ÜBUNGEN ZU

ANALYSIS FÜR PHYSIKER(INNEN)

für den 23. 11. 2011

---

28. Berechnen Sie für $n \in \mathbb{N}$:
$$\int_0^{2\pi} \cos^n x \; dx$$
Hinweis: Verwenden Sie Beispiel 24.

29. Sei $\alpha \in \mathbb{R}$. Die Funktion $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ist durch
$$f(x) = \begin{cases} |x|^\alpha & \text{für } x > 0 \\ 0 & \text{für } x = 0 \\ -|x|^\alpha & \text{für } x < 0 \end{cases}$$
gegeben. Zeigen Sie für $\alpha \neq -1$ und $x \neq 0$:
$$F'(x) = f(x) \quad \text{mit} \quad F(x) = \frac{1}{\alpha+1}\,|x|^{\alpha+1}.$$

30. Sei $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}$. Berechnen Sie für die Funktion $f(x)$ aus Beispiel 29 das Integral
$$\int_{-1}^{1} f(x) \; dx.$$

31. Sei $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}$. Berechnen Sie für die Funktion $f(x)$ aus Beispiel 29 das Integral
$$\int_{1}^{\infty} f(x) \; dx.$$

32. Was lässt sich im Fall $\alpha = -1$ über die Integrale
$$\int_{-1}^{1} f(x) \; dx \quad \text{und} \quad \int_{1}^{\infty} f(x) \; dx$$
für die Funktion $f(x)$ aus Beispiel 29 aussagen?

33. Bestimmen Sie das unbestimmte Integral
$$\int x \cdot e^{-\frac{x^2}{2}} \; dx$$
und damit das bestimmte Integral
$$\int_a^b x \cdot e^{-\frac{x^2}{2}} \; dx.$$
Welchen Wert besitzt das (uneigentliche) Integral für $a = -\infty$ und $b = \infty$?

34. Zeigen Sie:

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{x^2}{2}}\ dx = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 \cdot e^{-\frac{x^2}{2}}\ dx$$

Hinweis: Partielle Integration für $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{x^2}{2}}\ dx = \int_{-\infty}^{\infty} (x)' \cdot e^{-\frac{x^2}{2}}\ dx$.

35. Seien μ und σ zwei gegebene reelle Zahlen mit $\sigma > 0$. Die Funktion $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ist durch

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\, e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2}$$

gegeben. Zeigen Sie:

$$\int_{-\infty}^{\infty} x f(x)\ dx = \mu \cdot \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\ dx = \mu.$$

Hinweis: Führen Sie durch eine geeignete Substitution das Integral $\int_{-\infty}^{\infty} (x-\mu) f(x)\ dx$ auf das Integral aus Beispiel 33 zurück.

36. Zeigen Sie für die Funktion $f(x)$ aus Beispiel 35:

$$\int_{-\infty}^{\infty} (x-\mu)^2 f(x)\ dx = \sigma^2 \cdot \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\ dx = \sigma^2.$$

Hinweis: Verwenden Sie Beispiel 34.