$ (folglich ist $\bar{\gamma}_1 = \bar{\gamma}_2 = 1$) und lösen das auf jedem Iterationsschritt des Iterationsverfahrens (5.16) entstehende Gleichungssystem (5.24) erneut mit einem Iterationsverfahren (genannt inneres Iterationsverfahren) nur näherungsweise, sodaß wir anstelle von $\underline{w}_h^k$ eine fehlerbehaftete Korrektur $\underline{w}_h^{k,\tilde{\varepsilon}}$ erhalten:

$$\left\|\underline{w}_h^k - \underline{w}_h^{k,\tilde{\varepsilon}}\right\|_{K_h} \leq \tilde{\varepsilon}\,\|\underline{w}_h^k\|_{K_h} \tag{5.25}$$

mit einem gewissen positiven $\tilde{\varepsilon}$, wobei als Startnäherung des inneren Iterationsprozesses $\underline{w}_h^{k,0} = \mathbf{O}$ verwendet wird.
Als innerer Iterationsprozeß können z.B. folgende Verfahren verwendet werden:

a) zweischichtige Iterationsverfahren mit Vorkonditionierung (z.B. Verfahren der einfachen Iteration, Tschebyschev–Verfahren, Gradientenverfahren; siehe Vorlesung Numerik II [22] bzw. Standardliteratur, z.B. [2], [28]):

$$\bar{B}_h \frac{\underline{w}_h^{k,l+1} - \underline{w}_h^{k,l}}{\tau_{l+1}} + K_h \underline{w}_h^{k,l} = \underline{r}_h^k,$$
$$l = 0, 1, \ldots, \tilde{m} - 1; \quad \underline{w}_h^{k,0} = \mathbf{O}; \quad \underline{w}_h^{k,\tilde{\varepsilon}} = \underline{w}_h^{k,\tilde{m}};$$

b) dreischichtige Iterationsverfahren mit Vorkonditionierung (z.B. das konjugierte Gradientenverfahren; siehe Vorlesung Numerik II [22] bzw. Standardliteratur, z.B. [2], [28]):

$$\bar{B}_h \underline{w}_h^{k,l+1} = \alpha_{l+1} \left(\bar{B}_h - \tau_{l+1} K_h\right) \underline{w}_h^{k,l} + (1 - \alpha_{l+1})\, \bar{B}_h \underline{w}_h^{k,l-1} + \alpha_{l+1} \tau_{l+1} \underline{r}_h^k,$$
$$l = 0, 1, \ldots, \tilde{m} - 1; \quad \underline{w}_h^{k,0} = \mathbf{O}; \quad \alpha_1 = 1; \quad \underline{w}_h^{k,\tilde{\varepsilon}} = \underline{w}_h^{k,\tilde{m}};$$

c) Multigrid–Verfahren (siehe Vorlesung Multigrid–Methoden [20] bzw. Standardliteratur, z.B. [15], [4]).

Es gelten offenbar die Aussagen von Satz 3.2 aus Punkt 3.1.5. Demnach läßt sich im hier betrachteten Fall für den gestörten Konvergenzfaktor die Beziehung

$$\tilde{\rho}\,(\tilde{\varepsilon}) = \rho + \tau\, \mu_2\, \tilde{\varepsilon}$$

aufschreiben. Für fixiertes $\tau \in (0, 2/\gamma_2)$ und für fixiertes $\tilde{\varepsilon} < (1-\rho)/(\tau\,\mu_2)$ ist $\tilde{\rho}\,(\tilde{\varepsilon}) < 1$ unabhängig von $h$. Entsprechend läßt sich der gestörte Konvergenzfaktor für $\tau_0 = 1/\gamma_2$ aufschreiben (siehe Satz 3.2) bzw. bei fixiertem $\tilde{\varepsilon}$ optimieren (siehe Bemerkung 3.2). In [18] wurde die Anzahl $\tilde{m}$ der inneren Iterationen so optimiert, daß die Gesamtanzahl an arithmetischen Operationen bei gegebenen $\bar{B}$ minimal wird (siehe [18], S. 227 – 229).
In hinreichend allgemeinen Fällen können zur Lösung des diskreten linearen Elastizitätsproblems (5.24) Multigrid–Verfahren verwendet werden, sodaß zum Erreichen der Abschätzung (5.25) nicht mehr als $O\,(h^{-3}(\ln \tilde{\varepsilon}^{-1}))$ arithmetische Operationen benötigt werden (siehe Vorlesung Multigrid–Methoden [20] bzw. Standardliteratur, z.B. [15], [4]). Somit benötigt das zweistufige Verfahren zur Lösung von (5.13) nicht mehr als $Q\,(\varepsilon) = O\,(h^{-3} \ln \varepsilon^{-1})$, wobei $\varepsilon$ die gewünschte relative Genauigkeit ist. Damit kann das Gesamtproblem $\left(A_{\Delta,h}^{(\gamma)}\right)$ mit $Q\,(\varepsilon) = O\,(h^{-3} \ln \varepsilon^{-1} (\Delta t)^{-1})$ arithmetischen Operationen aufgelöst werden.

### 5.4.3 Ein inkrementelles "nested" Iterationsschema

Wir konstruieren nun zur Lösung der Aufgabe $\left(A^{(\gamma)}\right)$ ein inkrementelles "nested" Iterationsschema auf einer Folge von Gittern und zeigen, daß unter Verwendung von Multigrid–Prozeduren eine

diskrete Lösung mit einem Fehler in der Größenordnung des Diskretisierungsfehlers $O(h + \Delta t)$ mit $O(h^{-m}(\Delta t)^{-1})$ arithmetischen Operationen gefunden werden kann.
Dazu betrachten wir eine Hierarchie von regulären Triangulationen des Gebietes $\Omega$ ($\Omega \subset I\!R^m$ mit $m = 2, 3$), die wir mit einer Folge $\{h_q\}_{q=\overline{1,l}}$ ($h_1 > h_2 > \ldots > h_l$) von Diskretisierungsparametern verbinden wollen. Wir setzen im weiteren den Standardfall $h_q = h_{q-1}/2$ ($q = \overline{2,l}$) voraus. Wie im Abs. 5.3.2.1 der vorliegenden Arbeit bzw. in den Punkten 4.2.1 – 4.2.3 von [18] erzeugen wir auf der Basis dieser Triangulationen mit linearen Dreieckselementen eine Folge $\{V_{h_q}\}_{q=\overline{1,l}}$ von FE–Approximationen des Raumes $V$, sodaß $V_{h_q} \subset V$ für alle $q = \overline{1,l}$ gilt. Desweiteren setzen wir voraus, daß die üblichen Approximations– und Stabilitätsbedingungen erfüllt sind (siehe z.B. [18], S. 179 – 190). Für den zweidimensionalen Fall ($m = 2$) werden entsprechende Konstruktionen in [18], S. 233 – 242, durchgeführt. Für diese Konstruktionen der Räume $\{V_{h_q}\}_{q=\overline{1,l}}$ gilt im Falle beliebiger Gebiete i. allg. nicht die sogenannte Einbettungsbedingung $V_{h_{q-1}} \subset V_{h_q}$ ($q = \overline{2,l}$). Wir werden im folgenden die Einbettungsbedingung nicht explizit voraussetzen. Im weiteren schreiben wir der Einfachheit halber anstelle des Indexes „$h_q$“ einfach „$q$“, z.B. $V_q = V_{h_q}$ etc. Der Index $q$ zeigt also stets den Triangulationslevel an, zu dem die indizierte Größe gehört. Eine Verwechslung mit dem Gradienten $q = \partial f / \partial \sigma$ auf der Fließfläche ist ausgeschlossen.
In dem im folgenden betrachteten inkrementellen "nested" Iterationsschema $\left(A^{(\gamma)}_{\Delta,\overline{1,l}}\right)$ approximieren $v^n_{t,q}$, $\tau^n_q$, $\chi^n_q$ etc. entsprechend die exakten Lösungen $u^n_{t,q}$, $\sigma^n_q$, $\tau^n_q$ etc. des für die entsprechende Triangulation „$h_q$“ aufgeschriebenen inkrementellen FEM–Schemas $\left(A^{(\gamma)}_{\Delta,h_q}\right)$. Bevor wir das inkrementelle "nested" Iterationsschema aufschreiben, führen wir noch einige Bezeichnungen ein:

1. $S^0_q \equiv S : V_q \to V_q$ – sei ein iterativer (z.B. MG–) Solver des linearen Elastizitätsproblems:

$$(5.26) \qquad \begin{array}{l} u^0_{t,q} \in V_q : \int\limits_\Omega e^T(u^0_{t,q})\, D\, e(v_q)\, dx = < F_*(t_0), v_q > \qquad \forall\, v_q \in V_q \\ \updownarrow \\ \underline{u}^0_{t,q} \in E_q : K_q\, \underline{u}^0_{t,q} = \underline{F}^0_q, \end{array}$$

   sodaß für beliebige $\tilde{v}^0_{t,q} \in V_q$ die Abschätzung

$$(5.27) \qquad |u^0_{t,q} - v^0_{t,q}|_V \leq \rho_e\, |u^0_{t,q} - \tilde{v}^0_{t,q}|_V$$

   mit $v^0_{t,q} = S^0_q(\tilde{v}^0_{t,q})$ und $\rho_e = \text{const.}$ ($0 < \rho_e < 1$) gilt, d.h., $S^0_q$ hat den Konvergenzfaktor $\rho_e$. $S^0_q$ ist i. allg. ein nichtlinearer (z.B. affine–linearer) Operator. In (5.26) bezeichnet $K_q \equiv A^0_q$ die elastische Steifigkeitsmatrix. Für $q = 1$ sei $S^0_q \equiv S^0_1$ ein beliebiger direkter oder iterativer Solver des linearen FE–Elastizitätsproblems (5.26) auf dem gröbsten Gitter.

2. $S^n_q \equiv S^n_q\,[\tau^n_q, \chi^n_q] : V_q \to V_q$ – sei ein iterativer (z.B. NMG–) Solver des nichtlinearen, zeitdiskretisierten FE–Plastizitätsproblems bei gegebenen $\tau^n_q \in S$ und $\chi^n_q \in H$ ($n = \overline{1, N-1}$):

$$(5.28) \qquad \begin{array}{l} w^n_{t,q} \in V_q : \int\limits_\Omega [e(w^n_{t,q}) - a^{(\gamma)}(\tau^n_q, \chi^n_q, e(w^n_{t,q}))]^T D e(v_q)\, dx = < F_*(t_n), v_q > \quad \forall\, v_q \in V_q, \\ \updownarrow \\ \underline{w}^n_{t,q} \in E_q : A^n_q\,(\underline{w}^n_{t,q}) = \underline{F}^n_q, \end{array}$$

wobei $A_q^n(\cdot) = A_{e,q} \cdot - A_{p,q}^{(\gamma)}(\tau_q^n, \chi_q^n, \cdot) \cdot$ der diskrete elastisch–plastische Operator, $A_{e,q} \equiv K_q \equiv A_q^0$ die elastische und $A_{p,q}^{(\gamma)}(\tau_q^n, \chi_q^n, \cdot)$ die plastischen Steifigkeitsmatrizen sind. Der Iterationsprozeß habe unabhängig von $\tau_q^n$ und $\chi_q^n$ die Kontraktionskonstante $\rho_p$, d.h.

$$\left| w_{t,q}^n - v_{t,q}^n \right|_V \leq \rho_p \left| w_{t,q} - \tilde{v}_{t,q}^n \right|_V \tag{5.29}$$

für beliebige $\tilde{v}_{t,q}^n \in V_q$ mit $v_{t,q}^n = S_q^n[\tau_q^n, \chi_q^n]\left(\tilde{v}_{t,q}^n\right)$, wobei $\rho_p = \text{const.}$ mit $0 < \rho_p < 1$. Für $q = 1$ sei $S_q^n \equiv S_1^n$ ein beliebiger iterativer Solver des für $n \geq 1$ i. allg. nichtlinearen Grobgitterproblems mit der Konvergenzrate $\rho_1$ $(0 < \rho_1 < 1)$:

$$\left| w_{t,1}^n - v_{t,1}^n \right|_V \leq \rho_1 \left| w_{t,1} - \tilde{v}_{t,1}^n \right|_V \tag{5.30}$$

für beliebige $\tilde{v}_{t,1}^n \in V_1$ mit $v_{t,1}^n = S_1^n[\tau_1^n, \chi_1^n]\left(\tilde{v}_{t,1}^n\right)$.

3. $I_{q-1}^q : V_{q-1} \to V_q$ – sei der (lineare) FEM–Interpolationsoperator (siehe z.B. Vorlesung Multigrid–Methoden [20] bzw.[18]). Dann existiert eine universelle (d.h. im folgenden stets ein von $l\,(h_l)$, $N\,(\Delta t)$, $q$ und $n$ unabhängige), positive Konstante $b_1 = \text{const.} > 0$, sodaß für alle $q = \overline{2,l}$ die Ungleichung

$$\left| I_{q-1}^q \right|_{[V_{q-1} \to V_q]} = \sup_{\substack{v_{q-1} \in V_{q-1} \\ v_{q-1} \neq \mathbf{O}}} \frac{\left| I_{q-1}^q v_{q-1} \right|_V}{|v_{q-1}|_V} \leq b_1 \tag{5.31}$$

gilt [20]. Falls die Einbettungsbedingung $V_{q-1} \subset V_q$ gilt, fällt $I_{q-1}^q$ mit dem trivialen Einbettungsoperator $I$ zusammen, und $b_1 = 1$.

4. Wir bemerken, daß zwar $a^{(\gamma)}(\mathbf{O}, \mathbf{O}, e) \equiv \mathbf{O}$ für alle $e \in I\!R_\sigma$, aber i. allg. $a^{(\gamma)}(\mathbf{O}, \kappa, e) \neq \mathbf{O}$ und ebenfalls $a^{(\gamma)}(\sigma, \mathbf{O}, e) \neq \mathbf{O}$.

