Skriptum zur Vorlesung Analysis für Physiker(innen) I und II

Walter Zulehner
Institut für Numerische Mathematik
Johannes Kepler Universität Linz

2011/12

Inhaltsverzeichnis

Einleitung

Die Darstellung der Analysis in dieser Lehrveranstaltung orientiert sich sehr stark an den Büchern

- Harro Heuser, *Lehrbuch der Analysis. Teil 1, 17. Auflage*, Wiesbaden: Vieweg+Teubner, 2009
- Harro Heuser, *Lehrbuch der Analysis. Teil 2, 14. Auflage*, Wiesbaden: Vieweg+Teubner, 2008

und an

- Heinz Engl, *Skriptum Analysis*, überarbeitet und ergänzt von Andreas Neubauer, Institut für Industriemathematik, Johannes Kepler Universität Linz

In den Kapiteln 1 - 8 werden intuitiv einsichtige Argumentationen zugelassen, insbesonders im Zusammenhang mit Winkelfunktionen und dem Begriff Grenzwert, auch wenn sie noch nicht den üblichen Anforderungen an mathematischer Strenge genügen.

Beginnend mit Kapitel 9 werden formal strengere Ansprüche an die Beweisführungen gestellt. Eine Ausnahme bildet der Großteil von Kapitel 13, in dem das kalkülhafte Anwenden der Transformationen im Vordergrund steht.

Kapitel 1

Reelle Funktionen

1.1 Die Menge der reellen Zahlen: $\mathbb{R}$

- Operationen: $x, y \in \mathbb{R}$: $x + y$, $x - y$, $x \cdot y$, $x : y = \dfrac{x}{y}$, falls $y \neq 0$.
- Ordnungsrelationen: $x \leq y$, $x < y$, $x \geq y$, $x > y$.
- Betrag $|x|$ und Abstand $|x - y|$.

Wichtige Teilmengen:

- Die Menge der natürlichen Zahlen: $\mathbb{N} = \{1, 2, \ldots\}$, $\mathbb{N}_0 = \{0, 1, 2, \ldots\}$.
- Die Menge der ganzen Zahlen: $\mathbb{Z} = \{\ldots, -2, -1, 0, 1, 2, \ldots\}$
- Die Menge der rationalen Zahlen: $\mathbb{Q} = \{\frac{m}{n} : m \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N}\}$

1.2 Der mathematische Funktionsbegriff

Jedem Element $x \in X$ wird genau ein Element $y \in Y$ zugeordnet. Schreibweise:

$$\begin{aligned} f : X &\longrightarrow Y \\ x &\mapsto f(x) \end{aligned}$$

oder in Form einer Funktionsgleichung

$$y = f(x).$$

X Definitionsbereich, Y Wertebereich.

- $X, Y \subset \mathbb{R}$: reelle Funktion. Meist ist X ein Intervall ((a, b), $[a, b)$, $(a, b]$, $[a, b]$, $(-\infty, b)$, $(-\infty, b]$, (a, ∞), $[a, \infty)$, $(-\infty, \infty)$) oder eine Vereinigung von Intervallen, und $Y = \mathbb{R}$.

- Grafische Darstellung: Graph einer Funktion
- Bild einer Menge $A \subset X$, Urbild einer Menge $B \subset Y$:

$$f(A) = \{f(x) : x \in A\}, \quad f^{-1}(B) = \{x \in X : f(x) \in B\}.$$

1.3 Operationen für Funktionen

- $f\colon X \longrightarrow Y$, $g\colon X \longrightarrow Y$, $c \in \mathbb{R}$: $f+g$, $c \cdot f$, $f \cdot g$, $\dfrac{f}{g}$:

  $$(f+g)(x) = f(x)+g(x),\ (c \cdot f)(x) = c \cdot f(x),\ (f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x),\ \frac{f}{g}(x) = \frac{f(x)}{g(x)}.$$

- Komposition, Hintereinanderausführung:
  $g\colon X \longrightarrow Y$, $f\colon Y \longrightarrow Z$: $f \circ g\colon X \longrightarrow Z$ mit $(f \circ g)(x) = f(g(x))$.
- $f\colon X \longrightarrow Y$ heißt
  - injektiv, wenn verschiedene Urbilder verschiedene Bilder haben:

    $$x_1 \neq x_2 \Longrightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$$

  - surjektiv, wenn jedes Element $y \in Y$ Bild eines Elements $x \in X$ ist:

    $$Y = f(X)$$

  - bijektiv, wenn die Funktion injektiv und surjektiv ist.

  Falls $f\colon X \longrightarrow Y$ bijektiv ist, gibt es die Umkehrfunktion (inverse Funktion) $f^{-1}\colon Y \longrightarrow X$ mit der Funktionsgleichung

  $$x = f(y).$$

  Es gilt:

  $$(f^{-1} \circ f)(x) = x \quad \text{für alle } x \in X \quad \text{und} \quad (f \circ f^{-1})(y) = y \quad \text{für alle } y \in Y$$

- Jede Funktion $f\colon X \longrightarrow Y$ ist surjektiv, wenn man als Bildbereich $f(X)$ wählt. Die Einschränkung einer Funktion $f\colon X \longrightarrow Y$ auf eine Teilmenge $A \subset X$ bezeichnet man mit $f\big|_A$.

1.4 Beispiele einfacher Funktionen

- Potenzfunktionen mit ganzzahligen Exponenten:

  Definition 1.1 (siehe Abbildung 1.1 und Abbildung 1.2)**.** *Sei $n \in \mathbb{N}$:*

  – $f(x) = \underbrace{x \cdot x \cdot \ldots \cdot x}_{n \text{ mal}} = x^n, \; X = \mathbb{R}$

  – $f(x) = x^{-n} = \frac{1}{x^n}, \; X = \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

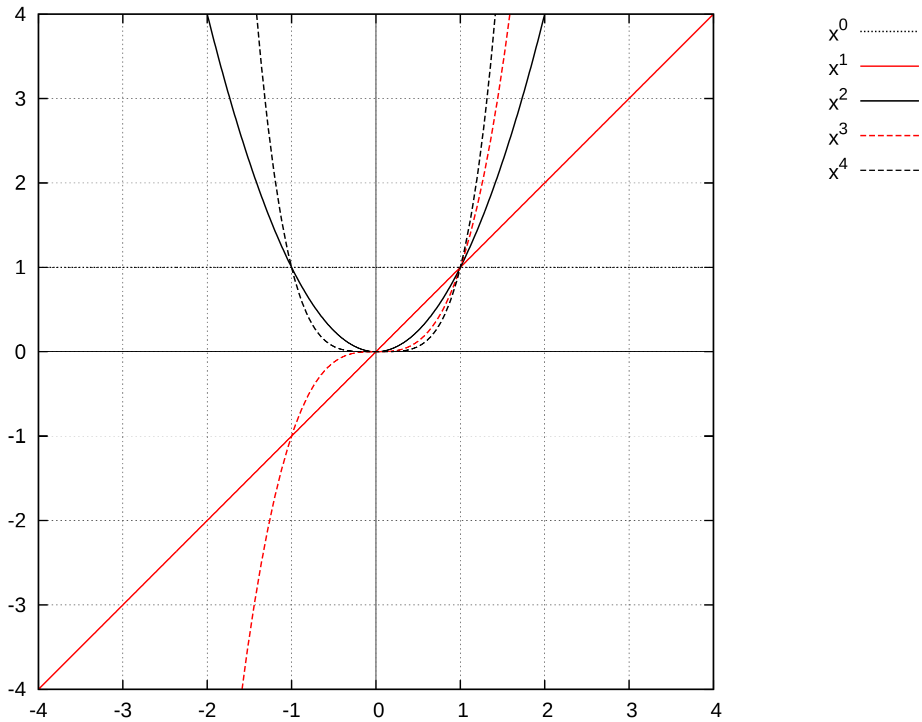

Abbildung 1.1: Potenzfunktionen für positive ganzzahlige Exponenten

Rechenregeln:

Satz 1.1. *Für alle $x, y \in \mathbb{R}$ und $m, n \in \mathbb{N}$ gilt:*

$$\boxed{x^m \cdot x^n = x^{m+n}} \qquad \boxed{(x^m)^n = x^{m \cdot n}} \qquad \boxed{(x \cdot y)^n = x^n \cdot y^n}$$

Beweis für die dritte Rechenregel. Für $n \in \mathbb{N}$ gilt:

$$\begin{aligned}(x \cdot y)^n &= \underbrace{(x \cdot y) \cdot (x \cdot y) \cdot \ldots \cdot (x \cdot y)}_{n \text{ mal}} \\ &= \underbrace{x \cdot x \cdot \ldots \cdot x}_{n \text{ mal}} \cdot \underbrace{y \cdot y \cdot \ldots \cdot y}_{n \text{ mal}} = x^n \cdot y^n\end{aligned}$$

Analog lassen sich die beiden anderen Rechenregeln zeigen. □

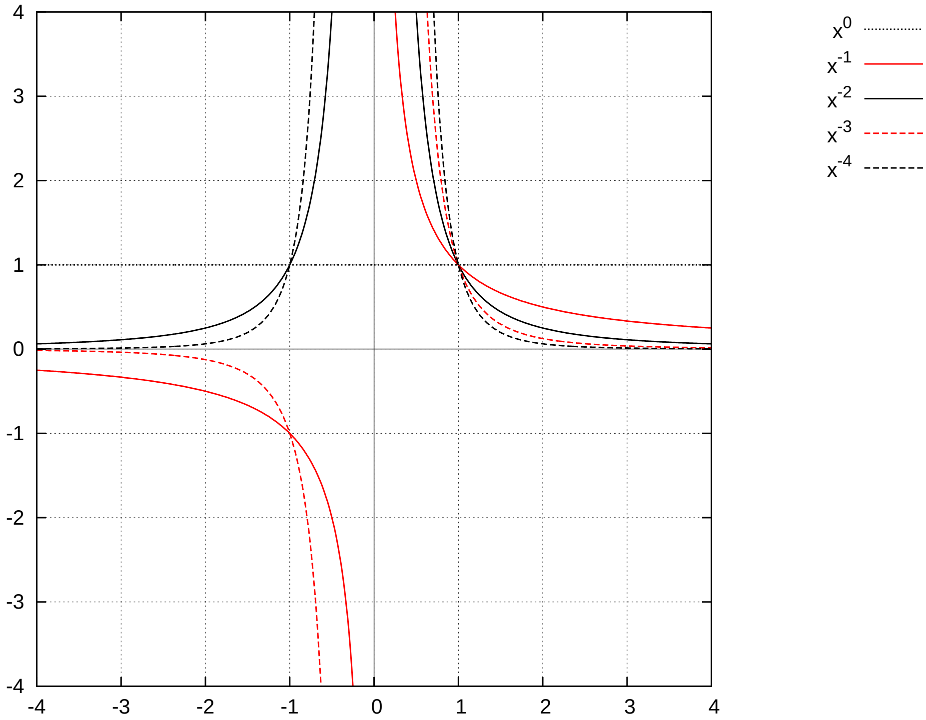

Abbildung 1.2: Potenzfunktionen für negative ganzzahlige Exponenten

Satz 1.2. *Für alle* $x, y \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ *und* $m, n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ *gilt:*

$$\boxed{(x^m)^n = x^{m \cdot n}} \qquad \boxed{(x \cdot y)^n = x^n \cdot y^n}$$

und, falls zusätzlich $m + n \neq 0$*:*

$$\boxed{x^m \cdot x^n = x^{m+n}}$$

Beweis für die zweite Rechenregel. Für $n \in \mathbb{N}$ gilt:

$$(x \cdot y)^{-n} = \frac{1}{(x \cdot y)^n} = \frac{1}{x^n \cdot y^n} = \frac{1}{x^n} \cdot \frac{1}{y^n} = x^{-n} \cdot y^{-n}.$$

Analog lassen sich die beiden anderen Rechenregeln zeigen. $\square$

Üblicherweise vereinbart man: $x^0 = 1$ für $x \neq 0$. Dann gelten die Rechenregeln aus Satz 1.2 für alle $m, n \in \mathbb{Z}$.

Warnung:

$$(x + y)^n \neq x^n + y^n \quad \text{im Allgemeinen,}$$

sondern

Satz 1.3 (Binomischer Lehrsatz)**.** *Für $n \in \mathbb{N}$ gilt*

$$\boxed{(x+y)^n = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} x^{n-i} y^i}$$

Dabei bezeichnet $\binom{n}{i}$ den Binomialkoeffizient:

$$\binom{n}{i} = \frac{\overbrace{n \cdot (n-1) \cdot \ldots \cdot (n-i+1)}^{i \text{ abnehmende Faktoren}}}{\underbrace{1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot i}_{i \text{ zunehmende Faktoren}}}$$

- Wurzelfunktion: Umkehrfunktionen von Potenzfunktionen:

  Definition 1.2.

