ÜBUNGEN ZU

ANALYSIS FÜR PHYSIKER(INNEN)

für den 11. 1. 2012

---

64. Seien $X, Y \subset \mathbb{R}^2$ offene Mengen und sei $g\colon X \longrightarrow Y$ eine bijektive und differenzierbare Abbildung. Sei $f\colon Y \longrightarrow X$ die Umkehrfunktion von g. Wir setzen voraus, dass f ebenfalls differenzierbar ist. Zeigen Sie

$$f'(y)g'(x) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{mit} \quad y = g(x),$$

also

$$f'(y) = g'(x)^{-1} \quad \text{mit} \quad y = g(x).$$

Hinweis: Differenzieren Sie die Identität

$$f(g(x)) = x$$

und wenden Sie dabei die Kettenregel an.

65. Sei $T\colon [0, \infty) \times (-\pi, \pi] \longrightarrow \mathbb{R}^2$ durch die Vorschrift

$$T(r, \varphi) = \begin{pmatrix} r\,\cos\varphi \\ r\,\sin\varphi \end{pmatrix}$$

gegeben. T ist als Funktion von $U = (0, \infty) \times (-\pi, \pi)$ nach $V = \mathbb{R}^2 \setminus \{(x, 0)^T : x \le 0\}$ bijektiv und differenzierbar und besitzt eine differenzierbare Umkehrfunktion T^{-1}. Zeigen Sie mit Hilfe der Formel aus Übungsaufgabe 64:

$$(T^{-1})'(x, y) = \begin{pmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi \\ -\dfrac{\sin\varphi}{r} & \dfrac{\cos\varphi}{r} \end{pmatrix}$$

mit $x = r\,\cos\varphi$ und $y = r\,\sin\varphi$.

Hinweis: Es gilt für die Inverse einer regulären 2×2 Matrix:

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{ad - bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}.$$

66. Sei $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ eine differenzierbare Funktion. Die partielle Ableitungen von f werden mit $\frac{\partial f}{\partial x}(x, y)$ und $\frac{\partial f}{\partial y}(x, y)$ bezeichnet. Sei $g\colon (0, \infty) \times (-\pi, \pi) \to \mathbb{R}$ durch

$$g(r, \varphi) = f(r\,\cos\varphi, r\,\sin\varphi)$$

gegeben. Die partielle Ableitungen von g werden mit $\frac{\partial g}{\partial r}(r, \varphi)$ und $\frac{\partial g}{\partial \varphi}(r, \varphi)$ bezeichnet. Zeigen Sie durch direkte Anwendung der Kettenregel auf $f = g \circ T^{-1}$ und unter Verwendung von Übungsaufgabe 65:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = \cos\varphi \, \frac{\partial g}{\partial r}(r, \varphi) - \frac{\sin\varphi}{r} \, \frac{\partial g}{\partial \varphi}(r, \varphi)$$
$$\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = \sin\varphi \, \frac{\partial g}{\partial r}(r, \varphi) + \frac{\cos\varphi}{r} \, \frac{\partial g}{\partial \varphi}(r, \varphi)$$

für $x = r \, \cos\varphi$ und $y = r \, \sin\varphi$.

67. Sei $f \colon \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$ ein differenzierbares Skalarfeld. Stellen Sie

$$\operatorname{div} \operatorname{grad} f(\vec{x}) \quad \text{und} \quad \operatorname{rot} \operatorname{grad} f(\vec{x})$$

mit Hilfe der partiellen Ableitungen 2. Ordnung von f dar.

68. Sei $\vec{f} \colon \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ ein differenzierbares Vektorfeld. Stellen Sie

$$\operatorname{grad} \operatorname{div} \vec{f}(\vec{x}) \quad \text{und} \quad \operatorname{div} \operatorname{rot} \vec{f}(\vec{x})$$

mit Hilfe der partiellen Ableitungen 2. Ordnung der Komponentenfunktionen f_i von $\vec{f}$ dar.

69. Bestimmen Sie für die Funktion $f \colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ mit $f(x, y) = e^x \cos y$ das Taylor-Polynom vom Grad 2, also

$$T_2(x, y) = f(x_0, y_0) + \nabla f(x_0, y_0) \cdot \begin{pmatrix} x - x_0 \\ y - y_0 \end{pmatrix} + \frac{1}{2} \begin{pmatrix} x - x_0 \\ y - y_0 \end{pmatrix}^T H_f(x_0, y_0) \begin{pmatrix} x - x_0 \\ y - y_0 \end{pmatrix}$$

an der Stelle $(x_0, y_0) = (0, 0)$.

70. Bestimmen Sie für die Funktion $f \colon \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ mit $f(x, y) = -x^2y^2 + x^2 + y^2 - 1$ alle Punkte (x, y) mit

$$\operatorname{grad} f(x, y) = 0.$$

Berechnen Sie für jeden dieser Punkte die Hesse-Matrix $H_f(x, y)$ und überprüfen Sie, ob diese Matrix positiv definit oder negativ definit ist.

71. Bestimmen Sie die Richtung des steilsten Anstiegs der Funktion $f \colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ mit $f(x, y) = (x + y) \, e^{-x^2 - y^2}$ jeweils für $(x, y) = (1, 0)$, $(x, y) = (0, 1)$, $(x, y) = (-1, 0)$ und $(x, y) = (0, -1)$.

72. Bestimmen Sie alle lokalen Maxima und Minima der Funktion $f \colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ mit $f(x, y) = (x + y) \, e^{-x^2 - y^2}$.