Mit diesen Bezeichnungen und Vereinbarungen können wir nun das inkrementelle "nested" Iterationsschema $\left(A_{\Delta,\overline{1,l}}^{(\gamma)}\right)$ unter Benutzung einer PSEUDO–Transkription (siehe auch [18]) wie folgt aufschreiben:

| $\left(A_{\Delta,\overline{1,l}}^{(\gamma)}\right)$ | Das inkrementelle "nested" Iterationsschema |
|---|---|
| $n = 0$ $\quad$ ($t_0 = 0$: Anfangszeitschritt) | |
| $v_1^0 := \mathbf{O}$; $\tau_1^0 := \mathbf{O}$; $\chi_1^0 := \mathbf{O}$; $\quad$ Anfangsbedingungen auf dem 1. Level);<br>$v_{t,1}^0 :=$ direkte oder iterative Lösung (mit $S_1^0$) des linearen Elastizitätsproblems (5.26) auf dem 1. Level $(q = 1)$;<br>$\left[\Delta v_1^0 := v_{t,1}^0 \Delta t;\ v_1^1 := v_1^0 + \Delta v_1^0 \equiv \Delta v_1^0;\right]^{*)}$<br>$\tau_{t,1}^0 := D\,e\,(v_{t,1}^0)$; $\Delta\tau_1^0 := \tau_{t,1}^0 \Delta t$; $\tau_1^1 := \tau_1^0 + \Delta\tau_1^0 \equiv \Delta\tau_1^0$;<br>$\chi_{t,1}^0 := \mathbf{O}$; $\qquad \Delta\chi_1^0 := \mathbf{O}$; $\qquad \chi_1^1 := \mathbf{O}$;<br><u>for</u> $q := 2$ <u>step</u> 1 <u>until</u> $l$ <u>do</u><br><u>begin</u> | |

$v_q^0 := \mathbf{O};\ \tau_q^0 := \mathbf{O};\ \chi_q^0 := \mathbf{O};$ (Anfangsbedingungen auf dem $q$-ten Level);

$\tilde{v}_{t,q}^0 := I_{q-1}^q\, v_{t,q-1}^0;$ (Interpolation der $(q-1)$–Level–Lösung);

$\underline{\text{for}}\ j := 1\ \underline{\text{step}}\ 1\ \underline{\text{until}}\ j_*\ \underline{\text{do}}\ \tilde{v}_{t,q}^0 := S_q^0\left(\tilde{v}_{t,q}^0\right);$

$v_{t,q}^0 := \tilde{v}_{t,q}^0;$

$\left[\Delta v_q^0 := v_{t,q}^0 \Delta t;\ \ v_q^1 := v_q^0 + \Delta v_q^0 \equiv \Delta v_q^0;\right]^{*)}$

$\tau_{t,q}^0 := D\, e\,(v_{t,q}^0);\ \ \Delta\tau_q^0 := \tau_{t,q}^0 \Delta t;\ \ \tau_q^1 := \tau_q^0 + \Delta\tau_q^0 \equiv \Delta\tau_q^0;$

$\chi_{t,q}^0 := \mathbf{O};\qquad \Delta\chi_q^0 := \mathbf{O};\qquad \chi_q^1 := \mathbf{O}$

$\underline{\text{end}}$

---

$n = 1, 2, \ldots, N-1$

---

$\underline{\text{for}}\ n := 1\ \underline{\text{step}}\ 1\ \underline{\text{until}}\ N-1\ \underline{\text{do}}$

$\underline{\text{begin}}$

$\tilde{v}_{t,1}^n := v_{t,1}^{n-1},$

$\underline{\text{for}}\ i := 1\ \underline{\text{step}}\ 1\ \underline{\text{until}}\ i_1\ \underline{\text{do}}\ \tilde{v}_{t,1}^n := S_1^n\,[\tau_1^n, \chi_1^n]\left(\tilde{v}_{t,1}^n\right);$

$v_{t,1}^n := \tilde{v}_{t,1}^n;$

$\left[\Delta v_1^n := v_{t,1}^n \Delta t;\ v_1^{n+1} := v_1^n + \Delta v_1^n\right]^{*)}$

$\tau_{t,1}^n := D\, e\,(v_{t,1}^n) - D\, a^{(\gamma)}(\tau_1^n, \chi_1^n, e\,(v_{t,1}^n));\ \ \Delta\tau_1^n := \tau_{t,1}^n \Delta t;\ \ \tau_1^{n+1} := \tau_1^n + \Delta\tau_1^n;$

$\chi_{t,1}^n := b^{(\gamma)}(\tau_1^n, \chi_1^n, e\,(v_{t,1}^n));\ \ \Delta\chi_1^n := \chi_{t,1}^n \Delta t;\ \ \chi_1^{n+1} := \chi_1^n + \Delta\chi_1^n;$

$\underline{\text{for}}\ q := 2\ \underline{\text{step}}\ 1\ \underline{\text{until}}\ l\ \underline{\text{do}}$

$\underline{\text{begin}}$

$\left[\underline{r}_{q-1}^n := A_{q-1}^n\left(\underline{v}_{t,q-1}^n\right),\ \underline{v}_{t,q-1}^n \leftrightarrow v_{t,q-1}^n \in V_{q-1}\right]^{**)}$

$\tilde{v}_{t,q}^n := v_{t,q}^{n-1} + I_{q-1}^q\left(v_{t,q-1}^n - v_{t,q-1}^{n-1}\right);$ (Extrapolation);

$\underline{\text{for}}\ k := 1\ \underline{\text{step}}\ 1\ \underline{\text{until}}\ k_*\ \underline{\text{do}}\ \tilde{v}_{t,q}^n := S_q^n\left[\tau_q^n, \chi_q^n\right]\left(\tilde{v}_{t,q}^n\right);$

$v_{t,q}^n := \tilde{v}_{t,q}^n;$

$\left[\Delta v_q^n := v_{t,q}^n \Delta t;\ v_q^{n+1} := v_q^n + \Delta v_q^n\right]^{*)}$

$\tau_{t,q}^n := D\, e\,(v_{t,q}^n) - D\, a^{(\gamma)}(\tau_q^n, \chi_q^n, e\,(v_{t,q}^n));\ \Delta\tau_q^n := \tau_{q,t}^n \Delta t;\ \tau_q^{n+1} := \tau_q^n + \Delta\tau_q^n;$

$\chi_{t,q}^n := b^{(\gamma)}(\tau_q^n, \chi_q^n, e\,(v_{t,q}^n));\ \Delta\chi_q^n := \chi_{t,q}^n \Delta t;\ \chi_q^{n+1} := \chi_q^n + \Delta\chi_q^n$

$\underline{\text{end}}$

$\underline{\text{end}}$

Bemerkungen zum Algorithmus:

$*$) Das Mitrechnen der Verschiebungen wird vom Algorithmus nicht explizit gefordert und nur dann durchgeführt, wenn die Verschiebungen bzw. die Deformationen von praktischem Interesse sind.

