ÜBUNGEN ZU

ANALYSIS FÜR PHYSIKER(INNEN)

für den 9. 11. 2011

---

10. Seien $f\colon \mathbb{R} \longrightarrow (0,\infty)$ und $g\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ differenzierbar. Zeigen Sie, dass die Funktion $h\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $h(x) = f(x)^{g(x)}$ ebenfalls differenzierbar ist und geben Sie eine Formel für die Ableitung von h an.

11. Zeigen Sie: Sei $I \subset \mathbb{R}$ ein Intervall, $f\colon I \to \mathbb{R}$ sei 3-mal stetig differenzierbar. Sei x_0 ein innerer Punkt von I mit
$$f'(x_0) = f''(x_0) = 0 \quad \text{und} \quad f'''(x_0) > 0.$$
Dann ist x_0 kein lokales Extremum. Lässt sich unter den Bedingungen
$$f'(x_0) = f''(x_0) = 0 \quad \text{und} \quad f'''(x_0) < 0.$$
eine ähnliche Behauptung zeigen?

    Hinweis: Untersuchen Sie das Vorzeichen des Restgliedes $R_2(x)$ in der Nähe von x_0.

12. Zeigen Sie: Sei $I \subset \mathbb{R}$ ein Intervall, $f\colon I \to \mathbb{R}$ sei 4-mal stetig differenzierbar. Sei x_0 ein innerer Punkt von I mit
$$f'(x_0) = f''(x_0) = f'''(x_0) = 0 \quad \text{und} \quad f''''(x_0) > 0.$$
Dann ist x_0 ein lokales Minimum.

    Hinweis: Untersuchen Sie das Vorzeichen des Restgliedes $R_3(x)$ in der Nähe von x_0.

13. Untersuchen Sie, in welchen Teilintervallen die Funktion
$$f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R} \quad \text{mit} \quad f(x) = 5x^4 - 6x^5$$
(streng) monoton wachsend oder fallend ist.

14. Bestimmen Sie alle lokalen Extrema der Funktion
$$f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R} \quad \text{mit} \quad f(x) = 5x^4 - 6x^5.$$
Bestimmen Sie den kleinsten Wert und den größten Wert von $f(x)$ für $x \in [0,1]$.

15. Bestimmen Sie das Taylor-Polynom $T_3(x)$ der Funktion $\tan x$ für $x_0 = 0$.

16. Sei $k \in \mathbb{N}$. Zeigen Sie für das Taylor-Polynom $T_{2k}(x)$ der Funktion $\sin x$ an der Stelle $x_0 = 0$:

$$|\sin x - T_{2k}(x)| \leq \frac{1}{(2k+1)!} \left(\frac{\pi}{2}\right)^{2k+1} \quad \text{für alle } x \in [-\pi/2, \pi/2] \,.$$

Geben Sie ein $k \in \mathbb{N}$ an, sodass der Unterschied zwischen $\sin x$ und $T_{2k}(x)$ für alle $x \in [-\pi/2, \pi/2]$ nicht größer als 0.001 ist.

17. Bestimmen Sie die Taylor-Reihen für die Funktionen $\sinh x$ und $\cosh x$ an der Stelle $x_0 = 0$.

18. Sei $\alpha \in \mathbb{R}$. Bestimmen Sie die Taylor-Reihe für die Funktion $f\colon (0,\infty) \to \mathbb{R}$ mit $f(x) = x^\alpha$ an der Stelle $x_0 = 1$.