

**ÜBUNGEN ZU  
ANALYSIS FÜR PHYSIKER(INNEN)**

für den 19. 10. 2011

---

1. Zeigen Sie für alle  $a \in (0, \infty)$  und alle  $r, s \in \mathbb{R}$ :

$$a^r \cdot a^s = a^{r+s}$$

Hinweis: Zeigen Sie die Behauptung der Reihe nach zunächst für Exponenten aus  $\mathbb{N}$ ,  $\mathbb{Z}$  und  $\mathbb{Q}$ .

2. Zeigen Sie für alle  $x \in \mathbb{R}$ :

$$\cos(3x) = 4 \cos^3(x) - 3 \cos(x)$$

Hinweis: Verwenden Sie das Additionstheorem für  $\cos(3x) = \cos(2x + x)$  und anschließend nochmals für die dabei auftretenden Terme  $\sin(2x) = \sin(x + x)$  und  $\cos(2x) = \cos(x + x)$ .

3. Zeigen Sie für alle  $x \in \mathbb{R}$  aus dem Definitionsbereich von  $\tan$ :

$$\sin(2x) = \frac{2t}{1+t^2} \quad \text{mit } t = \tan x.$$

Hinweis: Verwenden Sie das Additionstheorem für  $\sin(2x) = \sin(x + x)$ .

4. Stellen Sie die Funktion  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , die durch die Funktionsgleichung

$$y = x^2 - x + 1$$

gegeben ist, grafisch dar. Bestimmen Sie einen geeigneten Definitionsbereich  $X \subset \mathbb{R}$  und einen geeigneten Wertebereich  $Y \subset \mathbb{R}$ , sodass  $f: X \rightarrow Y$  bijektiv ist und bestimmen Sie die Umkehrfunktion.

5. Zeigen Sie für alle  $x$  aus dem Definitionsbereich von  $\operatorname{arcoth}$ :

$$\operatorname{arcoth} x = \frac{1}{2} \ln \left( \frac{x+1}{x-1} \right)$$

Hinweis: Stellen Sie die Funktionsgleichung  $y = \coth x$  für  $\coth$  mit Hilfe von Exponentialfunktionen dar und vertauschen Sie für die Umkehrfunktion  $x$  und  $y$ .

6. Zeigen Sie für alle  $x \in \mathbb{R}$ :

$$\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1$$

Hinweis: Verwenden Sie direkt die Definition der Hyperbelfunktionen.

7. Zeigen Sie für alle  $t \in [-1, 1]$ :

$$\sin(\arccos t) = \sqrt{1 - t^2}$$

Hinweis: Verwenden Sie die Identität  $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$  und stellen Sie damit  $\sin x$  mit Hilfe von  $\cos x$  dar. Wählen Sie anschließend  $x = \arccos t$ .

8. Für welche  $t \in \mathbb{R}$  ist die Funktion

$$f(t) = \cos(3 \arccos t)$$

sinnvoll definiert? Zeigen Sie, dass die Funktion  $f(t)$  auf diesem Definitionsbereich mit einem Polynom in  $t$  vom Grad 3 übereinstimmt.

Hinweis zum zweiten Teil: Verwenden Sie Übungsaufgabe 2 für  $x = \arccos t$ .

9. Zeigen Sie für alle  $x \in \mathbb{R}$ :

$$\cosh(3x) = 4 \cosh^3(x) - 3 \cosh(x).$$

Für welche  $t \in \mathbb{R}$  ist die Funktion

$$g(t) = \cosh(3 \operatorname{arcosh} t)$$

sinnvoll definiert? Zeigen Sie, dass die Funktion  $g(t)$  auf diesem Definitionsbereich mit dem Polynom 3. Grades aus Übungsaufgabe 8 übereinstimmt.