$**$) Der Vektor $\underline{r}_{q-1}^n$ wird nur dann berechnet, wenn als $S_q^n\left[\tau_q^n, \chi_q^n\right]$ $(n = \overline{1, N-1};\, q = \overline{2, l})$ die nichtlineare Multigrid–Prozedur von W. Hackbusch (siehe [16], S. 210 – 218) verwendet wird.

**Satz 5.9:**

Es seien die Voraussetzungen der Sätze 5.5 und 5.7 erfüllt, und es gelte die Approximationsabschätzung (5.12). Desweiteren seien die Konvergenzraten $\rho_e$ und $\rho_p$ der Iterationsprozesse mit den Iterationsoperatoren $S_q^0$ und $S_q^n$ $(n = \overline{1, N-1})$ unabhängig von $l\,(h_l)$, $N\,(\Delta t)$, $q$ und $n$ kleiner als 1 und $\rho_1 \in (0,1)$ fixiert. Außerdem gelte für alle $q = \overline{2, l}$ die Ungleichung

$$h_{q-1} \;\leq\; b_2\, h_q \tag{5.32}$$

mit einer universellen, positiven Konstante $b_2$ (für den hier betrachteten Standardfall $h_{q-1} = 2\,h_q$ ist $b_2 = 2$). Dann existieren universelle (d.h. von $l\,(h_l)$, $N\,(\Delta t)$, $q$ und $n$ unabhängige), positive Iterationszahlen $j_*$, $k_*$ und $i_1$, sodaß für alle $q = \overline{1, l}$ und $n = \overline{0, N-1}$ die Abschätzungen

$$\begin{aligned} &\left|u_{t,q}^n - v_{t,q}^n\right|_V \leq \alpha\,(\Delta t + h_q), \\ &\left|\sigma_{t,q}^n - \tau_{t,q}^n\right|_S + \left|\kappa_{t,q}^n - \chi_{t,q}^n\right|_H \leq \alpha\,(\Delta t + h_q) \end{aligned} \tag{5.33}$$

mit einer universellen, positiven Konstante $\alpha$ ($\alpha$ hängt von der exakten Lösung $u$ der Aufgabe $\left(A^{(\gamma)}\right)$ ab !) gelten, wobei $\left\{u_{t,q}^n\right\}_{n=\overline{0,N-1}}$, $\left\{\sigma_{t,q}^n\right\}_{n=\overline{0,N-1}}$, $\left\{\kappa_{t,q}^n\right\}_{n=\overline{0,N-1}}$ die exakten Lösungen des Schemas $\left(A_{\Delta,h_q}^{(\gamma)}\right)$ $(q = \overline{1,l})$ und $\left\{v_{t,q}^n\right\}$, $\left\{\tau_{t,q}^n\right\}$, $\left\{\chi_{t,q}^n\right\}$ die durch das inkrementelle "nested" Iterationsschema $\left(A_{\Delta,\overline{1,l}}^{(\gamma)}\right)$ produzierten Lösungen sind.

**Beweis:**

Da $u_{t,q}^n \in V_{h_q} = V_q$ die exakte Lösung des inkrementellen FEM–Schemas $\left(A_{\Delta,h_q}^{(\gamma)}\right)$ ist, gilt

$$\left\langle A^{(\gamma)}\left(\sigma_q^n, \kappa_q^n\right) u_{t,q}^n, v_q\right\rangle \;=\; \langle F_*(t_n), v_q\rangle \quad \forall\, v_q \in V_q \tag{5.34}$$

und $u_{t,q}^n$ ist Fixpunkt des Iterationsoperators $S_q^n\left[\sigma_q^n, \kappa_q^n\right]$, d.h.

$$u_{t,q}^n = S_q^n\left[\sigma_q^n, \kappa_q^n\right]\left(u_{t,q}^n\right). \tag{5.35}$$

Es sei nun $w_{t,q}^n \in V_q$ die Lösung der Gleichung

$$\left\langle A^{(\gamma)}\left(\tau_q^n, \chi_q^n\right) w_{t,q}^n, v_q\right\rangle \;=\; \langle F_*(t_n), v_q\rangle \quad \forall\, v_q \in V_q \tag{5.36}$$

und folglich Fixpunkt von $S_q^n\left[\tau_q^n, \chi_q^n\right]$, d.h.

$$w_{t,q}^n = S_q^n\left[\tau_q^n, \chi_q^n\right]\left(w_{t,q}^n\right). \tag{5.37}$$

Es kann nun vorausgesetzt werden, daß die Abschätzungen (5.33) für $n = 0$ und $q = 1$ gelten. Wir bemerken, daß im Falle der direkten Lösung des linearen Elastizitätsproblems (5.26) auf dem gröbsten Gitter im Anfangszeitschritt die linken Seiten der Ungleichungen (5.33) identisch Null werden.
Wir führen nun den Beweis induktiv in den folgenden drei Etappen:

1. Induktion bezüglich $q$ zum Anfangszeitschritt $(n = 0)$;
2. Induktion bezüglich $n$ auf dem gröbsten Gitter $(q = 1)$;
3. Diagonalinduktion, d.h. Beweis der Abschätzungen (5.33) für das Indexpaar $(q, n)$ bei vorausgesetzter Richtigkeit der Abschätzungen (5.33) für die Indexpaare $(q-1, n)$, $(q-1, n-1)$ und $(q, n-1)$.

Zu 1.) Diese Induktion entspricht der Standardinduktion für die Full–Multigrid–Methode (FMGM) zur Lösung linearer, elliptischer Aufgaben (siehe Vorlesung Multigrid–Methoden [20] bzw. Standardliteratur, z.B. [15]).

Zu 2.) Sei also $q = 1$ und $n \geq 1$. Wir setzen voraus, daß die Abschätzungen (5.33) für $n-1$ gelten und wollen sie für $n$ zeigen. Wegen (5.30) gelten zunächst die Abschätzungen

$$\begin{aligned} \left|v_{t,1}^n - u_{t,1}^n\right|_V &\leq \left|v_{t,1}^n - w_{t,1}^n\right|_V + \left|w_{t,1}^n - u_{t,1}^n\right|_V \leq \\ &\leq \rho_1^{i_1}\left|\tilde{v}_{t,1}^n - w_{t,1}^n\right|_V + \left|w_{t,1}^n - u_{t,1}^n\right|_V \leq \\ &\leq \rho_1^{i_1}\left(\left|\tilde{v}_{t,1}^n - u_{t,1}^n\right|_V + \left|u_{t,1}^n - w_{t,1}^n\right|_V\right) + \left|w_{t,1}^n - u_{t,1}^n\right|_V \leq \\ &\leq \rho_1^{i_1}\left|\tilde{v}_{t,1}^n - u_{t,1}^n\right|_V + \left(1 + \rho_1^{i_1}\right)\left|w_{t,1}^n - u_{t,1}^n\right|_V, \end{aligned} \tag{5.38}$$

