ÜBUNGEN ZU

ANALYSIS FÜR PHYSIKER(INNEN)

für den 07. 12. 2011

---

46. Bestimmen Sie (mit Hilfe der Rechenregeln in $\mathbb{C}$) für die beiden komplexen Zahlen

$$z_1 = \frac{(2+3i)^2 - (-7+9i)}{(1-i)\cdot(3+i)} \quad \text{und} \quad z_2 = \left(\frac{1-i}{1+i}\right)^3 + \frac{3-i}{1+3i}$$

jeweils den Realteil und den Imaginärteil.

47. Zeigen Sie für alle $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$:

$$\overline{z_1 \cdot z_2} = \overline{z}_1 \cdot \overline{z}_2, \quad |z_1 \cdot z_2| = |z_1| \cdot |z_2|$$

und, falls $z_2 \neq 0$:

$$\left|\frac{z_1}{z_2}\right| = \frac{|z_1|}{|z_2|}.$$

48. Finden Sie alle Lösungen $z = x + i\,y \in \mathbb{C}$ mit $x, y \in \mathbb{R}$, sodass

$$z^2 = -2i$$

Hinweis: In der Vorlesung wurde die Gleichung $z^2 = -1$ diskutiert. Gehen Sie analog vor.

49. Zeigen Sie für alle $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$:

$$e^{z_1+z_2} = e^{z_1} \cdot e^{z_2}$$

50. Angenommen, die komplexen Zahlen $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ liegen in Polarform vor:

$$z_1 = r_1\, e^{i\,\varphi_1} \quad \text{und} \quad z_2 = r_2\, e^{i\,\varphi_2}.$$

Zeigen Sie die folgende Polarformen für das Produkt und den Quotienten der beiden Zahlen:

$$z_1 \cdot z_2 = r\, e^{i\,\varphi} \quad \text{mit} \quad r = r_1 \cdot r_2 \quad \text{und} \quad \varphi = \varphi_1 + \varphi_2$$

und, falls $z_2 \neq 0$:

$$\frac{z_1}{z_2} = r\, e^{i\,\varphi} \quad \text{mit} \quad r = \frac{r_1}{r_2} \quad \text{und} \quad \varphi = \varphi_1 - \varphi_2.$$

51. Mit Hilfe der komplexen Exponentialfunktion lassen sich die Sinus- und die Kosinusfunktion auch für komlexe Zahlen $z \in \mathbb{C}$ definieren:

$$\sin z = \frac{1}{2i}\left(e^{i\,z} - e^{-i\,z}\right), \quad \cos z = \frac{1}{2}\left(e^{i\,z} + e^{-i\,z}\right)$$

Überprüfen Sie, ob die Identität

$$\sin^2 z + \cos^2 z = 1$$

auch für alle $z \in \mathbb{C}$ gültig bleibt.

52. Zeigen Sie für alle $n \in \mathbb{N}$ und $x \in \mathbb{R}$:

$$(\cos x + i \sin x)^n = \cos(n\,x) + i\ \sin(n\,x)$$

Verwenden Sie anschließend diese Identität, um $\sin(3x)$ als einen (polynomialen) Ausdruck von $\sin x$ und $\cos x$ darzustellen.

Hinweis: Formulieren Sie die Identität mit Hilfe der komplexen Exponentialfunktion.

53. Der Strom $I(t)$ in einem elektrischen Schwingkreis, bestehend aus einer Spule und einem Kondensator, erfüllt die Differentialgleichung

$$L\,I''(t) + \frac{1}{C}\,I(t) = 0.$$

Dabei ist $L > 0$ die (konstante) Induktivität der Spule und $C > 0$ die (konstante) Kapazität des Kondensators. Bestimmen Sie die Lösungen mit Hilfe eines Exponentialansatzes $I(t) = e^{\lambda t}$ mit $\lambda \in \mathbb{C}$.

54. Finden Sie jene Lösung $x(t)$ der Differentialgleichung

$$m\,x''(t) = -m\,g - k\,x(t),$$

die die Anfangsbedingungen

$$x(0) = 0 \quad \text{und} \quad x'(0) = 0$$

erfüllt. Dabei sind m, g und k gegebene positive Konstante.