ÜBUNGEN ZU

ANALYSIS FÜR PHYSIKER(INNEN)

für den 14. 12. 2011

---

55. Berechnen Sie die partiellen Ableitungen $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y,z)$, $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y,z)$ und $\frac{\partial f}{\partial z}(x,y,z)$ von $f(x,y,z) = x^2 \sin(x\,z) + y^2$.

56. Berechnen Sie die Ableitung (totale Ableitung, Fréchet-Ableitung, Jacobi-Matrix) $f'(x,y)$ der Funktion
$$f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, \quad \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} \sin x\, \cosh y \\ \cos x\, \sinh y \end{pmatrix}.$$

57. Seien $c \in \mathbb{R}$ eine gegebene konstante Zahl und $\vec{c} \in \mathbb{R}^3$ ein gegebener konstanter Vektor. Die drei Funktionen $\vec{f}\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $g\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, $\vec{h}\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ sind durch
$$\vec{f}(\vec{x}) = c\,\vec{x}, \quad g(\vec{x}) = \vec{c}\cdot\vec{x}, \quad \vec{h}(\vec{x}) = \vec{c}\times\vec{x}$$
gegeben. Berechnen Sie direkt (d.h.: ohne Verwendung von Produktregeln aus dem Skriptum): $\vec{f}\,'(\vec{x})$, $\nabla\cdot\vec{f}(\vec{x})$, $\nabla\times\vec{f}(\vec{x})$, $g'(\vec{x})$, $\nabla g(\vec{x})$, $\vec{h}\,'(\vec{x})$, $\nabla\cdot\vec{h}(\vec{x})$ und $\nabla\times\vec{h}(\vec{x})$.

58. Zeigen Sie für die Funktionen $f_1\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ mit $f_1(x,y) = \sin x\, \cosh y$ und $f_2\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ mit $f_2(x,y) = \cos x\, \sinh y$:
$$\frac{\partial f_1}{\partial x}(x,y) = \frac{\partial f_2}{\partial y}(x,y), \quad \frac{\partial f_1}{\partial y}(x,y) = -\frac{\partial f_2}{\partial x}(x,y)$$
und
$$\Delta f_1(x,y) = 0, \quad \Delta f_2(x,y) = 0,$$
wobei Δ den Laplace-Operator bezeichnet.

59. Der Quotient zweier Funktionen $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ und $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ lässt sich auch als Hintereinanderausführung der Funktionen $F\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ und $h\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ mit
$$F(x) = \begin{pmatrix} f(x) \\ g(x) \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad h(y) = \frac{y_1}{y_2} \quad \text{für} \quad y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$$
darstellen:
$$\frac{f(x)}{g(x)} = h(F(x)).$$
Verwenden Sie die Kettenregel, um die Ableitung von $h(F(x))$ darzustellen und bestätigen Sie damit die Quotientenregel.

60. Sei $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ eine differenzierbare Funktion. Die partielle Ableitungen von f werden mit $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)$ und $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)$ bezeichnet. Sei $g\colon [0,\infty)\times(-\pi,\pi] \to \mathbb{R}$ durch

$$g(r,\varphi) = f(r\,\cos\varphi, r\,\sin\varphi)$$

gegeben. Die partielle Ableitungen von g werden mit $\frac{\partial g}{\partial r}(r,\varphi)$ und $\frac{\partial g}{\partial \varphi}(r,\varphi)$ bezeichnet. Zeigen Sie:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial g}{\partial r}(r,\varphi) &= \cos\varphi\,\frac{\partial f}{\partial x}(r\,\cos\varphi, r\,\sin\varphi) + \sin\varphi\,\frac{\partial f}{\partial y}(r\,\cos\varphi, r\,\sin\varphi)\\
\frac{\partial g}{\partial \varphi}(r,\varphi) &= -r\,\sin\varphi\,\frac{\partial f}{\partial x}(r\,\cos\varphi, r\,\sin\varphi) + r\,\cos\varphi\,\frac{\partial f}{\partial y}(r\,\cos\varphi, r\,\sin\varphi)
\end{aligned}$$

Hinweis: Kettenregel für $g = f\circ T$ mit

$$T\colon [0,\infty)\times(-\pi,\pi] \to \mathbb{R}^2, \qquad \begin{pmatrix} r\\ \varphi\end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} r\cos\varphi\\ r\sin\varphi\end{pmatrix}.$$

61. Mit den Abkürzungen $x = r\,\cos\varphi$ und $y = r\,\sin\varphi$ lassen sich die Beziehungen aus der Übungsaufgabe 60 folgendermaßen schreiben:

$$\begin{aligned}
\cos\varphi\,\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) + \sin\varphi\,\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) &= \frac{\partial g}{\partial r}(r,\varphi)\\
-r\,\sin\varphi\,\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) + r\,\cos\varphi\,\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) &= \frac{\partial g}{\partial \varphi}(r,\varphi)
\end{aligned}$$

Folgern Sie daraus für $r \neq 0$:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) &= \cos\varphi\,\frac{\partial g}{\partial r}(r,\varphi) - \frac{\sin\varphi}{r}\,\frac{\partial g}{\partial \varphi}(r,\varphi)\\
\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) &= \sin\varphi\,\frac{\partial g}{\partial r}(r,\varphi) + \frac{\cos\varphi}{r}\,\frac{\partial g}{\partial \varphi}(r,\varphi).
\end{aligned}$$

Hinweis: Betrachten Sie die Beziehungen aus Übungsaufgabe 60 als lineares Gleichungssystem für die Größen $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)$ und $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)$. Lösen Sie das Gleichungssystem nach diesen Größen auf.

62. Seien $r \in (0,\infty)$ und $\varphi \in (-\pi,\pi]$ vorgegeben. Berechnen Sie die Richtungsableitung $\frac{\partial f}{\partial v}(x_0,y_0)$ der Funktion $f(x,y) = x^2 + y^2$ an der Stelle $(x_0,y_0) = (r\cos\varphi, r\sin\varphi)$ für die Richtung $v = n$ und für die Richtung $v = t$ mit

$$n = \begin{pmatrix}\cos\varphi\\ \sin\varphi\end{pmatrix} \quad \text{und} \quad t = \begin{pmatrix}-\sin\varphi\\ \cos\varphi\end{pmatrix}.$$

63. Seien $f\colon X \longrightarrow \mathbb{R}$ und $\vec{g}\colon X \longrightarrow \mathbb{R}^n$ differenzierbare Funktionen auf $X \subset \mathbb{R}^n$. Bestätigen Sie die folgende Produktregel:

$$\nabla\cdot\big(f(x)\vec{g}(x)\big) = \big(\nabla f(x)\big)\cdot\vec{g}(x) + f(x)\,\big(\nabla\cdot\vec{g}(x)\big).$$