wobei hier

$$\tilde{v}_{t,1}^n = v_{t,1}^{n-1} \tag{5.39}$$

die Anfangsnäherung für den Iterationsprozeß $S_1^n\left[\tau_1^n, \chi_1^n\right]$ und $v_{t,1}^n$ das Resultat nach $i_1$ Iterationen ist. Für den ersten Term $\left|\tilde{v}_{t,1}^n - u_{t,1}^n\right|_V$ erhalten wir wegen (5.39) und unter Berücksichtigung der Induktionsvoraussetzung (für $n-1$) und des Satzes 5.8, sowie der Folgerung 5.1 die Abschätzung

$$\begin{aligned} \left|\tilde{v}_{t,1}^n - u_{t,1}^n\right|_V &= \left|v_{t,1}^{n-1} - u_{t,1}^n\right|_V \leq \left|v_{t,1}^{n-1} - u_{t,1}^{n-1}\right|_V + \\ &+ \left|u_{t,1}^{n-1} - \dot{u}\left(t_{n-1}\right)\right|_V + \left|\dot{u}\left(t_{n-1}\right) - \dot{u}\left(t_n\right)\right|_V + \left|\dot{u}\left(t_n\right) - u_{t,1}^n\right|_V \leq b_3\left(\Delta t + h_1\right), \end{aligned} \tag{5.40}$$

wobei $u(t)$ die exakte Lösung von $\left(A^{(\gamma)}\right)$ und $b_3 = \text{const.} > 0$ eine universelle, positive Konstante ist. Wir schätzen nun den zweiten Term $\left|w_{t,1}^n - u_{t,1}^n\right|_V$ von (5.38) ab. Aus (5.34) und (5.36) erhalten wir durch Differenzbildung die Beziehung

$$\left\langle A^{(\gamma)}\left(\tau_1^n, \chi_1^n\right) w_{t,1}^n - A^{(\gamma)}\left(\sigma_1^n, \kappa_1^n\right) u_{t,1}^n, v_1\right\rangle = 0 \quad \forall\, v_1 \in V_1. \tag{5.41}$$

Hieraus folgt die Identität

$$\begin{aligned}(5.42)\qquad &\left\langle A^{(\gamma)}\left(\tau_1^n,\chi_1^n\right)w_{t,1}^n - A^{(\gamma)}\left(\tau_1^n,\chi_1^n\right)u_{t,1}^n, v_1\right\rangle = \\ &= \left\langle A^{(\gamma)}\left(\sigma_1^n,\kappa_1^n\right)u_{t,1}^n - A^{(\gamma)}\left(\tau_1^n,\chi_1^n\right)u_{t,1}^n, v_1\right\rangle \quad \forall\, v_1\in V_1.\end{aligned}$$

Unter Berücksichtigung von Lemma 3.2 und Lemma 3.7 aus [18] (vgl. auch Ungleichung (3.62) in [18]) erhalten wir für $v_1 = w_{t,1}^n - u_{t,1}^n$ aus (5.42) die Abschätzung

$$(5.43)\qquad \left|w_{t,1}^n - u_{t,1}^n\right|_V \le \frac{k_1}{\mu_1}\sqrt{\gamma}\left(|\sigma_1^n-\tau_1^n|_S + |\kappa_1^n-\chi_1^n|_H\right).$$

Analog wie in [18], S. 146 – 147, folgt aus den Beziehungen

$$\begin{aligned}(5.44)\qquad \sigma_{t,1}^n &= D\,e\left(u_{t,1}^n\right) - D\,a^{\gamma}\left(\sigma_1^n,\kappa_1^n,e\left(u_{t,1}^n\right)\right),\\ \kappa_{t,1}^n &= b^{(\gamma)}\left(\sigma_1^n,\kappa_1^n,e\left(u_{t,1}^n\right)\right),\\ \tau_{t,1}^n &= D\,e\left(v_{t,1}^n\right) - D\,a^{(\gamma)}\left(\tau_1^n,\chi_1^n,e\left(v_{t,1}^n\right)\right),\\ \chi_{t,1}^n &= b^{(\gamma)}\left(\tau_1^n,\chi_1^n,e\left(v_{t,1}^n\right)\right)\end{aligned}$$

die Abschätzung

$$\begin{aligned}(5.45)\qquad \left|\sigma_{t,1}^n-\tau_{t,1}^n\right|_S + \left|\kappa_{t,1}^n-\chi_{t,1}^n\right|_H &\le (\mu_2+k_2)\left|u_{t,1}^n-v_{t,1}^n\right|_V + \\ &+ (k_1+k_3)\sqrt{\gamma}\left(|\sigma_1^n-\tau_1^n|_S + |\kappa_1^n-\chi_1^n|_H\right).\end{aligned}$$

Aus (5.38), (5.40) und (5.45) erhalten wir die Ungleichung

$$\begin{aligned}(5.46)\qquad &\left|\sigma_{t,1}^n-\tau_{t,1}^n\right|_S + \left|\kappa_{t,1}^n-\chi_{t,1}^n\right|_H \le (\mu_2+k_2)\,\rho_1^{i_1}\,b_3\,(\Delta t + h_1) + \\ &+ (\mu_2+k_2)\left(1+\rho_1^{i_1}\right)\left|w_{t,1}^n-u_{t,1}^n\right|_V + (k_1+k_3)\sqrt{\gamma}\left(|\sigma_1^n-\tau_1^n|_S + |\kappa_1^n-\chi_1^n|_H\right).\end{aligned}$$

Aus (5.43) und (5.46) folgt die Abschätzung

$$\begin{aligned}(5.47)\qquad \left|\sigma_{t,1}^n-\tau_{t,1}^n\right|_S + \left|\kappa_{t,1}^n-\chi_{t,1}^n\right|_H &\le (\mu_2+k_2)\,\rho_1^{i_1}\,b_3\,(\Delta t + h_1) + \\ &+ b_4\sqrt{\gamma}\left(|\sigma_1^n-\tau_1^n|_S + |\kappa_1^n-\chi_1^n|_H\right)\end{aligned}$$

mit $b_4 = (\mu_2+k_2)\,(1+\rho_1^{i_1})\,k_1\,\mu_1^{-1} + (k_1+k_3)$. Es seien nun $\hat{\sigma}_1$, $\hat{\tau}_1$, $\hat{\kappa}_1$ etc. die stückweise lineare Fortsetzung von $\{\sigma_1^n\}_{n=\overline{0,N}}$, $\{\tau_1^n\}_{n=\overline{0,N}}$, $\{\kappa_1^n\}_{n=\overline{0,N}}$ etc. bezüglich $t$, z.B.

$$\hat{\sigma}_1 = \hat{\sigma}_1(t) = \sigma_1^n + \sigma_{t,1}^n\,(t-t_n),\quad t\in[t_n,t_{n+1}),\quad n=\overline{0,N-1}.$$