  – *$f(x) = \sqrt{x}$ ist die Umkehrfunktion von $g\colon [0,\infty) \longrightarrow [0,\infty)$, $g(x) = x^2$.*

  – *Sei $n \in \mathbb{N}$. $f(x) = \sqrt[n]{x} = x^{\frac{1}{n}}$ ist die Umkehrfunktion von $g\colon [0,\infty) \longrightarrow [0,\infty)$, $g(x) = x^n$.*

  Man beachte:

  $$\sqrt[n]{x^n} = x \quad \text{und} \quad (\sqrt[n]{x})^n = x.$$

  Rechenregeln:

  Satz 1.4. *Für alle $x, y \in [0,\infty)$ und $n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ gilt:*

  $$\boxed{\left(x^{\frac{1}{m}}\right)^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{\sqrt[m]{x}} = \sqrt[m \cdot n]{x} = x^{\frac{1}{m \cdot n}} = x^{\frac{1}{m} \cdot \frac{1}{n}}}$$

  und

  $$\boxed{(x \cdot y)^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{x \cdot y} = \sqrt[n]{x} \cdot \sqrt[n]{y} = x^{\frac{1}{n}} \cdot y^{\frac{1}{n}}}$$

  Beweis der zweiten Rechenregel. Es gilt

  $$\left(\sqrt[n]{x} \cdot \sqrt[n]{y}\right)^n = \left(\sqrt[n]{x}\right)^n \cdot (\sqrt[n]{y})^n = x \cdot y$$

  Analog lässt sich die erste Rechenregel zeigen. □

- Potenzfunktionen mit rationalen und reellen Exponenten:

  Definition 1.3. *Sei $q \in \mathbb{Q}$, also $q = \frac{m}{n}$ mit $m \in \mathbb{Z}$ und $n \in \mathbb{N}$.*

  $$f(x) = x^q = \sqrt[n]{x^m} \quad \textit{für } x \in (0,\infty).$$

Aus den obigen Rechenregeln erhält man leicht:

Satz 1.5. *Für alle $x, y \in (0, \infty)$ und $p, q \in \mathbb{Q}$ gilt:*

$$\boxed{x^p \cdot x^q = x^{p+q}} \qquad \boxed{(x^p)^q = x^{p \cdot q}} \qquad \boxed{(x \cdot y)^q = x^q \cdot y^q}$$

Beweis für die dritte Rechenregel. Für $q = \frac{m}{n}$ mit $m \in \mathbb{Z}$ und $n \in \mathbb{N}$ gilt:

$$(x \cdot y)^q = \sqrt[n]{(x \cdot y)^m} = \sqrt[n]{x^m \cdot y^m} = \sqrt[n]{x^m} \cdot \sqrt[n]{y^m} = x^q \cdot y^q.$$

Analog zeigt man die beiden anderen Rechenregeln. □

$r \in \mathbb{R}$ lässt sich beliebig genau durch rationale Zahlen annähern:

$$\lim_{\substack{q \to r \\ q \in \mathbb{Q}}} q = r$$

Dann lässt sich für jeden Exponenten $r \in \mathbb{R}$ eine Potenzfunktion definieren:

Definition 1.4 (siehe Abbildung 1.3)**.**

$$f(x) = \lim_{\substack{q \to r \\ q \in \mathbb{Q}}} x^q = x^r$$

Es folgen leicht die Rechenregeln:

Satz 1.6. *Für alle $x, y \in (0, \infty)$ und alle $r, s \in \mathbb{R}$ gilt:*

$$\boxed{x^r \cdot x^s = x^{r+s}} \qquad \boxed{(x^r)^s = x^{r \cdot s}} \qquad \boxed{(x \cdot y)^r = x^r \cdot y^r}$$

- Exponentialfunktion:

  Definition 1.5 (siehe Abbildung 1.4)**.** *$f(x) = a^x$ mit $a > 0$ (Basis) und $x \in \mathbb{R}$.*

  Wichtige Spezialfälle:

  $$a = 10, \quad a = e = \lim_{n \to \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \approx 2,71828..., \quad a = 2.$$

  Rechenregeln:

  Satz 1.7. *Sei $a \in (0, \infty)$. Dann gilt für alle $x, y \in \mathbb{R}$:*

  $$\boxed{a^{x+y} = a^x \cdot a^y} \quad \text{und} \quad \boxed{(a^x)^y = a^{x \cdot y}}$$

- Logarithmusfunktionen:

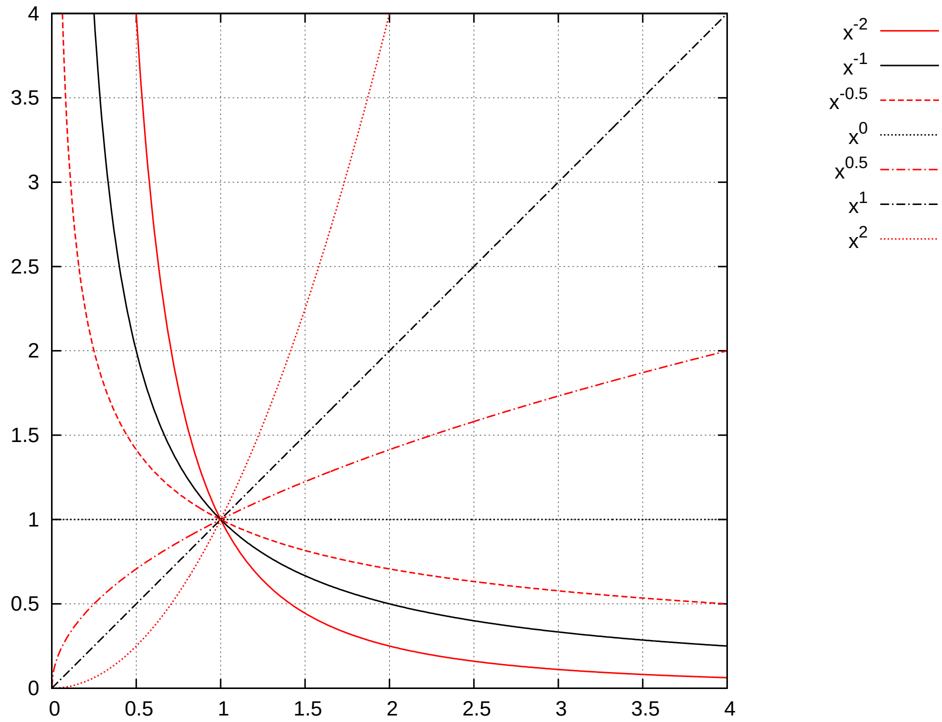

Abbildung 1.3: Potenzfunktionen für reelle Exponenten

Definition 1.6 (siehe Abbildung 1.5). *$f(x) = \log_a x$ ($x > 0$) ist die Umkehrfunktion der Exponentialfunktion a^x.*

Spezialfälle: $\log_{10} x = \lg x$, $\log_2 x = \operatorname{ld} x$, $\log_e x = \ln x$.

Man beachte

$$a^{\log_a x} = x, \quad \log_a a^x = x.$$

Rechenregeln

Satz 1.8. *Sei $a \in (0, \infty)$. Für alle $x, y \in (0, \infty)$ gilt:*

$$\boxed{\log_a(x \cdot y) = \log_a x + \log_a y} \quad \textit{und} \quad \boxed{\log_a(x^y) = y \cdot \log_a x}$$

Beweis für die erste Rechenregel. Es gilt

$$a^{\log_a x + \log_a y} = a^{\log_a x} \cdot a^{\log_a y} = x \cdot y$$

Der Beweis der zweiten Rechenregel erfolgt analog. □

- Trigonometrische Funktionen (Winkelfunktionen):

Definition 1.7 (siehe Abbildung 1.6).

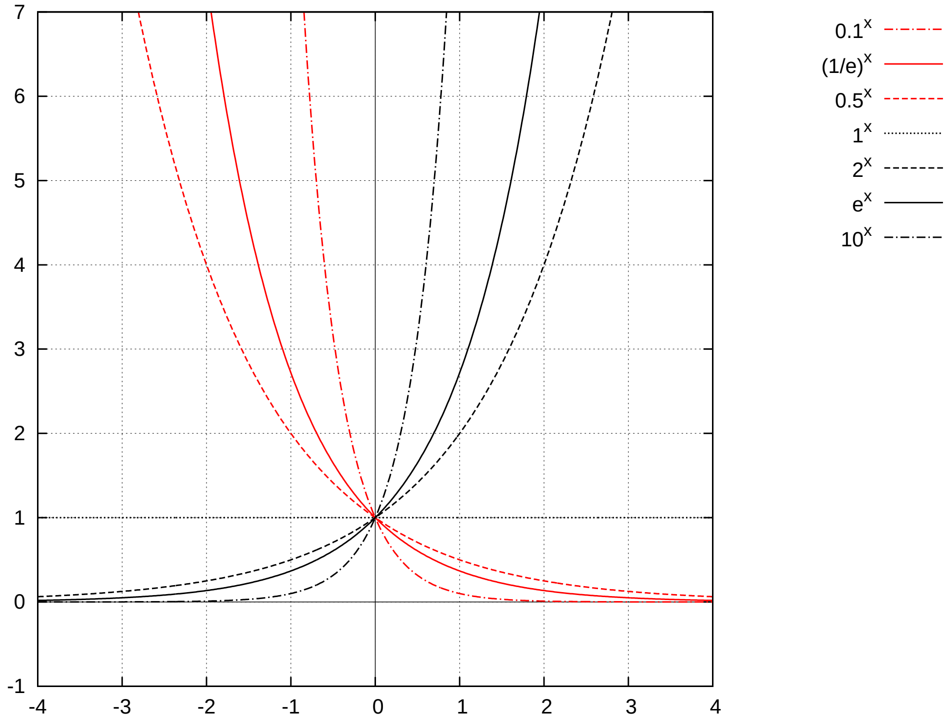

Abbildung 1.4: Exponentialfunktionen

- $\sin x, \cos x$: *geometrische Definition mit Hilfe des Einheitskreises*
- $\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$, $\cot x = \frac{1}{\tan x} = \frac{\cos x}{\sin x}$.

Wichtige Eigenschaften:

- $\cos x = \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$, $\sin x = \cos\left(x - \frac{\pi}{2}\right)$.
- Periodische Funktionen:
  $\sin(x + 2\pi) = \sin x$, $\cos(x + 2\pi) = \cos x$
  $\tan(x + \pi) = \tan x$, $\cot(x + \pi) = \cot x$.
- Ungerade Funktionen:
  $\sin(-x) = -\sin x$, $\tan(-x) = -\tan x$, $\cot(-x) = -\cot x$
  Gerade Funktion:
  $\cos(-x) = \cos x$
- Nullstellen von sin: $k \cdot \pi$ für $k \in \mathbb{Z}$.
  Nullstellen von cos: $\frac{\pi}{2} + k \cdot \pi$ für $k \in \mathbb{Z}$.
  Nullstellen von tan: $k \cdot \pi$ für $k \in \mathbb{Z}$.
  Pole von tan: $\frac{\pi}{2} + k \cdot \pi$ für $k \in \mathbb{Z}$.
  Nullstellen von cot: $\frac{\pi}{2} + k \cdot \pi$ für $k \in \mathbb{Z}$.
  Pole von cot: $k \cdot \pi$ für $k \in \mathbb{Z}$.

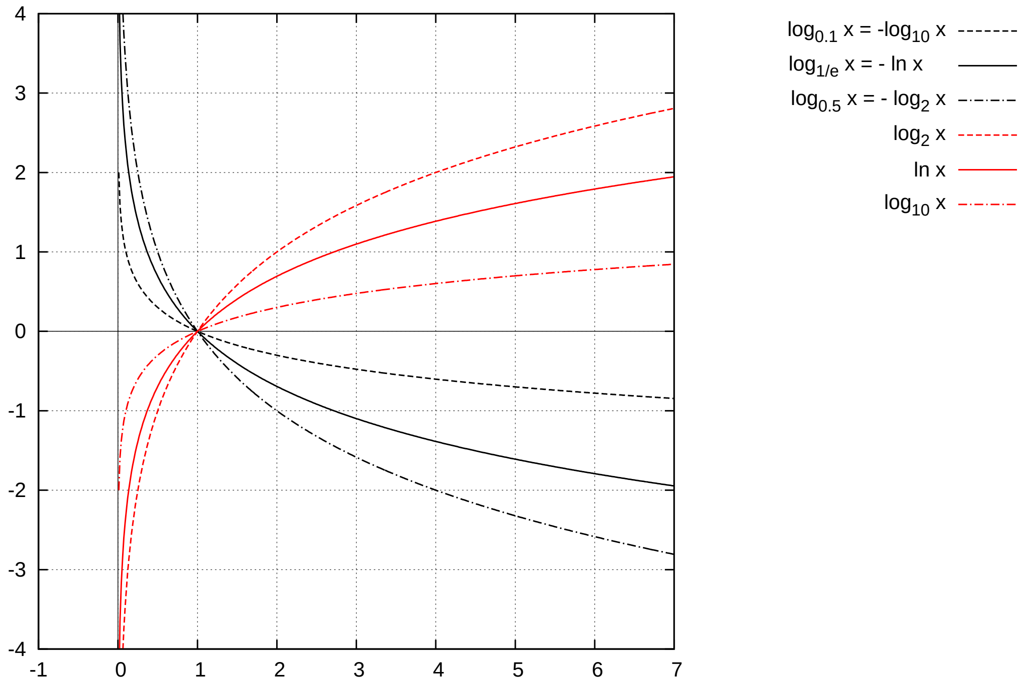

Abbildung 1.5: Logarithmusfunktionen

Spezielle Werte:

$$\sin\frac{\pi}{6} = \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{1}}{2}, \quad \sin\frac{\pi}{4} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}, \quad \sin\frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Rechenregeln:

Satz 1.9. *Für alle $x, y \in \mathbb{R}$ gilt:*

$$\boxed{\sin^2 x + \cos^2 x = 1}$$

und (Additionstheoreme):

$$\boxed{\begin{aligned} \sin(x+y) &= \sin x \cdot \cos y + \cos x \cdot \sin y \\ \cos(x+y) &= \cos x \cdot \cos y - \sin x \cdot \sin y \end{aligned}}$$

geometrische Beweise.

