

**ÜBUNGEN ZU
ANALYSIS FÜR PHYSIKER(INNEN)**

für den 18. 1. 2012

73. Bestimmen Sie die Bogenlängen der Kurven C_1 , gegeben durch die Parametrisierung $\gamma_1: [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}^3$ mit $\gamma_1(t) = (\cos t, \sin t, t)^T$, und C_2 , gegeben durch die Parametrisierung $\gamma_2: [0, \sqrt{2\pi}] \rightarrow \mathbb{R}^3$ mit $\gamma_2(s) = (\cos(s^2), \sin(s^2), s^2)^T$.
74. Bestimmen Sie für die Kurve C mit der Parametrisierung $\gamma: [0, \pi] \rightarrow \mathbb{R}^2$ mit $\gamma(t) = (t - \sin t, -1 + \cos t)^T$ das Kurvenintegral

$$\int_C f(x, y) \, ds$$

für die beiden Funktionen

$$f(x, y) = 1 \quad \text{und} \quad f(x, y) = \frac{1}{\sqrt{-2gy}}$$

mit $g = 9,81$.

Hinweis: $1 - \cos t = 2 \sin^2 \frac{t}{2}$.

75. Sei C jene Kurve in $\mathbb{R}^2$, die den Anfangspunkt $(0, 0)^T$ mit dem Endpunkt $(\pi, -2)^T$ linear (d.h. durch ein Geradenstück) verbindet. Berechnen Sie

$$\int_C f(x, y) \, ds$$

für die beiden Funktionen

$$f(x, y) = 1 \quad \text{und} \quad f(x, y) = \frac{1}{\sqrt{-2gy}}$$

mit $g = 9,81$.

76. Berechnen Sie für das Vektorfeld $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, gegeben durch

$$f(x_1, x_2) = \begin{pmatrix} x_1^2 - x_2^2 \\ -2x_1x_2 \end{pmatrix},$$

die Jacobi-Matrix $f'(x)$ und untersuchen Sie, ob $f'(x)$ symmetrisch ist.

77. Berechnen Sie für das Vektorfeld $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ aus der Übungsaufgabe 76 ein Skalarfeld $\phi: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ mit $\text{grad } \phi(x) = f(x)$.

78. Bestimmen Sie für das Vektorfeld $f: X \rightarrow \mathbb{R}^2$ mit $X = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)^T\}$, gegeben durch

$$f(x_1, x_2) = \frac{1}{r^2} \begin{pmatrix} -x_2 \\ x_1 \end{pmatrix} \quad \text{mit} \quad r = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}$$

das Kurvenintegral $\int_C f(x) \cdot dx$ entlang des Kreises C mit der Parametrisierung $\gamma: [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}^2$, $\gamma(t) = (\cos t, \sin t)^T$.

79. Berechnen Sie für das Vektorfeld f aus dem Übungsbeispiel 78 die Jacobi-Matrix $f'(x)$ und untersuchen Sie, ob $f'(x)$ symmetrisch ist.
80. Ist das Vektorfeld f aus Übungsaufgabe 78 (als Funktion auf dem Definitionsbereich $X = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)^T\}$) konservativ? Ist das Vektorfeld f aus Übungsaufgabe 78 als Funktion auf dem kleineren Definitionsbereich

$$\tilde{X} = \mathbb{R}^2 \setminus \{(x_1, 0)^T : x_1 \leq 0\}$$

konservativ?

Hinweis: Beachten Sie für die erste Frage das Ergebnis der Übungsaufgabe 78. Untersuchen Sie für die zweite Frage, ob $\tilde{X}$ sternförmig ist.

81. Sei $x = (x_1, x_2)^T$ ein beliebiger Punkt in $X = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)^T\}$. Dieser Punkt besitzt eine eindeutige Darstellung in Polarkoordinaten: $x_1 = r \cos \varphi$ und $x_2 = r \sin \varphi$ mit $r \in (0, \infty)$ und $\varphi \in (-\pi, \pi]$. Die Kurve C_1 ist durch $\gamma_1: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^2$ mit $\gamma_1(t) = (\cos(t\varphi), \sin(t\varphi))^T$ gegeben. Die Kurve C_2 ist durch $\gamma_2: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^2$ mit $\gamma_2(t) = ((1+t(r-1)) \cos \varphi, (1+t(r-1)) \sin \varphi)^T$ gegeben. Die Kurve $C_x = C_1 + C_2$ verbindet den Anfangspunkt $(1, 0)^T$ mit dem Endpunkt $x = (x_1, x_2)^T$. Stellen Sie diese Kurve grafisch dar.