Folglich gilt $\dot{\hat{\sigma}}_1(t) = \sigma_{t,1}^n$ für $t\in[t_n,t_{n+1})$. Aus (5.47) erhalten wir für $t\in[t_n,t_{n+1})$ mit

$$f\,(t) \equiv \left|\dot{\hat{\sigma}}_1 - \dot{\hat{\tau}}_1\right|_S + \left|\dot{\hat{\kappa}}_1 - \dot{\hat{\chi}}_1\right|_H$$

die Ungleichungen

$$\begin{aligned} f(t) &\le (\mu_2 + k_2)\, b_3\, \rho_1^{i_1}\, (\Delta t + h_1) + b_4 \sqrt{\gamma} \int\limits_0^{t_n} f(t)\, dt \le \\ &\le (\mu_2 + k_2)\, b_3\, \rho_1^{i_1}\, (\Delta t + h_1) + b_4 \sqrt{8} \int\limits_0^{t} f(\tau)\, d\tau. \end{aligned} \tag{5.48}$$

Unter Benutzung der integralen Form des Gronwallschen Lemmas ([18], Lemma 3.6) erhalten wir aus (5.48) die Abschätzungen

$$0 \le f(t) \le (\mu_2 + k_2)\, b_3\, \rho_1^{i_1}\, (\Delta t + h_1)\, e^{b_4 \sqrt{\gamma}\, t}, \tag{5.49}$$

oder

$$\begin{aligned} \left|\sigma_{t,1}^n - \tau_{t,1}^n\right|_S + \left|\kappa_{t,1}^n - \chi_{t,1}^n\right|_H &\le (\mu_2 + k_2)\, b_3\, \rho_1^{i_1}\, e^{b_4 \sqrt{\gamma}\, t_n} (\Delta t + h_1) \le \\ &\le (\mu_2 + k_2)\, b_3\, \rho_1^{i_1}\, e^{b_4 \sqrt{\gamma}\, T} (\Delta t + h_1) = b_5\, \rho_1^{i_1} (\Delta t + h_1) \end{aligned} \tag{5.50}$$

mit $b_5 = (\mu_2 + k_2)\, b_3\, e^{b_4 \sqrt{\gamma}\, T}$. Wir setzen nun (5.49) in (5.43) ein und erhalten so die Abschätzungen

$$\begin{aligned} \left|w_{t,1}^n - u_{t,1}^n\right|_V &\le \frac{k_1}{\mu_1} \sqrt{\gamma} \int\limits_0^{t_n} f(t)\, dt \le \\ &\le \frac{k_1}{\mu_1} \sqrt{\gamma}\, (\mu_2 + k_2)\, b_3\, \rho_1^{i_1} \int\limits_0^{t_n} e^{b_4 \sqrt{\gamma}\, t}\, dt\, (\Delta t + h_1) = \\ &= \frac{k_1}{\mu_1} (\mu_2 + k_2)\, \frac{b_3}{b_4} \left(e^{b_4 \sqrt{\gamma}\, t_n} - 1\right) \rho_1^{i_1}\, (\Delta t + h_1) \le \\ &\le k_1\, \mu_1^{-1}\, (\mu_2 + k_2)\, b_3\, b_4^{-1}\, e^{b_4 \sqrt{\gamma}\, T} \rho_1^{i_1}\, (\Delta t + h_1). \end{aligned} \tag{5.51}$$

Schließlich erhalten wir aus (5.38), (5.40) und (5.51) die endgültige Abschätzung

$$\begin{aligned} \left|v_{t,1}^n - u_{t,1}^n\right|_V &\le \rho_1^{i_1} \left|\tilde{v}_{t,1}^n - u_{t,1}^n\right|_V + (1 + \rho_1^{i_1}) \left|w_{t,1}^n - u_{t,1}^n\right|_V \le \\ &\le \rho_1^{i_1}\, b_3\, (\Delta t + h_1) + (1 + \rho_1^{i_1})\, \frac{k_1}{\mu_1} (\mu_2 + k_2)\, \frac{b_3}{b_4}\, e^{b_4 \sqrt{\gamma}\, T} \rho_1^{i_1}\, (\Delta t + h_1) = \\ &= \left\{ b_3 + (1 + \rho_1^{i_1})\, k_1\, \mu_1^{-1}\, (\mu_2 + k_2)\, b_3\, b_4^{-1}\, e^{b_4 \sqrt{\gamma}\, T} \right\} \rho_1^{i_1}\, (\Delta t + h_1) = \\ &= b_6\, \rho_1^{i_1}\, (\Delta t + h_1), \end{aligned} \tag{5.52}$$

$\le 2$

wobei $b_6 = b_3\, (1 + (1 + \rho_1^{i_1}) k_1\, \mu_1^{-1}\, (\mu_2 + k_2)\, b_4^{-1} \exp\, (b_4 \sqrt{\gamma}\, T))$.
Setzen $b_7 = \max\{b_5, b_6\}$ und fordern, daß

$$b_7\, \rho_1^{i_1} \le \alpha. \tag{5.53}$$

Aus (5.53) folgt, daß für

$$i_1 = \left[\ln\, (b_7/\alpha) / \ln\, \rho_1^{-1}\right] \tag{5.54}$$

die Abschätzungen (5.33) im Falle $q = 1$ nun auch für den Index $n$ gelten.

Zu 3.) Völlig analog kann man nun zeigen, daß für

$$k_* = \left[\ln\left(b_7/\alpha\right)/\ln\,\rho_p^{-1}\right] \tag{5.55}$$

die Abschätzungen (5.33) für das Indexpaar $(q, n)$ gelten, falls sie für die Indexpaare $(q-1, n)$, $(q-1, n-1)$ und $(q, n-1)$ als richtig vorausgesetzt wurden. Der einzige Unterschied zu der unter 2.) dargelegten Abschätzungstechnik besteht in den Ungleichungen (5.40), da für $q \in \{2, 3, \ldots, l\}$ und $n \in \{1, 2, \ldots, N-1\}$ eine kompliziertere Anfangsnäherung $\tilde{v}_{t,q}^{n}$ nach der Formel

$$\tilde{v}_{t,q}^{n} = v_{t,q}^{n-1} + I_{q-1}^{q}\left(v_{t,q-1}^{n} - v_{t,q-1}^{n-1}\right) \tag{5.56}$$

extrapoliert wird (vgl. (5.39)). Anstelle von (5.40) erhalten wir folglich die Abschätzung

$$\begin{aligned} \left|\tilde{v}_{t,q}^{n} - u_{t,q}^{n}\right|_V &= \left|\left\{u_{t,q}^{n-1} - u_{t,q}^{n} - I_{q-1}^{q}\left(u_{t,q-1}^{n-1} - u_{t,q-1}^{n}\right)\right\} + \right. \\ &\quad \left. + \left\{v_{t,q}^{n-1} - u_{t,q}^{n-1}\right\} - I_{q-1}^{q}\left[\left\{v_{t,q-1}^{n-1} - u_{t,q-1}^{n-1}\right\} - \left\{v_{t,q-1}^{n} - u_{t,q-1}^{n}\right\}\right]\right|_V \leq \\ &\leq \left|u_{t,q}^{n-1} - u_{t,q}^{n} - I_{q-1}^{q}\left(u_{t,q-1}^{n-1} - u_{t,q-1}^{n}\right)\right|_V + \\ &\quad + \left|v_{t,q}^{n-1} - u_{t,q}^{n-1}\right|_V + \left|I_{q-1}^{q}\right|_{[V_{q-1}\to V_q]}\left\{\left|v_{t,q-1}^{n-1} - u_{t,q-1}^{n-1}\right|_V + \left|v_{t,q-1}^{n} - u_{t,q-1}^{n}\right|_V\right\}. \end{aligned} \tag{5.57}$$