- Arkusfunktionen: Umkehrfunktionen der trigonometrischen Funktion:

  Hauptwerte:

  Definition 1.8 (siehe Abbildung 1.7)**.**

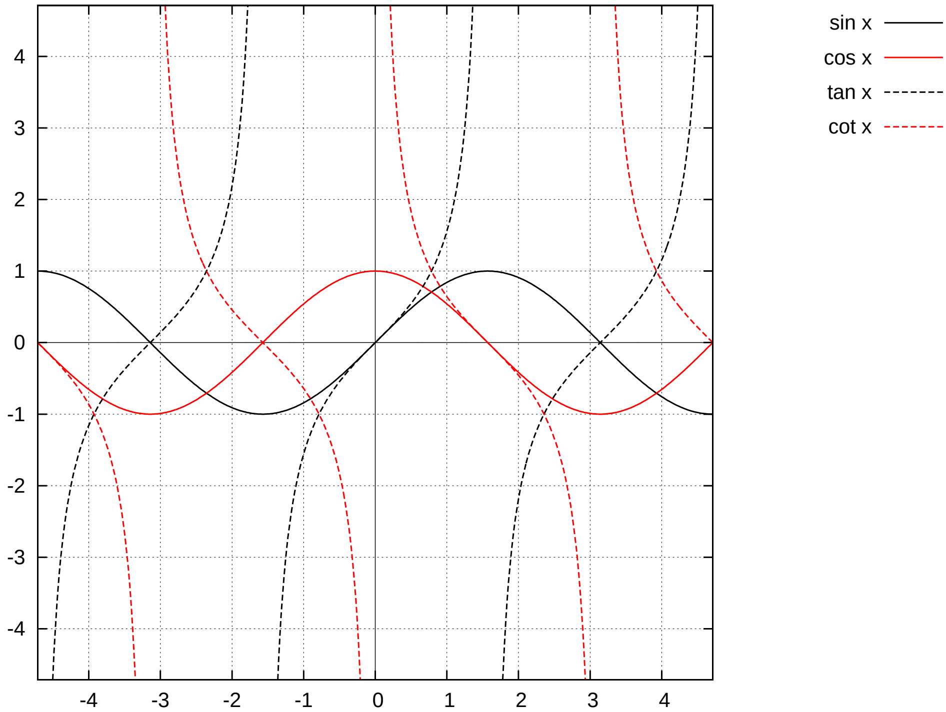

Abbildung 1.6: Winkelfunktionen

- $\arcsin\colon [-1,1] \longrightarrow \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ *ist die Umkehrfunktion von* $\sin\colon \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \longrightarrow [-1,1]$.
- $\arccos\colon [-1,1] \longrightarrow [0,\pi]$ *ist die Umkehrfunktion von* $\cos\colon [0,\pi] \longrightarrow [-1,1]$.
- $\arctan\colon (-\infty,\infty) \longrightarrow \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ *ist die Umkehrfunktion von* $\tan\colon \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \longrightarrow (-\infty,\infty)$.
- $\operatorname{arccot}\colon (-\infty,\infty) \longrightarrow (0,\pi)$ *ist die Umkehrfunktion von* $\cot\colon (0,\pi) \longrightarrow (-\infty,\infty)$.

- Hyperbelfunktionen: sinh, cosh, tanh, coth.

  Definition 1.9 (siehe Abbildung 1.8)**.**

$$\sinh x = \frac{1}{2}\left(e^{x} - e^{-x}\right), \quad \cosh x = \frac{1}{2}\left(e^{x} + e^{-x}\right),$$

$$\tanh x = \frac{\sinh x}{\cosh x}, \quad \coth x = \frac{\cosh x}{\sinh x} = \frac{1}{\tanh x}$$

  Rechenregel:

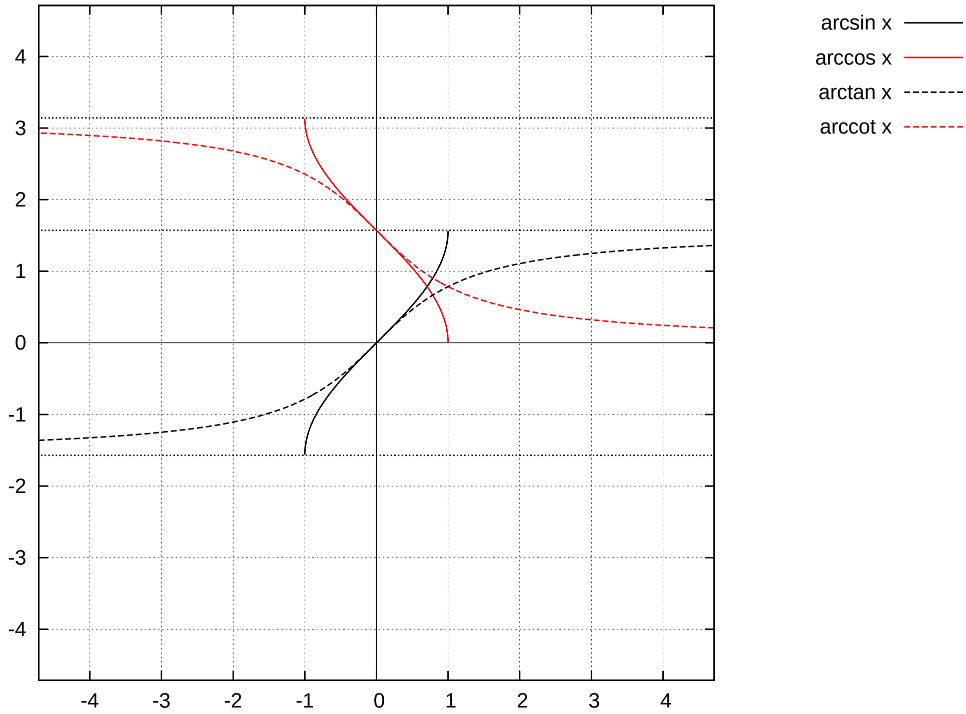

Abbildung 1.7: Arcusfunktionen

Satz 1.10. *Für alle $x, y \in \mathbb{R}$ gilt:*

$$\boxed{\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1}$$

und (Additionstheoreme):

$$\boxed{\begin{aligned} \sinh(x+y) &= \sinh x \cdot \cosh y + \cosh x \cdot \sinh y \\ \cosh(x+y) &= \cosh x \cdot \cosh y + \sinh x \cdot \sinh y \end{aligned}}$$

- Areafunktionen: Umkehrfunktionen von Hyperbelfunktionen

  Definition 1.10 (siehe Abbildung 1.9)**.**

  - $\operatorname{arsinh}\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ *ist die Umkehrfunktion von* $\sinh\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$.
  - $\operatorname{arcosh}\colon [1, \infty) \longrightarrow [0, \infty)$ *ist die Umkehrfunktion von* $\cosh\colon [0, \infty) \longrightarrow [1, \infty)$.
  - $\operatorname{artanh}\colon (-1, 1) \longrightarrow \mathbb{R}$ *ist die Umkehrfunktion von* $\tanh\colon \mathbb{R} \longrightarrow (-1, 1)$.
  - $\operatorname{arcoth}\colon (-\infty, -1) \cup (1, \infty) \longrightarrow \mathbb{R}$ *ist die Umkehrfunktion von* $\coth\colon \mathbb{R} \longrightarrow (-\infty, -1) \cup (1, \infty)$.

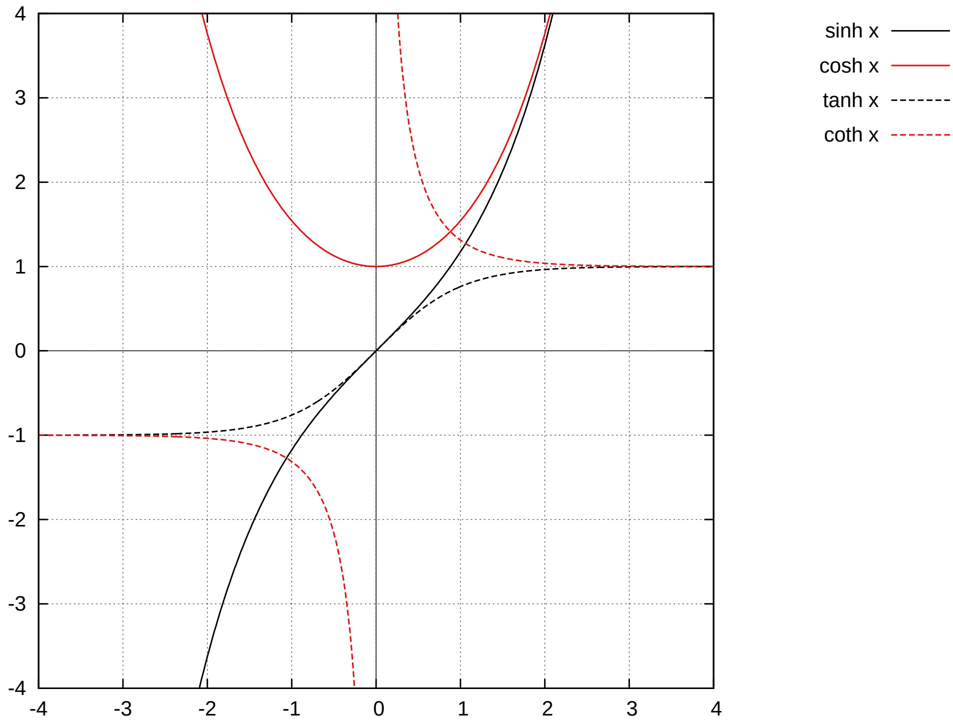

Abbildung 1.8: Hyperbelfunktionen

Rechenregeln

Satz 1.11. *Im jeweiligen Definitionsbereich gilt:*

$$\boxed{\operatorname{arsinh} x = \ln\left(x + \sqrt{x^2+1}\right)} \quad \textit{und} \quad \boxed{\operatorname{arcosh} x = \ln\left(x + \sqrt{x^2-1}\right)}$$

und

$$\boxed{\operatorname{artanh} x = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)} \quad \textit{und} \quad \boxed{\operatorname{arcoth} x = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{x+1}{x-1}\right)}$$

Beweis. Funktionsgleichung von sinh:

$$y = \frac{1}{2}\left(e^x - e^{-x}\right)$$

Funktionsgleichung der Umkehrfunktion:

$$x = \frac{1}{2}\left(e^y - e^{-y}\right)$$

Also gilt:

$$\left(e^y\right)^2 - 2x\left(e^y\right) - 1 = 0$$

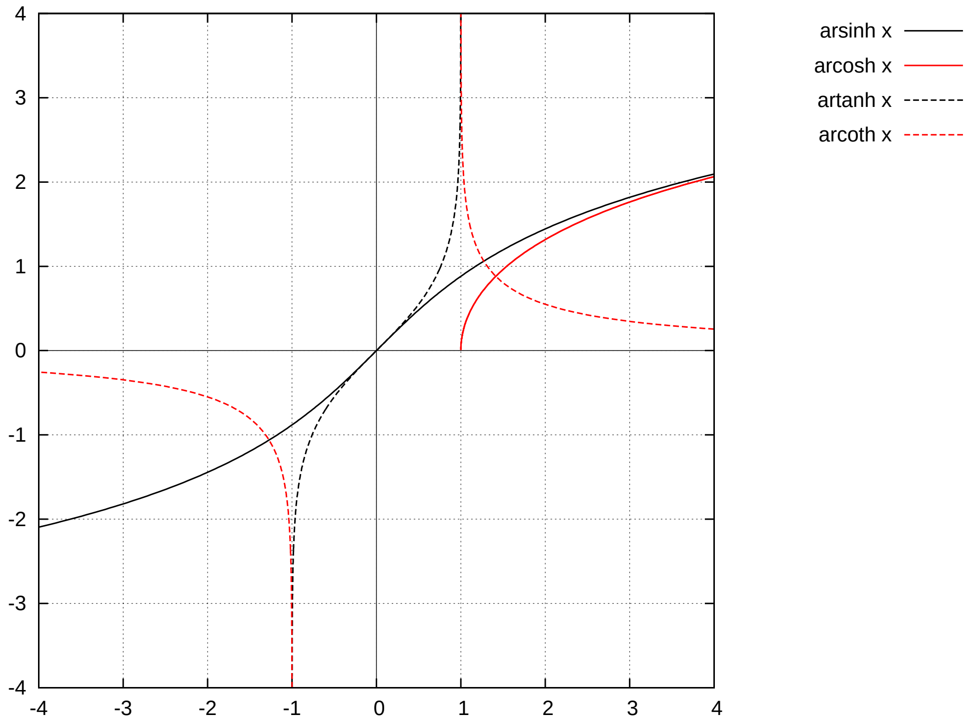

Abbildung 1.9: Areafunktionen

Daher folgt:

$$e^y = x + \sqrt{x^2 + 1}$$

Also

$$y = \ln\left(x + \sqrt{x^2 + 1}\right)$$

Ähnlich beweist man die anderen Rechenregeln. □

1.5 Beispiele zusammengesetzter Funktionen

- Polynomfunktionen:

$$f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n = \sum_{k=0}^{n} a_k\, x^k$$

$a_n \neq 0$: n Grad

- Rationale Funktionen:

$$f(x) = \frac{p(x)}{q(x)} \quad \text{mit Polynomfunktionen} \quad p(x), q(x)$$

- $$f(x) = A\cos(\omega x - \varphi).$$

- $$f(x) = x^x = \left(e^{\ln x}\right)^x = e^{x\cdot\ln(x)}.$$

1.6 Stetige Funktionen

Definition 1.11. *Sei $x_0 \in X$ ein nicht-isolierter Punkt. Dann heißt $f\colon X \longrightarrow Y$ stetig im Punkt x_0, wenn*

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0).$$

$f\colon X \longrightarrow Y$ heißt stetig auf X, wenn f in jedem Punkt von X stetig ist.