Die letzten drei Terme werden mit (5.33) über die Induktionsvoraussetzung und unter Benutzung der Ungleichungen (5.31) und (5.32) durch die Größe $(\alpha + 2\,b_1\,b_2\,\alpha)\,(\Delta t + h_q)$ abgeschätzt. Für den ersten Term erhalten wir unter Benutzung des Satzes 5.8 und der Folgerung 5.1 folgende grobe (vgl. Bemerkung 5.2) Abschätzung

$$\begin{aligned} &\left|u_{t,q}^{n-1} - u_{t,q}^{n} - I_{q-1}^{q}\left(u_{t,q-1}^{n-1} - u_{t,q-1}^{n}\right)\right|_V \leq \\ &\leq \left|u_{t,q}^{n-1} - \dot{u}\left(t_{n-1}\right)\right|_V + \left|\dot{u}\left(t_{n-1}\right) - \dot{u}\left(t_n\right)\right|_V + \left|\dot{u}\left(t_n\right) - u_{t,q}^{n}\right|_V + \\ &\quad + \left|I_{q-1}^{q}\right|_{[V_{q-1}\to V_q]}\left\{\left|\dot{u}_{t,q-1}^{n-1} - \dot{u}\left(t_{n-1}\right)\right|_V + \left|\dot{u}\left(t_{n-1}\right) - \dot{u}\left(t_n\right)\right|_V + \left|\dot{u}\left(t_n\right) - u_{t,q-1}^{n}\right|_V\right\} \leq \\ &\leq \bar{b}_3\left(\Delta t + h_q\right) \end{aligned} \tag{5.58}$$

mit einer universellen, positiven Konstante $\bar{b}_3 = \text{const.} > 0$. Folglich gilt wiederum die Ungleichung

$$\left|\tilde{v}_{t,q}^{n} - u_{t,q}^{n}\right|_V \leq b_3\left(\Delta t + h_q\right), \tag{5.59}$$

natürlich jetzt mit einer anderen universellen, positiven Konstante $b_3 = \text{const.} > 0$. Da auch hier $b_7$ eine universelle, positive Konstante ist und $\rho_p \in (0, 1)$ ebenfalls von $q$, $l$, $n$ und $N$ unabhängig ist, gilt dies auch für die Iterationszahl $k_*$. Wir bemerken, daß $b_7$ stets größer als $\alpha$ ist. Damit ist der Satz bewiesen. ■

**Folgerung 5.2:**

Falls $S_q^0$ $(q = \overline{2,l})$ durch eine lineare Multigrid–Prozedur für das lineare Elastizitätsproblem (siehe [18], S. 233 – 242) und $S_q^n$ $(q = \overline{2,l};\ n = \overline{1, N-1})$ durch eine nichtlineare Multigrid–Prozedur (siehe Vorlesung Multigrid–Methoden [20] bzw. Standardliteratur, z.B. [15]) bzw. durch ein zweistufiges Iterationsverfahren, das als inneren Iterationsprozeß ein lineares Multigrid–Verfahren benutzt (siehe Abs. 5.4.2), realisiert wird, dann produziert das inkrementelle "nested" Iterationsschema $\left(A^{(\gamma)}_{\Delta,\overline{1,l}}\right)$ Lösungen $\left\{v^n_{t,l}\right\}_{n=\overline{0,N-1}}$, $\left\{\tau^n_{t,l}\right\}_{n=\overline{0,N-1}}$ und $\left\{\chi^n_{t,l}\right\}_{n=\overline{0,N-1}}$ mit einem Fehler in der Größenordnung des Diskretisierungsfehlers $O\left(h_l + \Delta t\right)$ mit $O\left(h_l^{-m}\left(\Delta t\right)^{-1}\right)$ arithmetischen Operationen. Der Speicherplatzbedarf für das inkrementelle "nested" Iterationsschema $\left(A^{(\gamma)}_{\Delta,\overline{1,l}}\right)$ ist offenbar von der Größenordnung $O\left(h^{-m}\right)$ abhängig. Damit ist mit dem in diesem Abschnitt vorgeschlagenen inkrementellen "nested" Iterationsschema $\left(A^{(\gamma)}_{\Delta,\overline{1,l}}\right)$ zur Lösung der Aufgabe $\left(A^{(\gamma)}\right)$ der elastisch–plastischen Fließtheorie sowohl bezüglich der Komplexität als auch des Speicherplatzbedarfes ein asymptotisch optimales Verfahren konstruiert.

**Bemerkung 5.2:**

Die Wahl der Anfangsnäherung $\tilde{v}^n_{t,q}$ entsprechend (5.56) entspricht folgendem Extrapolationsgedanken. Wir nehmen an, daß die Einbettungsbedingung $V_{q-1} \subset V_q$ $(q = \overline{2,l})$ erfüllt sei und daß $v_t = v_t\left(t, h\right)$ eine hinreichend glatte Funktion von $t$ und $h$ sei mit $v^n_{t,q} = v_t\left(t_n, h_q\right)$ für $n = \overline{0, N-1}$ und $q = \overline{1,l}$. Es seien nun für fixierte $n \in \{1, 2, \ldots, N-1\}$ und $q \in \{2, 3, \ldots, l\}$ die Werte $v^n_{t,q-1} = v_t\left(t_n, h_{q-1}\right)$, $v^{n-1}_{t,q-1} = v_t\left(t_{n-1}, h_{q-1}\right)$ und $v^{n-1}_{t,q} = v_t\left(t_{n-1}, h_q\right)$ bekannt. Dann gilt für alle $(t, h) \in [t_n, t_{n+1}] \times [h_q, h_{q-1}]$ nach der Taylor–Formel die Beziehung

$$(5.60)\qquad \begin{aligned} v_t\left(t, h\right) = v_t\left(t_{n-1}, h_{q-1}\right) &+ \left.\frac{\partial\, v_t}{\partial\, t}\right|_{(t_{n-1},h_{q-1})} \left(t - t_{n-1}\right) + \\ &+ \left.\frac{\partial\, v_t}{\partial\, h}\right|_{(t_{n-1},h_{q-1})} \left(h - h_{q-1}\right) + O\left(\Delta t\, \Delta h + \Delta t^2 + \Delta h^2\right) \end{aligned}$$

mit $\Delta t = t_n - t_{n-1}$ und $\Delta h = h_{q-1} - h_q$. Ersetzt man in (5.60) die Ableitungen durch vorwärtige bzw. rückwärtige Differenzen, so erhält man

$$v_t(t, h) = v^{n-1}_{t,q-1} + \frac{v^n_{t,q-1} - v^{n-1}_{t,q-1}}{\Delta t}\left(t - t_{n-1}\right) + \frac{v^{n-1}_{t,q-1} - v^{n-1}_{t,q}}{\Delta h}\left(h - h_{q-1}\right) + O\left(\Delta t\, \Delta h + \Delta t^2 + \Delta h^2\right).$$