Satz 1.12. *f, g stetig: $f+g$, $c\cdot f$, $f\cdot g$, $\dfrac{f}{g}$ (in Punkten mit $g(x)\neq 0$), $f\circ g$ stetig.*

Satz 1.13. *Die Potenzfunktionen, Exponentialfunktionen, Winkelfunktionen, Arkusfunktionen, Hyperbelfunktionen, Areafunktionen sind auf dem jeweils geeigneten Definitionsbereich stetig.*

Kapitel 2

Differentialrechnung in $\mathbb{R}$

2.1 Ableitung

Definition 2.1. *Sei $f\colon X \longrightarrow \mathbb{R}$ eine reelle Funktion und $x_0 \in X$ ein nicht-isolierter Punkt. Dann heißt f im Punkt x_0 differenzierbar, falls der Grenzwert*

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

existiert. In diesem Fall wird der Grenzwert mit $f'(x_0)$ bezeichnet und heißt Ableitung von f in x_0.

$f\colon X \longrightarrow \mathbb{R}$ heißt differenzierbar in X, wenn f in jedem Punkt von X differenzierbar ist. Die reelle Funktion $f'\colon X \longrightarrow \mathbb{R}$, $x \mapsto f'(x)$ heißt Ableitung von f.

- Schreibweisen: $f'(x_0) = \frac{df}{dx}(x_0)$. Wenn die Funktion von der Zeit t abhängt, also $t \mapsto f(t)$, dann wird die Ableitung in einem Punkt t_0 auch mit $\dot{f}(t_0)$ bezeichnet.
- Der Ausdruck $\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ heißt Differenzenquotient.
- Alternative Schreibweise: Mit $x = x_0 + h$ erhält man
$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} \quad \text{und} \quad f'(x_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}.$$
- Für
$$r(h) = f(x_0 + h) - f(x_0) - f'(x_0) \cdot h$$
gilt offensichtlich:
$$f(x_0 + h) = f(x_0) + f'(x_0) \cdot h + r(h)$$
mit
$$\lim_{h \to 0} \frac{r(h)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} - f'(x_0) = 0$$

Die Funktion $x \mapsto f(x_0 + h) = f(x)$ unterscheidet sich also von der Funktion $x \mapsto f(x_0) + f'(x_0)h = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$ in einer Umgebung von x_0 nur um einen Term $r(h)$ (Restglied), der schneller klein wird als h klein wird.

Der Graph der (linearen) Funktion $x \mapsto f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)$, also alle Punkte (x, y) mit

$$y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0),$$

ist die Tangente an den Graphen von f im Punkt (x_0, y_0) mit $y_0 = f(x_0)$.

- Physikalische Interpretation: Geschwindigkeit.

Es gilt

Satz 2.1. *Eine Funktion $f \colon X \longrightarrow \mathbb{R}$ ist genau dann im Punkt $x_0 \in X$ differenzierbar, wenn es eine Zahl $a \in \mathbb{R}$ gibt, sodass*

$$f(x_0 + h) = f(x_0) + a \cdot h + r(h) \quad \textit{mit} \quad \lim_{h \to 0} \frac{r(h)}{h} = 0. \tag{2.1}$$

In diesem Fall gilt: $a = f'(x_0)$.

Beweis. Wenn f im Punkt x_0 differenzier ist, gilt (2.1) mit $a = f'(x_0)$, wie vorhin gezeigt. Umgekehrt, wenn (2.1), dann folgt

$$0 = \lim_{h \to 0} \frac{r(h)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0) - a \cdot h}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} - a,$$

d.h.

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = a.$$

Also existiert der Grenzwert des Differenzenquotienten und $a = f'(x_0)$. □

2.2 Differentiationsregeln

Satz 2.2 (Summen-, Produkt- und Quotientenregel)**.** *Seien $f \colon X \longrightarrow \mathbb{R}$, $g \colon X \longrightarrow \mathbb{R}$ reelle Funktionen und $x_0 \in X$ ein nicht-isolierter Punkt. Angenommen, f und g sind in x_0 differenzierbar. Dann gilt: $f + g$ und $f \cdot g$ sind ebenfalls im Punkt x_0 differenzierbar und es gilt:*

$$(f + g)'(x_0) = f'(x_0) + g'(x_0)$$
$$(f \cdot g)'(x_0) = f'(x_0) \cdot g(x_0) + f(x_0) \cdot g'(x_0)$$

Falls zusätzlich $g(x_0) \neq 0$, dann ist auch $\frac{f}{g}$ im Punkt x_0 differenzierbar und es gilt:

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(x_0) = \frac{f'(x_0) \cdot g(x_0) - f(x_0) \cdot g'(x_0)}{g(x_0)^2}$$

Beweis der Produktregel.

$$
\begin{aligned}
&\frac{(f\cdot g)(x_0+h)-(f\cdot g)(x_0)}{h}\\
&\quad=\frac{f(x_0+h)\cdot g(x_0+h)-f(x_0)\cdot g(x_0)}{h}\\
&\quad=\frac{f(x_0+h)\cdot g(x_0+h)-f(x_0+h)\cdot g(x_0)+f(x_0+h)\cdot g(x_0)-f(x_0)\cdot g(x_0)}{h}\\
&\quad=f(x_0+h)\cdot\frac{g(x_0+h)-g(x_0)}{h}+\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}\cdot g(x_0)
\end{aligned}
$$

Also

$$
\begin{aligned}
(f\cdot g)'(x_0)&=\lim_{h\to 0}\frac{(f\cdot g)(x_0+h)-(f\cdot g)(x_0)}{h}\\
&=\underbrace{\lim_{h\to 0}f(x_0+h)}_{f(x_0)}\cdot\underbrace{\lim_{h\to 0}\frac{g(x_0+h)-g(x_0)}{h}}_{g'(x_0)}+\underbrace{\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}}_{f'(x_0)}\cdot g(x_0)
\end{aligned}
$$

□

Im Beweis wurde offensichtlich folgende Aussage verwendet:

Satz 2.3. *Sei $f\colon X\longrightarrow\mathbb{R}$ in einem nicht-isolierten Punkt $x_0\in X$ differenzierbar. Dann ist f in x_0 stetig.*

Beweis. Zu zeigen:

$$\lim_{x\to x_0}f(x)=f(x_0),\quad \text{d.h.}\quad f(x)-f(x_0)\to 0\quad \text{für}\quad x\to x_0.$$

Es gilt für $x\neq x_0$:

$$f(x)-f(x_0)=\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\cdot(x-x_0)\to f'(x_0)\cdot 0=0$$

□

Satz 2.4 (Kettenregel)**.** *Seien $g\colon X\longrightarrow\mathbb{R}$ und $f\colon Y\longrightarrow\mathbb{R}$ reelle Funktionen mit $g(X)\subset Y$. Seien $x_0\in X$ und $g(x_0)\in Y$ nicht-isolierte Punkte. Angenommen, g ist in x_0 und f ist in $g(x_0)$ differenzierbar. Dann gilt: $f\circ g$ ist im Punkt x_0 differenzierbar und es gilt:*

$$(f\circ g)'(x_0)=f'(g(x_0))\cdot g'(x_0).$$

Beweis.

$$
\begin{aligned}
&\frac{(f\circ g)(x_0+h)-(f\circ g)(x_0)}{h}\\
&\quad=\frac{f(g(x_0+h))-f(g(x_0))}{h}=\frac{f(g(x_0)+k)-f(g(x_0))}{h}
\end{aligned}
$$

mit $k = g'(x_0) \cdot h + r_g(h)$.

Es gilt

$$f(g(x_0) + k) = f(g(x_0)) + f'(g(x_0)) \cdot k + r_f(k).$$

Also

$$\begin{aligned}\frac{(f \circ g)(x_0 + h) - (f \circ g)(x_0)}{h} &= \frac{f'(g(x_0)) \cdot k + r_f(k)}{h} \\ &= (f'(g(x_0)) + \rho_f(k)) \cdot \frac{k}{h} = (f'(g(x_0)) + \rho_f(k)) \cdot (g'(x_0) + \rho_g(h))\end{aligned}$$

mit

$$\rho_f(k) = \begin{cases} \frac{r_f(k)}{k} & \text{für } k \neq 0 \\ 0 & \text{für } k = 0 \end{cases} \quad \text{und} \quad \rho_g(h) = \begin{cases} \frac{r_g(h)}{h} & \text{für } h \neq 0 \\ 0 & \text{für } h = 0 \end{cases}$$

Daher folgt:

$$\begin{aligned}(f \circ g)'(x_0) &= \lim_{h \to 0} \frac{(f \circ g)(x_0 + h) - (f \circ g)(x_0)}{h} \\ &= \lim_{h \to 0} (f'(g(x_0)) + \rho_f(k)) \cdot (g'(x_0) + \rho_g(h)) \\ &= \lim_{h \to 0} (f'(g(x_0)) + \rho_f(k)) \cdot \lim_{h \to 0} (g'(x_0) + \rho_g(h)) = f'(g(x_0)) \cdot g'(x_0).\end{aligned}$$

□

Satz 2.5 (Ableitung der Umkehrfunktion)**.** *Sei $f\colon X \longrightarrow Y$ eine bijektive reelle Funktion, $x_0 \in X$ ein nicht-isolierter Punkt. Angenommen, f ist in x_0 differenzierbar, $f'(x_0) \neq 0$ und f^{-1} ist im Punkt $y_0 = f(x_0)$ stetig. Dann folgt: f^{-1} ist im Punkt $y_0 = f(x_0)$ differenzierbar und es gilt:*

$$(f^{-1})'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)} = \frac{1}{f'(f^{-1}(y_0))} = \frac{1}{(f' \circ f^{-1})(y_0)}.$$

Beweis.

$$\frac{f^{-1}(y) - f^{-1}(y_0)}{y - y_0} = \frac{1}{\frac{y - y_0}{f^{-1}(y) - f^{-1}(y_0)}} = \frac{1}{\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}}$$

mit $y = f(x)$. Falls $y \to y_0$ folgt $x = f^{-1}(y) \to f^{-1}(y_0) = x_0$ wegen der Stetigkeit von f^{-1}. Daher gilt:

$$\lim_{y \to y_0} \frac{f^{-1}(y) - f^{-1}(y_0)}{y - y_0} = \frac{1}{\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}} = \frac{1}{f'(x_0)}$$

□

2.3 Die Ableitung spezieller Funktionen

- Exponentialfunktionen: $f(x) = e^x$

$$\frac{e^{x+h} - e^x}{h} = e^x \cdot \frac{e^h - 1}{h}$$

Es gilt (geometrisch einsichtig, Beweis später):

$$e^x \geq 1 + x \quad \text{für alle } x \in \mathbb{R}$$

Daraus folgt:

$$e^x \geq 1 + x \quad \text{und} \quad e^{-x} \geq 1 - x \quad \text{für alle } x > 0,$$

woraus man folgende Abschätzung erhält:

$$1 \leq \frac{e^x - 1}{x} \leq e^x \quad \text{für alle } x > 0.$$

Wegen

$$\frac{e^h - 1}{h} = \begin{cases} \dfrac{e^{|h|} - 1}{|h|} & \text{für } h > 0 \\ \dfrac{e^{-|h|} - 1}{-|h|} = e^{-|h|}\dfrac{e^{|h|} - 1}{|h|} & \text{für } h < 0 \end{cases}$$

folgt daraus:

$$e^{-|h|} \leq \frac{e^h - 1}{h} \leq e^{|h|}$$

Somit gilt:

$$1 = \lim_{h \to 0} e^{-|h|} \leq \lim_{h \to 0} \frac{e^h - 1}{h} \leq \lim_{h \to 0} e^{|h|} = 1,$$

also

$$\lim_{h \to 0} \frac{e^h - 1}{h} = 1,$$

Daher folgt:

$$\boxed{(e^x)'} = \lim_{h \to 0} e^x \cdot \frac{e^h - 1}{h} \boxed{= e^x}$$

Exponentialfunktionen: $f(x) = a^x = \left(e^{\ln a}\right)^x = e^{x \cdot \ln(a)}$.

Mit der Kettenregel folgt:

$$\boxed{(a^x)'} = e^{x \cdot \ln(a)} \cdot \ln(a) \boxed{= \ln a \cdot a^x}.$$

- Logarithmusfunktionen: $\log_a x = f^{-1}(x)$ mit $f(x) = a^x$.

Daher folgt:

$$\boxed{(\log_a x)'} = \frac{1}{\ln a \cdot a^{\log_a x}} \boxed{= \frac{1}{\ln a \cdot x}}$$

$a = e$:

$$(\ln x)' = \frac{1}{x}$$

- Potenzfunktionen: $x^r = e^{r \cdot \ln x}$

$$\boxed{(x^r)'} = e^{r \cdot \ln x} \cdot \frac{r}{x} \boxed{= r \cdot x^{r-1}}$$

- Winkelfunktionen

$$\begin{aligned}\frac{\sin(x_0 + h) - \sin(x_0)}{h} &= \frac{\sin\left(x_0 + \frac{h}{2} + \frac{h}{2}\right) - \sin\left(x_0 + \frac{h}{2} - \frac{h}{2}\right)}{h} \\ &= \frac{2\cos\left(x_0 + \frac{h}{2}\right) \cdot \sin\left(\frac{h}{2}\right)}{h} \\ &= \cos\left(x_0 + \frac{h}{2}\right) \cdot \frac{\sin\left(\frac{h}{2}\right)}{\frac{h}{2}}\end{aligned}$$

Es gilt (geometrischer Beweis) für $x \in [0, \frac{\pi}{2})$:

$$\frac{1}{2}\sin x \cos x < \frac{x}{2} \leq \frac{1}{2} \tan x$$

Also

$$\cos x < \frac{\sin x}{x} < \frac{1}{\cos x}$$

Daraus folgt:

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = \lim_{x \to 0} \frac{\sin |x|}{|x|} = 1.$$

und daher

$$\boxed{(\sin x)' = \cos x}$$

Weiters gilt:

$$\cos x = \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$$

Daher

$$\boxed{(\cos x)'} = \left(\sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right)\right)' = \cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right) \boxed{= -\sin x}$$

Wegen

$$\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$$

folgt aus der Quotientenregel:

$$\begin{aligned}\boxed{(\tan x)'} &= \frac{\cos x \cdot \cos x - \sin x \cdot (-\sin x)}{\cos^2 x} \\ &\boxed{= \frac{1}{\cos^2 x}} = \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} \boxed{= 1 + \tan^2 x}\end{aligned}$$

Analog erhält man

$$\boxed{(\cot x)' = -\frac{1}{\sin^2 x} = -1 - \cot^2 x}$$

- Arkusfunktionen: $\arcsin x$ ist die Umkehrfunktion von $\sin x$. Also:

$$(\arcsin x)' = \frac{1}{\cos(\arcsin x)}$$

Nun gilt für $y = \arcsin x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$

$$\cos y = \sqrt{1 - \sin^2 y} = \sqrt{1 - x^2}$$

Also

$$\boxed{(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}}$$

Analog zeigt man:

$$\boxed{(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}}, \quad \boxed{(\arctan x)' = \frac{1}{1 + x^2}}, \quad \boxed{(\text{arccot}\, x)' = -\frac{1}{1 + x^2}},$$

- Hyperbelfunktionen: $\sinh x = \frac{1}{2}\left(e^x - e^{-x}\right)$

Also

$$\boxed{(\sinh x)'} = \frac{1}{2}\left(e^x + e^{-x}\right) = \boxed{\cosh x}$$

Analog zeigt man:

$$\boxed{(\cosh x)' = \sinh x}, \quad \boxed{(\tanh x)' = \frac{1}{\cosh^2 x} = 1 - \tanh^2 x}$$

und

$$\boxed{(\coth x)' = -\frac{1}{\sinh^2 x} = 1 - \coth^2 x}$$

- Areafunktionen: $\text{arsinh}(x)$ ist die Umkehrfunktion von $\sinh(x)$. Also

$$(\text{arsinh}\, x)' = \frac{1}{\cosh(\text{arsinh}\, x)}$$

Nun gilt für $y = \text{arsinh}\, x$

$$\cosh y = \sqrt{1 + \sinh^2 y} = \sqrt{1 + x^2}$$

Also

$$\boxed{(\text{arsinh}\, x)' = \frac{1}{\sqrt{1 + x^2}}}$$

Analog zeigt man

$$\boxed{(\operatorname{arcosh} x)' = \frac{1}{\sqrt{x^2-1}} \quad \text{für } x > 1}$$

und

$$\boxed{(\operatorname{artanh} x)' = \frac{1}{1-x^2} \quad \text{für } |x| < 1} \quad \text{und} \quad \boxed{(\operatorname{arcoth} x)' = \frac{1}{1-x^2} \quad \text{für } |x| > 1}$$

2.4 Minima und Maxima

Sei $I \subset \mathbb{R}$ ein Intervall und $f\colon I \longrightarrow \mathbb{R}$.

Definition 2.2. *Ein Punkt $x_0 \in I$ heißt ein lokales Maximum von f, wenn*

$$f(x_0) \geq f(x) \quad \text{\textit{für alle} } x \in I \text{ \textit{in einer Umgebung von} } x_0.$$

Ein Punkt $x_0 \in I$ heißt ein lokales Minimum von f, wenn

$$f(x_0) \leq f(x) \quad \text{\textit{für alle} } x \in I \text{ \textit{in einer Umgebung von} } x_0.$$

Unter einem lokalen Extremum versteht man ein lokales Minimum oder ein lokales Maximum.

Satz 2.6. *Sei $I \subset \mathbb{R}$ ein Intervall und $f\colon I \longrightarrow \mathbb{R}$. Sei x_0 ein innerer Punkt von I und f ist in diesem Punkt differenzierbar. Dann gilt: Falls x_0 ein lokales Extremum ist, folgt*

$$f'(x_0) = 0.$$

Beweis. Beweis für den Fall, dass x_0 ein lokales Maximum ist. Für hinreichend kleine Werte $h > 0$ gilt:

$$f(x_0 - h) \leq f(x_0) \quad \text{und} \quad f(x_0) \geq f(x_0 + h).$$

Daher folgt:

$$f'(x_0) = \lim_{h \to 0+} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} \leq 0$$

und

$$f'(x_0) = \lim_{h \to 0+} \frac{f(x_0-h) - f(x_0)}{-h} \geq 0$$

Also: $f'(x_0) = 0$. □

2.5 Höhere Ableitungen

- 2. Ableitung: Ableitung der Ableitung
- Schreibweise: $f''(x_0) = \frac{d^2 f}{dx^2}(x_0)$, $\ddot{f}(t_0)$,
- Interpretation: Krümmung, Beschleunigung
- 3. Ableitung: $f'''(x_0) = \frac{d^3 f}{dx^3}(x_0)$
- n-te Ableitung: $f^{(n)}(x_0) = \frac{d^n f}{dx^n}(x_0)$

2.6 Taylor-Polynom, Taylor-Reihe

Sei $I \subset \mathbb{R}$ ein Intervall, $x_0 \in I$ sei ein innerer Punkt von I, und sei $f\colon I \longrightarrow \mathbb{R}$ eine reelle Funktion, die im Punkt x_0 differenzierbar ist. Dann gilt

$$f(x) = \underbrace{f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)}_{T_1(x)} + r(x - x_0) \quad \text{mit} \quad \lim_{h \to 0} \frac{r(h)}{h} = 0.$$

Offensichtlich gilt:

$$T_1(x_0) = f(x_0) \quad \text{und} \quad T_1'(x_0) = f'(x_0).$$

Das Polynom $T_1(x)$ vom Grad 1 besitzt also an der Stelle x_0 den gleichen Funktionswert und die gleiche Ableitung wie $f(x)$.

Sei f 2-mal differenzierbar. Wir bestimmen nun jenes Polynom $T_2(x)$ vom Grad 2, also

$$T_2(x) = a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)^2,$$

das zusätzlich an der Stelle x_0 auch die gleiche zweite Ableitung wie $f(x)$ besitzt. Es gilt:

$$T_2(x_0) = a_0, \quad T_2'(x_0) = a_1, \quad T_2''(x_0) = 2a_2.$$

Also muss gelten:

$$a_0 = f(x_0), \quad a_1 = f'(x_0), \quad 2a_2 = f''(x_0)$$

und wir erhalten

$$T_2(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2}(x - x_0)^2.$$

Sei f 3-mal differenzierbar. Wir bestimmen nun jenes Polynom $T_3(x)$ vom Grad 3, also

$$T_3(x) = a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)^2 + a_3(x - x_0)^3,$$

das zusätzlich an der Stelle x_0 auch die gleiche dritte Ableitung wie $f(x)$ besitzt. Es gilt:

$$T_3(x_0) = a_0, \quad T_3'(x_0) = a_1, \quad T_3''(x_0) = 2a_2, \quad T_3'''(x_0) = 2 \cdot 3 \cdot a_3.$$

Die Bedingungen an a_0, a_1 und a_2 sind unverändert. Zusätzlich muss gelten:

$$2 \cdot 3 \cdot a_3 = f'''(x_0)$$

und wir erhalten

$$T_3(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2}(x - x_0)^2 + \frac{f'''(x_0)}{2 \cdot 3}(x - x_0)^3.$$

Setzt man diese Überlegungen fort, so erhält man für jenes Polynom $T_n(x)$ vom Grad n, das an der Stelle x_0 den gleichen Funktionswert und die gleichen Ableitungen bis zur Ordnung n wie $f(x)$ besitzt:

$$\begin{aligned} T_n(x) &= f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \frac{f'''(x_0)}{3!}(x - x_0)^3 \\ &\quad + \frac{f^{(4)}(x_0)}{4!}(x - x_0)^4 + \cdots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n = \sum_{i=0}^{n} \frac{f^{(i)}(x_0)}{i!}(x - x_0)^i, \end{aligned}$$

wobei ! die Faktorielle bezeichnet, also

$$0! = 1 \quad \text{und} \quad k! = 1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot k \quad \text{für } k \geq 1.$$

$T_n(x)$ heißt das n-te Taylor-Polynom.

Satz 2.7 (Taylor-Formel)**.** *Seien $I \subset \mathbb{R}$ ein Intervall, $x_0 \in I$ ein innerer Punkt von I und $f\colon I \longrightarrow \mathbb{R}$ $(n+1)$-mal stetig differenzierbar in I. Dann gibt es zu jedem $x \in I$ eine Zahl $\theta \in (0,1)$, sodass:*

$$f(x) = \underbrace{\sum_{i=0}^{n} \frac{f^{(i)}(x_0)}{i!}(x - x_0)^i}_{T_n(x)} + \underbrace{\frac{f^{(n+1)}(x_0 + \theta(x - x_0))}{(n+1)!}(x - x_0)^{n+1}}_{R_n(x)}.$$

Beweis. $n = 0$:

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0 + \theta(x - x_0))(x - x_0)$$

Wir betrachten

$$F(t) = [f(x) - f(t)] - \frac{x - t}{x - x_0}[f(x) - f(x_0)]$$

Es gilt: $F(x_0) = F(x) = 0$. F ist eine stetige Funktion. Sie besitzt daher ein lokales Extremum an einer Stelle $\xi = x_0 + \theta(x - x_0)$ zwischen x_0 und x. F ist in ξ differenzierbar. Daher

$$F'(\xi) = 0.$$

Nun gilt:

$$F'(t) = -f'(t) + \frac{1}{x - x_0}[f(x) - f(x_0)].$$

Also

$$-f'(\xi) + \frac{1}{x - x_0}\left[f(x) - f(x_0)\right] = 0$$

Daraus folgt:

$$f(x) - f(x_0) = f'(\xi)(x - x_0).$$

Im allgemeinen Fall geht man ähnlich vor: Wir betrachten

$$F(t) = \left[f(x) - \sum_{i=0}^{n} \frac{f^{(i)}(t)}{i!}(x-t)^i\right] - \frac{(x-t)^{n+1}}{(x-x_0)^{n+1}}\left[f(x) - \sum_{i=0}^{n} \frac{f^{(i)}(x_0)}{i!}(x-x_0)^i\right]$$

Es gilt: $F(x_0) = F(x) = 0$. F ist eine stetige Funktion. Sie besitzt daher ein lokales Extremum an einer Stelle $\xi = x_0 + \theta(x - x_0)$ zwischen x_0 und x. F ist in ξ differenzierbar. Daher

$$F'(\xi) = 0.$$

Nun gilt:

$$\begin{aligned} F'(t) = -f'(t) - \sum_{i=1}^{n}&\left[\frac{f^{(i+1)}(t)}{i!}(x-t)^i - \frac{f^{(i)}(t)}{i!}i(x-t)^{i-1}\right] \\ &+ \frac{(n+1)(x-t)^n}{(x-x_0)^{n+1}}\left[f(x) - \sum_{i=0}^{n}\frac{f^{(i)}(x_0)}{i!}(x-x_0)^i\right] \end{aligned}$$

Es gilt

$$\begin{aligned} &-f'(t) - \sum_{i=1}^{n}\left[\frac{f^{(i+1)}(t)}{i!}(x-t)^i - \frac{f^{(i)}(t)}{(i-1)!}(x-t)^{i-1}\right] \\ &= -f'(t) - \left[\frac{f''}{1!}(x-t) - f'(t)\right] - \left[\frac{f'''(t)}{2!}(x-t)^2 - \frac{f''(t)}{1!}(x-t)\right] \\ &\quad - \ldots - \left[\frac{f^{(n+1)}(t)}{n!}(x-t)^n - \frac{f^{(n)}(t)}{(n-1)!}(x-t)^{n-1}\right] \\ &= -\frac{f^{(n+1)}(t)}{n!}(x-t)^n. \end{aligned}$$

Also

$$F'(t) = -\frac{f^{(n+1)}(t)}{n!}(x-t)^n + \frac{(n+1)(x-t)^n}{(x-x_0)^{n+1}}\left[f(x) - \sum_{i=0}^{n}\frac{f^{(i)}(x_0)}{i!}(x-x_0)^i\right]$$

Aus $F'(\xi) = 0$ folgt

$$\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{n!}(x-\xi)^n = \frac{(n+1)(x-\xi)^n}{(x-x_0)^{n+1}}\left[f(x) - \sum_{i=0}^{n}\frac{f^{(i)}(x_0)}{i!}(x-x_0)^i\right]$$

und daraus sofort die Behauptung. □

Der Ausdruck

$$\frac{f^{(n+1)}(x_0 + \theta(x - x_0))}{(n+1)!}(x - x_0)^{n+1}$$

heißt die Lagrangesche Form des Restgliedes.