Daraus folgt

$$\begin{aligned} v^n_{t,q} = v_t(t_n, h_q) \;&=\; v^{n-1}_{t,q-1} + \left(v^n_{t,q-1} - v^{n-1}_{t,q-1}\right) - \left(v^{n-1}_{t,q-1} - v^{n-1}_{t,q}\right) + O\left(\Delta t\, \Delta h + \Delta t^2 + \Delta h^2\right) = \\ &=\; v^{n-1}_{t,q} + \left(v^n_{t,q-1} - v^{n-1}_{t,q-1}\right) + O\left(\Delta t\, \Delta h + \Delta t^2 + \Delta h^2\right). \end{aligned}$$

Damit gilt

$$\tilde{v}^n_{t,q} \equiv v^{n-1}_{t,q} + \left(v^n_{t,q-1} - v^{n-1}_{t,q-1}\right) = v^n_{t,q} + O\left(\Delta t\, \Delta h + \Delta t^2 + \Delta h^2\right),$$

d.h., die gewählte Anfangsnäherung liefert unter den oben gemachten Hypothesen bereits eine gute Approximation der gesuchten Näherung $v^n_{t,q}$ (vgl. auch [14]). Allerdings kann angenommen werden, daß diese Hypothesen, insbesondere die Glattheitshypothese, bezüglich der Funktion $v_t\left(t, h\right)$ für die hier betrachtete Aufgabenklasse nicht erfüllt sind (vgl. diesbezüglich Folgerung 5.1).

# Literaturverzeichnis


[1] D. N. Arnold and F. Brezzi. Some new elements for the Reisner-Mindlin plate model. In *Boundary Value Problems for Partial Differential Equations and Applications (J.-L. Lions and C. Baiocchi, eds.)*, pages 287–292, Paris, 1993. Masson.

[2] O. Axelsson. *Iterative Solution Methods.* Cambridge University Press, Cambridge, 1994.

[3] H. Bergander. Plastische Deformationsgesetze in differentieller Standardformulierung. *ZAMM*, 60:509–519, 1980.

[4] D. Braess. *Finite Elemente.* Springer-Verlag, Berlin - Heidelberg, 1992.

[5] D. Braess. *Finite Elemente.* Springer-Verlag, Berlin - Heidelberg, 1997. 2. Auflage.

[6] J. H. Bramble and J. E. Pasciak. A preconditioning technique for indefinite systems resulting from mixed approximation of elliptic problems. *Math. Comput.*, 50(181):1–17, 1988.

[7] F. Brezzi and M. Fortin. *Mixed and hybrid finite elemente methods.* Springer-Verlag, New York - Berlin - Heidelberg, 1991.

[8] P. Ciarlet. *The finite element method for elliptic problems.* North-Holland Publishing Company, Amsterdam - New York - Oxford, 1978.

[9] J. B. Cooper and W. Schachermayer. *Skriptum zur Vorlesung ANALYSIS III.* Johannes Kepler Universität, Institut für Mathematik, Linz, 1993.

[10] G. Duvaut and J.-L. Lions. *Les Inéquations en Méchanique et en Physique.* Dunod, Paris, 1972.

[11] H. Engl. *Skriptum zur Vorlesung „Mathematische Methoden der Kontinuumsmechanik“.* Johannes Kepler Universität, Institut für Mathematik, Linz, 1992.

[12] V. Girault and P.-A. Raviart. *Finite Element Methods for Navier-Stokes Equations.* Springer-Verlag, Berlin, 1986.

[13] C. Großmann and H.-G. Roos. *Numerik partieller Differentialgleichungen.* B.G. Teubner, Stuttgart, 1992.

[14] W. Hackbusch. Multigrid solution of continuation problems. Berichte des Instituts für Informatik und praktische Mathematik 8206, Christian-Albrechts-Universität Kiel, 1982.

[15] W. Hackbusch. *Multigrid Methods and Applications.* Springer–Verlag, Berlin, 1985.

[16] W. Hackbusch and U. Trottenberg, editors. *Multigrid Methods*, Berlin, 1982. Springer-Verlag. Lecture Notes in Mathematics, Nr. 960.

[17] N. Kikuchi. *Finite Element Method in Mechanics*. Cambridge University Press, Cambridge, 1986.

[18] V. G. Korneev and U. Langer. *Approximate Solution of Plastic Flow Theory Problems*. B.G. Teubner, Leipzig, 1984.

[19] V. G. Korneev and U. Langer. On the regularity of the solution of plastic flow theory problems (in Russian). *Diff. Urav.*, 20(4):667–676, 1984.

[20] U. Langer. *Skriptum zur Vorlesung MULTIGRID–METHODEN*. Johannes Kepler Universität, Institut für Mathematik, Linz, 1996.

[21] U. Langer. *Skriptum zur Vorlesung NUMERIK I (Operatorgleichungen)*. Johannes Kepler Universität, Institut für Mathematik, Linz, 1996.

[22] U. Langer. *Skriptum zur Vorlesung NUMERIK II (RWA)*. Johannes Kepler Universität, Institut für Mathematik, Linz, 1996.

[23] U. Langer. *Skriptum zur Vorlesung NUMERIK III (AWA, ARWA)*. Johannes Kepler Universität, Institut für Mathematik, Linz, 1997.

[24] U. Langer and W. Zulehner. Sattelpunktprobleme. Seminarberichte 98-1, Johannes Kepler Universität, Institut für Analysis und Numerik, 1998.

[25] J. A. Nitsche. On Korn's second inequality. *RAIRO Anal. Numér.*, 15:237–248, 1981.

[26] W. Olszak, C. Massonnet, and A. Phillips. *Plasticity in Structural Engineering: Foundamentals and Applications*. Springer-Verlag, Wien - New York, 1979.

[27] V. J. Rivkind and N. N. Uralzeva. Variational difference schemes for quasilinear elliptic and parabolic equations (in Russian). *Vestnik LGU, Ser. Matem., Mechan., Astron.*, 19:66–70, 1972.

[28] A. A. Samarski and E. S. Nikolaev. *Numerical methods for grid equations. Vol. II : Iterative Methods*. Birkhäuser-Verlag, Basel - Boston - Berlin, 1989.

[29] A. Tamme. *Mathematische Untersuchung einer Klasse strukturmechanischer Grundmodelle der elastisch-plastischen Fließtheorie*. PhD thesis, TH Karl-Marx-Stadt, 1986.

[30] W. Zulehner. *Skriptum zur Vorlesung „Numerische Methoden in der Strömungsmechanik“*. Johannes Kepler Universität, Institut für Mathematik, Linz, 1997.

[31] W. Zulehner. Analysis of iterative methods for saddle point problems: A unified approach. Institutsbericht 538, Johannes Kepler Universität, 1998.