Monotonie von Funktionen

Definition 2.3. *Sei $I \subset \mathbb{R}$ ein Intervall und $f\colon I \to \mathbb{R}$.*
f heißt monoton wachsend $\iff$ Für alle $x, y \in I$ mit $x < y$ gilt: $f(x) \leq f(y)$.
f heißt monoton fallend $\iff$ Für alle $x, y \in I$ mit $x < y$ gilt: $f(x) \geq f(y)$.
f heißt streng monoton wachsend $\iff$ Für alle $x, y \in I$ mit $x < y$ gilt: $f(x) < f(y)$.
f heißt streng monoton fallend $\iff$ Für alle $x, y \in I$ mit $x < y$ gilt: $f(x) > f(y)$.

Satz 2.8. *Sei $f\colon (a, b) \to \mathbb{R}$ stetig differenzierbar. Dann gilt*

- *f ist genau dann monoton wachsend (fallend), wenn $f'(x) \geq 0$ ($f'(x) \leq 0$) für alle $x \in (a, b)$.*
- *Falls $f'(x) > 0$ ($f'(x) < 0$) für alle $x \in (a, b)$, dann ist f streng monoton wachsend (fallend).*

Beweis. Angenommen f ist monoton wachsend. Dann gilt für $h > 0$:

$$f(x + h) \geq f(x).$$

Also

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x + h) - f(x)}{h} \geq 0.$$

Angenommen, $f'(x) \geq 0$. Für $x \leq y$ folgt dann:

$$f(y) = f(x) + \underbrace{f'(x + \theta(y - x))}_{\geq 0}\underbrace{(y - x)}_{\geq 0} \geq 0.$$

Also ist f monoton wachsend. Falls $f'(x) > 0$, folgt mit dem selben Argument, dass f streng monoton wachsend ist. □

Lokale Extrema

Satz 2.9. *Sei $I \subset \mathbb{R}$ ein Intervall, $f\colon I \longrightarrow \mathbb{R}$ sei 2 mal stetig differenzierbar. Sei x_0 ein innerer Punkt von I mit*

$$f'(x_0) = 0 \quad \textit{und} \quad f''(x_0) > 0 (< 0).$$

Dann ist x_0 ein lokales Minimum (Maximum).

Beweis. Da f'' stetig ist und $f''(x_0) > 0$, gibt es ein Intervall um x_0, in dem f'' positiv ist. Sei x ein Punkt aus dieser Umgebung von x_0. Dann gilt:

$$f(x) = f(x_0) + \underbrace{f'(x_0)}_{=0}(x - x_0) + \underbrace{\frac{f''(x_0 + \theta(x - x_0))}{2!}(x - x_0)^2}_{\geq 0} \geq f(x_0).$$

□

Approximation einer Funktion durch Taylor-Polynome

Mit Hilfe von Taylor-Polynomen lassen sich (komplizierte) Funktionen durch einfache polynomiale Funktionen approximieren.

- Beispiel: Das Taylor-Polynom $T_2(x)$ von $f(x) = \sin x$ an der Stelle $x_0 = 0$ und Restgliedabschätzung.

  $$T_2(x) = \sin 0 + \cos 0 \cdot x + \frac{-\sin 0}{2!} \cdot x^2 = x$$

  Also

  $$\sin x = x + R_2(x)$$

  mit dem Restglied

  $$R_2(x) = -\frac{\cos(\theta x)}{3!} \cdot x^3.$$

  Abschätzung des Restgliedes:

  $$|R_2(x)| \leq \frac{1}{6} \cdot |x|^3.$$

- Beispiel: Das Taylor-Polynom $T_3(x)$ von $f(x) = \cos x$ an der Stelle $x_0 = 0$ und Restgliedabschätzung.

  $$T_3(x) = \cos 0 - \sin 0 \cdot x + \frac{-\cos 0}{2!} \cdot x^2 + \frac{\sin 0}{3!} \cdot x^3 = 1 - \frac{x^2}{2}$$

  Also

  $$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + R_3(x)$$

  mit dem Restglied

  $$R_3(x) = \frac{\cos(\theta x)}{4!} \cdot x^4.$$

  Abschätzung des Restgliedes:

  $$|R_3(x)| \leq \frac{1}{24} \cdot x^4.$$

- Beispiel: Das Taylor-Polynom $T_1(x)$ von $f(x) = \sqrt{x}$ an der Stelle $x_0 = 1$ und Restgliedabschätzung.

$$f'(x) = \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}, \quad f''(x) = \left(-\frac{1}{2}\right)\frac{1}{2}x^{-\frac{3}{2}} = -\frac{1}{4}\frac{1}{x\sqrt{x}}$$

Also

$$\sqrt{x} = \underbrace{1 + \frac{1}{2}(x-1)}_{T_1(x)} \underbrace{- \frac{1}{8}\frac{1}{\xi\sqrt{\xi}}(x-1)^2}_{R_1(x)} \quad \text{mit } \xi = 1 + \theta(x-1).$$

Abschätzung des Restgliedes:

$$|R_1(x)| \leq \begin{cases} \frac{1}{8}(x-1)^2 & \text{für } x > 1 \\ \frac{1}{8x\sqrt{x}}(x-1)^2 & \text{für } x < 1 \end{cases}$$

Taylor-Reihen

Die Folge der Taylor-Polynome nennt man Taylor-Reihe. Schreibweise:

$$\left(\sum_{i=0}^{n} \frac{f^{(i)}(x_0)}{i!}(x-x_0)^i\right)_{n\in\mathbb{N}_0} = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{f^{(i)}(x_0)}{i!}(x-x_0)^i$$

Falls $\lim_{n\to\infty} R_n(x) = 0$, dann folgt

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} T_n(x) = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=0}^{n} \frac{f^{(i)}(x_0)}{i!}(x-x_0)^i.$$

Schreibweise für den Grenzwert:

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{i=0}^{n} \frac{f^{(i)}(x_0)}{i!}(x-x_0)^i = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{f^{(i)}(x_0)}{i!}(x-x_0)^i.$$

In diesem Sinne:

$$f(x) = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{f^{(i)}(x_0)}{i!}(x-x_0)^i$$

- Beispiel: Die Taylor-Reihe für $f(x) = e^x$ an der Stelle $x_0 = 0$ und Untersuchung des Restgliedes für $n \to \infty$.
  $f^{(i)}(x) = e^x$

Taylor-Reihe:

$$\sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{i!}x^i = 1 + x + \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{3!}x^3 + \dots$$

Restglied:

$$R_n(x) = \frac{e^{\theta \cdot x}}{(n+1)!}x^{n+1} \to 0 \quad \text{für } n \to \infty.$$

folgt leicht aus der Ungleichung:

$$n! \geq n^{\frac{n}{2}}.$$

Also:

$$e^x = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{i!}x^i = 1 + x + \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{3!}x^3 + \dots$$

- Beispiel: Die Taylor-Reihe für $\sin x$ und $\cos x$ an der Stelle $x_0 = 0$ und Untersuchung des Restgliedes für $n \to \infty$.

$$\sin^{(i)}(x) = \begin{cases} \sin x & \text{für } i = 4j \\ \cos x & \text{für } i = 4j+1 \\ -\sin x & \text{für } i = 4j+2 \\ -\cos x & \text{für } i = 4j+3 \end{cases}$$

Taylor-Reihe:

$$x - \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{5!}x^5 - \frac{1}{7!}x^7 + \dots = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{(-1)^i}{(2i+1)!}x^{2i+1}$$

Restglied:

$$R_n(x) = \frac{\sin^{(n)}(\theta \cdot x)}{(n+1)!}x^{n+1} \to 0 \quad \text{für } n \to \infty.$$

Also

$$\sin x = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{(-1)^i}{(2i+1)!}x^{2i+1} = x - \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{5!}x^5 - \frac{1}{7!}x^7 + \cdots$$

Analog zeigt man:

$$\cos x = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{(-1)^i}{(2i)!}x^{2i} = 1 - \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{4!}x^4 - \frac{1}{6!}x^6 + \cdots$$

- Beispiel: Die Taylor-Reihe für $f(x) = \frac{1}{1-x}$ an der Stelle $x_0 = 0$ und Untersuchung des Restgliedes für $n \to \infty$.

  Für $i \geq 1$ gilt:
  $$f^{(i)}(x) = i!(1-x)^{-(i+1)}.$$
  Taylor-Reihe:
  $$\sum_{i=0}^{\infty} \frac{f^{(i)}(0)}{i!} x^i = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{i!}{i!} x^i = \sum_{i=0}^{\infty} x^i = 1 + x + x^2 + x^3 + \ldots$$
  Es gilt (endliche geometrische Reihe) für $x \neq 1$:
  $$\sum_{i=0}^{n} x^i = \frac{1 - x^{n+1}}{1-x}$$
  und daher
  $$R_n(x) = \frac{1}{1-x} - \sum_{i=0}^{n} x^i = \frac{1}{1-x} - \frac{1 - x^{n+1}}{1-x} = \frac{x^{n+1}}{1-x} \to 0 \quad \text{falls } |x| < 1.$$
  Also gilt für $|x| < 1$ (geometrische Reihe):
  $$\frac{1}{1-x} = \sum_{i=0}^{\infty} x^i = 1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + \ldots$$

- Beispiel: Die Taylor-Reihe für $f(x) = \ln(1+x)$ an der Stelle $x_0 = 0$.

  Für $i \geq 1$ gilt:
  $$f^{(i)}(x) = (-1)^{i-1}\,(i-1)!(1+x)^{-i}.$$
  Taylor-Reihe:
  $$\begin{aligned} \sum_{i=0}^{\infty} \frac{f^{(i)}(0)}{i!} x^i &= \sum_{i=1}^{\infty} \frac{(-1)^{i-1}\,(i-1)!}{i!} x^i = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{(-1)^{i-1}}{i} x^i \\ &= x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{4}x^4 + \ldots \end{aligned}$$

  Für $x \in (-1, 1]$ lässt sich zeigen, dass das Restglied gegen 0 konvergiert.

Kapitel 3

Integralrechnung in $\mathbb{R}$

3.1 Stammfunktion

Definition 3.1. *Sei $I \subset \mathbb{R}$ ein Intervall und seien $f\colon I \to \mathbb{R}$ und $F\colon I \to \mathbb{R}$ reelle Funktionen. F heißt Stammfunktion (unbestimmtes Integral) von $f \iff F$ ist differenzierbar und $F' = f$.*

- Falls F eine Stammfunktion von f ist, dann ist $F + C$ mit einer Konstanten $C \in \mathbb{R}$ ebenfalls eine Stammfunktion und es gibt keine weiteren Stammfunktionen. C nennt man Integrationskonstante.
- Schreibweise: $\int f(x)\ dx = F(x) + C$.
- Mit dieser Schreibweise gilt:

$$\left(\int f(x)\ dx\right)' = f(x).$$

Falls f differenzierbar ist, gilt offensichtlich, dass f Stammfunktion von f' ist:

$$\int f'(x)\ dx = f(x) + C.$$

3.2 Stammfunktionen spezieller Funktionen

- Potenzfunktionen: es gilt $(x^r)' = r \cdot x^{r-1}$, also $\left(\frac{x^r}{r}\right)' = x^{r-1}$ für $r \neq 0$. Mit der Setzung $\alpha = r - 1$ erhalten wir also für $\alpha \neq -1$:

$$\boxed{\int x^\alpha\ dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C}$$

Spezialfall $\alpha = 0$: $\int 1\ dx = x + C$.

Spezialfall $\alpha = -1$: es gilt $(\ln|x|)' = \frac{1}{x}$. Also:

$$\boxed{\int \frac{1}{x}\ dx = \ln|x| + C}$$

- Exponentialfunktionen: es gilt $(a^x)' = \ln a \cdot a^x$, also $\left(\frac{a^x}{\ln a}\right)' = a^x$. Für $a \neq 1$ erhalten wir also:

$$\boxed{\int a^x\ dx = \frac{a^x}{\ln a} + C}$$

  Spezialfall: $a = e$: $\int e^x\ dx = e^x + C$.

- Logarithmusfunktionen: es gilt $(x \cdot \ln|x| - x)' = \ln|x|$. Also

$$\boxed{\int \ln|x|\ dx = x \cdot \ln|x| - x + C}$$

  Wegen $e^{\ln|x|} = |x| = a^{\log_a|x|} = \left(e^{\ln a}\right)^{\log_a|x|} = e^{\ln a \cdot \log_a|x|}$ folgt: $\log_a x = \frac{\ln x}{\ln a}$ und daher:

$$\boxed{\int \log_a|x|\ dx = \frac{1}{\ln a}(x \cdot \ln|x| - x) + C}$$

- Winkelfunktionen: Es gilt $(\sin x)' = \cos x$ und $(\cos x)' = -\sin x$, also $(-\cos x)' = \sin x$. Daher:

$$\boxed{\int \sin x\ dx = -\cos x + C} \quad \text{und} \quad \boxed{\int \cos x\ dx = \sin x + C}$$

  Es gilt: $(\ln|\cos x|)' = \frac{1}{\cos x} \cdot (-\sin x) = -\tan x$. Also

$$\boxed{\int \tan x\ dx = -\ln|\cos x| + C}$$

  Analog folgt:

$$\boxed{\int \cot x\ dx = \ln|\sin x| + C}$$

  Es gilt: $(\tan x)' = \frac{1}{\cos^2 x}$ und $(\cot x)' = -\frac{1}{\sin^2 x}$. Also

$$\boxed{\int \frac{1}{\cos^2 x}\ dx = \tan x + C} \quad \text{und} \quad \boxed{\int \frac{1}{\sin^2 x}\ dx = -\cot x + C}$$

- Hyperbelfunktionen: Analog zu den Winkelfunktionen erhält man:

$$\boxed{\int \sinh x \; dx = \cosh x + C} \quad \text{und} \quad \boxed{\int \cosh x \; dx = \sinh x + C}$$

und

$$\boxed{\int \tanh x \; dx = \ln|\cosh x| + C} \quad \text{und} \quad \boxed{\int \coth x \; dx = \ln|\sinh x| + C}$$

und

$$\boxed{\int \frac{1}{\cosh^2 x} \; dx = \tanh x + C} \quad \text{und} \quad \boxed{\int \frac{1}{\sinh^2 x} \; dx = -\coth x + C}$$

- Aus den Differentiationsregeln für die Arkusfunktionen folgt sofort:

$$\boxed{\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \; dx = \arcsin x + C_1 = -\arccos x + C_2 \quad \text{für } |x| < 1}$$

mit $C_2 = C_1 + \frac{\pi}{2}$ und

$$\boxed{\int \frac{1}{1+x^2} \; dx = \arctan x + C_1 = -\operatorname{arccot} x + C_2}$$

mit $C_2 = C_1 + \frac{\pi}{2}$.

- Aus den Differentiationsregeln für die Areafunktionen folgt sofort:

$$\boxed{\int \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} \; dx = \operatorname{arsinh} x + C = \ln\left(x + \sqrt{x^2+1}\right) + C}$$

und

$$\boxed{\int \frac{1}{\sqrt{x^2-1}} \; dx = \operatorname{arcosh} x + C = \ln\left(x + \sqrt{x^2-1}\right) + C \quad \text{für } x > 1}$$

und

$$\boxed{\int \frac{1}{1-x^2} \; dx = \operatorname{artanh} x + C = \frac{1}{2} \ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right) + C \quad \text{für } |x| < 1}$$

und

$$\boxed{\int \frac{1}{x^2-1} \; dx = -\operatorname{arcoth} x + C = -\frac{1}{2} \ln\left(\frac{x+1}{x-1}\right) + C \quad \text{für } |x| > 1}$$

3.3 Integrationsregeln

Satz 3.1. *Sei $I \subset \mathbb{R}$ ein Intervall.*

1. *Seien $f\colon I \to \mathbb{R}$ und $g\colon I \to \mathbb{R}$ reelle Funktionen mit Stammfunktionen F und G. Dann ist $F + G$ eine Stammfunktion von $f + g$:*

$$\int \big[f(x) + g(x)\big]\ dx = \int f(x)\ dx + \int g(x)\ dx.$$

2. *Sei $c \in \mathbb{R}$. Dann ist $c \cdot F$ eine Stammfunktion von $c \cdot f$:*

$$\int \big[c \cdot f(x)\big]\ dx = c \cdot \int f(x)\ dx.$$

Beweis.

$$(F + G)'(x) = F'(x) + G'(x) = f(x) + g(x).$$
$$(c \cdot F)'(x) = c \cdot F'(x) = c \cdot f(x).$$

□

Satz 3.2 (Partielle Integration)**.** *Seien $f\colon I \to \mathbb{R}$ und $g\colon I \to \mathbb{R}$ differenzierbare reelle Funktionen und $\varphi = f \cdot g'$ besitze eine Stammfunktion Φ. Dann ist $f \cdot g - \Phi$ eine Stammfunktion von $f' \cdot g$:*

$$\int f'(x) \cdot g(x)\ dx = f(x) \cdot g(x) - \int f(x) \cdot g'(x)\ dx.$$

Beweis.

$$\begin{aligned}(f \cdot g - \Phi)'(x) &= f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x) - \Phi'(x)\\ &= f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x) - f(x) \cdot g'(x) = f'(x) \cdot g(x)\end{aligned}$$

□

Satz 3.3 (Substitutionsregel)**.** *Seien $I, J \subset \mathbb{R}$ Intervalle. Seien $f\colon J \to \mathbb{R}$ eine reelle Funktion mit Stammfunktion F, $g\colon I \to \mathbb{R}$ eine differenzierbare Funktion mit $g(I) \subset J$. Dann ist $F \circ g$ eine Stammfunktion von $(f \circ g) \cdot g'$.*

$$\int f(x)\ dx = \int f(g(t)) \cdot g'(t)\ dt \quad \textit{mit} \quad x = g(t)$$

Beweis. Mit der Kettenregel gilt:

$$(F \circ g)'(t) = F'(g(t)) \cdot g'(t) = f(g(t)) \cdot g'(t).$$

□

3.4 Beispiele

- Beispiel: Stammfunktionen von $x \cdot e^x$

  Partielle Integration:

$$\int x \cdot e^x \; dx = \int (e^x)' \cdot x \; dx = x \cdot e^x - \int e^x \; dx = x \cdot e^x - e^x + C$$

- Beispiel: Stammfunktionen von $\sin^2 x$

  Partielle Integration:

$$\begin{aligned} \int \sin^2 x \; dx &= \int (-\cos x)' \cdot \sin x \; dx = -\cos x \cdot \sin x - \int (-\cos x) \cos x \; dx \\ &= -\cos x \cdot \sin x + \int \cos^2 x \; dx \\ &= -\cos x \cdot \sin x + \int (1 - \sin^2 x) \; dx \\ &= -\cos x \cdot \sin x + x - \int \sin^2 x \; dx \end{aligned}$$

  Also

$$2 \int \sin^2 x \; dx = x - \sin x \cdot \cos x$$

  und somit

$$\int \sin^2 x \; dx = \frac{1}{2}(x - \sin x \cdot \cos x) + C$$

- Beispiel: Stammfunktionen von $\sqrt{1-x^2}$

  Substitutionsregel:

$$\int \sqrt{1-x^2} \; dx \quad \text{für } |x| \leq 1$$

  Mit $x = \sin t = g(t)$ für $t \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ folgt:

$$\begin{aligned} \int \sqrt{1-x^2} \; dx &= \int \sqrt{1-\sin^2 t} \cos t \; dt = \int \cos^2 t \; dt = \frac{1}{2}(t + \sin t \cdot \cos t) + C \\ &= \frac{1}{2}\left(\arcsin x + x \cdot \sqrt{1-x^2}\right) + C \end{aligned}$$

- Beispiel: Stammfunktionen von $\sqrt{x^2+1}$

  Substitutionsregel: Mit $x = \sinh t = g(t)$ für $t \in \mathbb{R}$ folgt:

$$\begin{aligned}\int \sqrt{x^2+1}\ dx &= \int \sqrt{\sinh^2 t + 1} \cosh t\ dt = \int \cosh^2 t\ dt = \frac{1}{2}(t + \sinh t \cdot \cosh t) + C \\ &= \frac{1}{2}\left(\operatorname{arsinh} x + x \cdot \sqrt{1+x^2}\right) + C\end{aligned}$$

- Beispiel: Stammfunktionen von $\sqrt{x^2+x+1}$.

  Substitutionsregel:

$$\int \sqrt{x^2+x+1}\ dx$$

  Es gilt:

$$x^2+x+1 = \left(x^2+x+\frac{1}{4}\right) + \frac{3}{4} = \left(x+\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4} = \frac{3}{4}\left[\left(\frac{2}{\sqrt{3}}x + \frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2 + 1\right]$$

  Also

$$\int \sqrt{x^2+x+1}\ dx = \frac{\sqrt{3}}{2}\int \sqrt{(a\,x+b)^2+1}\ dx \quad \text{mit} \quad a = \frac{2}{\sqrt{3}} \quad \text{und} \quad b = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

  Es gilt allgemein: Falls F eine Stammfunktion von f ist, dann gilt:

$$\boxed{\int f(a\,x+b)\ dx = \frac{1}{a}F(a\,x+b)}$$

  Beweis. Substitutionsregel mit $t = a\,x+b$ oder durch direkte Überprüfung. □

  Daher folgt:

$$\begin{aligned}\int \sqrt{x^2+x+1}\ dx &= \frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{1}{2}\left(\operatorname{arsinh}(ax+b) + (ax+b)\cdot\sqrt{(ax+b)^2+1}\right) + C \\ &= \frac{1}{2}\left(\frac{3}{4}\cdot \operatorname{arsinh}\frac{2x+1}{\sqrt{3}} + \frac{2x+1}{2}\cdot\sqrt{x^2+x+1}\right) + C\end{aligned}$$

- Beispiel: Stammfunktionen von $\frac{\cos x}{\sin x}$.

  Mit der Substitution

$$y = \sin x = g(x) \quad \text{und} \quad g'(x) = \cos x$$

folgt

$$\int \frac{\cos x}{\sin x}\,dx = \int \frac{g'(x)}{g(x)}\,dx = \int f(g(x))\cdot g'(x)\,dx = \int f(y)\,dy \quad \text{für} \quad f(y)=\frac{1}{y}$$

Also

$$\int \frac{\cos x}{\sin x}\,dx = \ln|y| + C = \ln|\sin x| + C$$

Spezialfall der allgemeinen Formel

$$\boxed{\int \frac{g'(x)}{g(x)}\,dx = \ln|g(x)| + C}$$

3.4.1 Stammfunktionen von rationalen Funktionen:

Partialbruchzerlegung:

Sei f eine rationale Funktion, also

$$f(x) = \frac{p(x)}{q(x)} \quad \text{mit Polynomen } p(x),\ q(x).$$

Polynomdivision:

$$p(x) = s(x)\cdot q(x) + r(x) \quad \text{mit Polynomen } r(x),\ s(x),\ \deg r(x) < \deg q(x)$$

Faktorisierung von $q(x)$:

$$\begin{aligned} q(x) = c\,&(x-x_1)^{r_1}\cdot(x-x_2)^{r_2}\cdot\ldots\cdot(x-x_m)^{r_m} \\ &\cdot(x^2+p_1x+q_1)^{s_1}\cdot(x^2+p_2x+q_2)^{s_2}\cdot\ldots\cdot(x^2+p_nx+q_n)^{s_n} \end{aligned}$$

mit $r_i, s_i \in \mathbb{N}$ und $x_i, p_i, q_i \in \mathbb{R}$, $p_i^2 < 4q_i$.

Ansatz:

$$f(x) = s(x) + \frac{r(x)}{q(x)} = s(x) + \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{r_i} \frac{a_{ij}}{(x-x_i)^j} + \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{s_i} \frac{b_{ij}x + c_{ij}}{(x^2+p_ix+q_i)^j}$$

Die Zahlen a_{ij}, b_{ij} und c_{ij} lassen sich durch Koeffizientenvergleich bestimmen.

- Beispiel: Partialbruchzerlegung von $f(x) = \dfrac{x^3+2}{x^2-1}$.

  Polynomdivision

  $$x^3 + 2 = x\cdot(x^2-1) + x + 2 \quad \text{also } f(x) = x + \frac{x+2}{x^2-1}$$

Faktorisierung

$$x^2 - 1 = (x+1) \cdot (x-1)$$

Partialbruchzerlegung:

$$\frac{x+2}{x^2-1} = \frac{a_1}{x+1} + \frac{a_2}{x-1}$$

Multiplikation mit $x^2 - 1$:

$$x + 2 = a_1 \cdot (x-1) + a_2 \cdot (x+1) = (a_1 + a_2) \cdot x - a_1 + a_2$$

Koeffizientenvergleich

$$a_1 + a_2 = 1 \quad \text{und} \quad -a_1 + a_2 = 2 \quad \Longrightarrow a_1 = -\frac{1}{2}, \; a_2 = \frac{3}{2}$$

Daher

$$f(x) = x - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{x+1} + \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{x-1}$$

- Beispiel: Partialbruchzerlegung von $f(x) = \dfrac{1}{x^2(x^2+1)}$.

Partialbruchzerlegung:

$$\frac{1}{x^2(x^2+1)} = \frac{a_1}{x} + \frac{a_2}{x^2} + \frac{bx+c}{x^2+1}$$

Multiplikation mit $x^2(x^2+1)$:

$$\begin{aligned} 1 &= a_1 \cdot x(x^2+1) + a_2 \cdot (x^2+1) + (bx+c) \cdot x^2 \\ &= (a_1 + b) \cdot x^3 + (a_2 + c) \cdot x^2 + a_1 \cdot x + a_2. \end{aligned}$$

Koeffizientenvergleich:

$$a_2 = 1, \quad a_1 = 0, \quad c = -a_2 = -1, \quad b = -a_1 = 0.$$

Daher

$$f(x) = \frac{1}{x^2} - \frac{1}{x^2+1}$$

Integration:

$$\int f(x)\ dx = \int s(x)\ dx + \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{r_i} a_{ij} \int \frac{1}{(x-x_i)^j}\ dx$$
$$+ \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{s_i} \left[b_{ij} \int \frac{x}{(x^2+p_ix+q_i)^j}\ dx + c_{ij} \int \frac{1}{(x^2+p_ix+q_i)^j}\ dx \right]$$

- $$\int \frac{1}{(x-x_i)^j}\ dx = \int (x-x_i)^{-j}\ dx = \begin{cases} \ln|x-x_i| & \text{für } j=1 \\ -\frac{1}{j-1}\frac{1}{(x-x_i)^{j-1}} & \text{für } j>1 \end{cases}$$

- $$\frac{x}{(x^2+p_ix+q_i)^j} = \frac{1}{2}\cdot\frac{2x+p_i}{(x^2+p_ix+q_i)^j} - \frac{p_i}{2}\cdot\frac{1}{(x^2+p_ix+q_i)^j}$$

- $$\int \frac{2x+p_i}{(x^2+p_ix+q_i)^j}\ dx = \int \frac{g'(x)}{g(x)^j}\ dx = \begin{cases} \ln|g(x)| & \text{für } j=1 \\ -\frac{1}{j-1}\frac{1}{g(x)^{j-1}} & \text{für } j>1 \end{cases}$$

  mit $g(x) = x^2+p_ix+q_i$. Also

  $$\int \frac{2x+p_i}{(x^2+p_ix+q_i)^j}\ dx = \begin{cases} \ln|x^2+p_ix+q_i| & \text{für } j=1 \\ -\frac{1}{j-1}\frac{1}{(x^2+p_ix+q_i)^{j-1}} & \text{für } j>1 \end{cases}$$

- $$x^2+p_ix+q_i = \left(x+\frac{p_i}{2}\right)^2 + d_i^2 \quad \text{mit } d_i = \sqrt{q_i - \frac{p_i^2}{4}}$$

  Also

  $$\frac{1}{x^2+p_ix+q_i} = \frac{1}{\left(x+\frac{p_i}{2}\right)^2+d_i^2} = \frac{1}{d_i^2}\cdot\frac{1}{\left(\frac{1}{d_i}x+\frac{p_i}{2d_i}\right)^2+1}$$

  Daher

  $$\int \frac{1}{(x^2+p_ix+q_i)^j}\ dx = \frac{1}{d_i^{2j}}\cdot\int \frac{1}{\left[\left(\frac{1}{d_i}x+\frac{p_i}{2d_i}\right)^2+1\right]^j}\ dx$$

  Mit

  $$t = \frac{1}{d_i}x + \frac{p_i}{2d_i} \quad \text{also } x = d_i\cdot t - \frac{p_i}{2} = g(t)$$

  folgt mit der Substitutionsregel

  $$\int \frac{1}{(x^2+p_ix+q_i)^j}\ dx = \frac{1}{d_i^{2j}}\cdot\int \frac{1}{\left[\left(\frac{1}{d_i}x+\frac{p_i}{2d_i}\right)^2+1\right]^j}\ dx = \frac{1}{d_i^{2j}}\cdot\int\frac{d_i}{(t^2+1)^j}\ dt$$

Spezialfall $j = 1$:
$$\int \frac{1}{t^2+1}\,dt = \arctan t + C$$
Für $j \geq 1$ gilt:
$$\begin{aligned}
\int \frac{1}{(t^2+1)^j}\,dt &= \frac{t}{(t^2+1)^j} - (-j)\int \frac{2t^2}{(t^2+1)^{j+1}}\,dt \\
&= \frac{t}{(t^2+1)^j} + 2j\int \frac{t^2}{(t^2+1)^{j+1}}\,dt \\
&= \frac{t}{(t^2+1)^j} + 2j\int \frac{t^2+1-1}{(t^2+1)^{j+1}}\,dt \\
&= \frac{t}{(t^2+1)^j} + 2j\int \frac{1}{(t^2+1)^j}\,dt - 2j\int \frac{1}{(t^2+1)^{j+1}}\,dt
\end{aligned}$$
Also
$$2j\int \frac{1}{(t^2+1)^{j+1}}\,dt = \frac{t}{(t^2+1)^j} + (2j-1)\int \frac{1}{(t^2+1)^j}\,dt$$
Somit
$$\int \frac{1}{(t^2+1)^{j+1}}\,dt = \frac{t}{2j(t^2+1)^j} + \frac{2j-1}{2j}\int \frac{1}{(t^2+1)^j}\,dt$$
$j \to j-1$: Für $j \geq 2$ gilt:
$$\int \frac{1}{(t^2+1)^j}\,dt = \frac{t}{2(j-1)(t^2+1)^{j-1}} + \frac{2j-3}{2(j-1)}\int \frac{1}{(t^2+1)^{j-1}}\,dt$$
Spezialfall $j = 2$;
$$\int \frac{1}{(t^2+1)^2}\,dt = \frac{t}{2(t^2+1)} + \frac{1}{2}\int \frac{1}{t^2+1}\,dt = \frac{t}{2(t^2+1)} + \frac{1}{2}\arctan t + C$$

- Beispiel: Stammfunktionen von $f(x) = \frac{x^3+2}{x^2-1}$.

  Partialbruchzerlegung:
$$f(x) = \frac{x^3+2}{x^2-1} = x - \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{x+1} + \frac{3}{2}\cdot\frac{1}{x-1}$$
  Stammfunktion
$$\begin{aligned}
\int \frac{x^3+1}{x^2-1}\,dx &= \int x\;dx - \frac{1}{2}\cdot\int \frac{1}{x+1}\,dx + \frac{3}{2}\cdot\int \frac{1}{x-1}\,dx \\
&= \frac{x^2}{2} - \frac{1}{2}\ln|x+1| + \frac{3}{2}\ln|x-1| + C
\end{aligned}$$

- Beispiel: Stammfunktionen von $f(x) = \dfrac{1}{x^2(x^2+1)}$.

  Partialbruchzerlegung

$$f(x) = \frac{1}{x^2(x^2+1)} = \frac{1}{x^2} - \frac{1}{x^2+1}$$

  Stammfunktion

$$\begin{aligned}\int \frac{1}{x^2(x^2+1)}\,dx &= \int \frac{1}{x^2}\,dx - \int \frac{1}{x^2+1}\,dx\\ &= -\frac{1}{x} - \arctan x + C\end{aligned}$$

Stammfunktion von Funktionen der Form $f(x) = r(\sin x, \cos x)$

Substitution

$$x = 2\,\arctan t = g(t)$$

Es gilt:

$$g'(t) = \frac{2}{t^2+1}, \quad \sin x = \frac{2t}{1+t^2}, \quad \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2},$$

Also

$$\int f(x)\,dx = \int r\left(\frac{2t}{1+t^2}, \frac{1-t^2}{1+t^2}\right) \cdot \frac{2}{t^2+1}\,dt$$

Ist $r(u,v)$ eine rationale Funktion in u und in v, dann ist nach der Substitution der Integrand eine rationale Funktion in t.

- Beispiel: Stammfunktionen von $\dfrac{1}{\sin x}$.

$$\int \frac{1}{\sin x}\,dx = \int \frac{1+t^2}{2t} \cdot \frac{2}{t^2+1}\,dt = \int \frac{1}{t}\,dt = \ln|t| + C = \ln\left|\tan\frac{x}{2}\right| + C$$

3.5 Das Riemann-Integral

Sei $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ eine reelle Funktion. Wir zerlegen das Intervall in n Teilintervalle

$$a = x_0 < x_1 < \ldots < x_{n-1} < x_n = b.$$

- Zerlegung $Z = \{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$.

- Länge des Teilintervalls $[x_{k-1}, x_k]$: $\Delta x_k = x_k - x_{k-1}$.
- Feinheit der Zerlegung $h = \max\{\Delta x_k \colon k = 1, 2, \ldots, n\}$.
- Zwischenpunkte: $\xi = (\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n)$ mit $\xi_k \in [x_{k-1}, x_k]$.

Riemann-Summe
$$S(f, Z, \xi) = \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k) \cdot \Delta x_k$$

Definition 3.2. *Eine Funktion $f \colon [a, b] \to \mathbb{R}$ heißt genau dann Riemann-integrierbar (kurz R-integrierbar), wenn der Grenzwert*
$$\lim_{h\to 0} S(f, Z, \xi) = \lim_{h\to 0} \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k) \cdot \Delta x_k = \int_a^b f(x)\ dx$$
existiert. Wir definieren zusätzlich
$$\int_b^a f(x)\ dx = -\int_a^b f(x)\ dx.$$

Man nennt $\int_a^b f(x)dx$ ein bestimmtes Integral. Alternative Schreibweise für $a < b$:
$$\int_a^b f(x)\ dx = \int_{[a,b]} f(x)\ dx.$$

Es gilt (ohne Beweis):

Satz 3.4. *Wenn $f \colon [a, b] \to \mathbb{R}$ stetig ist, dann ist f R-integrierbar.*

Das so genannte Lebesguesche Integrabilitätskriterium gibt genaue Auskunft, unter welchen Bedingungen eine Funktion R-integrierbar ist. Dazu benötigen wir zunächst die folgenden Begriffe:

Definition 3.3. *1. Eine Menge $N \subset \mathbb{R}$ heißt eine (Lebesgue-)Nullmenge, falls es zu jedem $\varepsilon > 0$ Intervalle I_n, $n \in \mathbb{N}$ gibt mit*
$$N \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} I_n \quad \text{und} \quad \sum_{n=1}^{\infty} |I_n| < \varepsilon.$$
$|I_n|$ bezeichnet die Länge des Intervalls I_n.

2. Eine Funktion $f \colon [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ heißt genau dann fast überall stetig auf $[a, b]$, wenn f auf $[a, b] \setminus N$ stetig ist, wobei N eine Nullmenge ist.

Das Lebesguesche Integrabilitätskriterium lautet nun (ohne Beweis):

Satz 3.5. *$f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ ist genau dann R-integrierbar ist, wenn f beschränkt ist und wenn f auf $[a,b]$ fast überall stetig ist.*

Es gelten folgende wichtigen Aussagen für das bestimmte Integral:

Satz 3.6. *Seien $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ und $g\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ R-integrierbar und $c \in \mathbb{R}$. Dann gilt:*

1. *$f+g$ und $c \cdot f$ sind R-integrierbar mit*

$$\int_a^b [f(x)+g(x)]\ dx = \int_a^b f(x)\ dx + \int_a^b g(x)\ dx,$$
$$\int_a^b [c \cdot f(x)]\ dx = c \cdot \int_a^b f(x)\ dx.$$

2. *Für alle $c \in (a,b)$ sind $f\big|_{[a,c]}$ und $f\big|_{[c,b]}$ R-integrierbar und es gilt:*

$$\int_a^c f(x)\ dx + \int_c^b f(x)\ dx = \int_a^b f(x)\ dx$$

3. *Falls $f(x) \le g(x)$ für alle $x \in [a,b]$, dann*

$$\int_a^b f(x)\ dx \le \int_a^b g(x)\ dx.$$

4. *$|f|$ ist R-integrierbar und es gilt*

$$\left|\int_a^b f(x)\ dx\right| \le \int_a^b |f(x)|\ dx \le (b-a) \cdot \sup\{|f(x)|\colon x \in [a,b]\}.$$

5. *f^2, g^2 und $f \cdot g$ sind R-integrierbar und es gilt (Cauchy-Schwarz-Ungleichung):*

$$\left|\int_a^b f(x)g(x)\ dx\right| \le \sqrt{\int_a^b f(x)^2\ dx} \cdot \sqrt{\int_a^b g(x)^2\ dx}.$$

Beweis. Die Existenz der Integrale folgt für stetige Funktionen aus dem obigen Satz, im allgemeinen Fall mit Hilfe des Lebesgueschen Integrabilitätskriteriums. Die behaupteten Identitäten oder Ungleichungen zeigt man zuerst für Riemann-Summen und führt anschließend den Grenzwertübergang durch, z.B.:

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^n [f(\xi_k)+g(\xi_k)] \cdot \Delta x_k &= \sum_{k=1}^n f(\xi_k) \cdot \Delta x_k + \sum_{k=1}^n g(\xi_k) \cdot \Delta x_k \\ &\to \int_a^b f(x)\ dx + \int_a^b g(x)\ dx.\end{aligned}$$

□

3.6 Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung

Satz 3.7. *Seien $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a < b$. Dann gilt:*

1. *Sei $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig. Dann ist $F\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ mit*

$$F(x) = \int_a^x f(t)\ dt$$

differenzierbar und es gilt $F' = f$:

$$\left(\int_a^x f(t)\ dt\right)' = f(x).$$

F ist also eine Stammfunktion.

2. *Sei $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig differenzierbar. Dann gilt:*

$$\int_a^b f'(x)\ dx = f(b) - f(a).$$

Beweis. Zu 1.: Für $x_0, x \in [a,b]$ mit $x > x_0$ gilt:

$$\begin{aligned}\frac{F(x) - F(x_0)}{x - x_0} &= \frac{1}{x - x_0}\left[\int_a^x f(t)\ dt - \int_a^{x_0} f(t)\ dt\right] \\ &= \frac{1}{x - x_0}\left[\int_a^{x_0} f(t)\ dt + \int_{x_0}^x f(t)\ dt - \int_a^{x_0} f(t)\ dt\right] = \frac{1}{x - x_0}\int_{x_0}^x f(t)\ dt\end{aligned}$$

Also

$$\frac{F(x) - F(x_0)}{x - x_0} - f(x_0) = \frac{1}{x - x_0}\int_{x_0}^x \big[f(t) - f(x_0)\big]\ dt$$

und daher

$$\left|\frac{F(x) - F(x_0)}{x - x_0} - f(x_0)\right| \leq \sup\{|f(t) - f(x_0)| : t \in [x_0, x]\} \to 0 \quad \text{für} \quad x \to x_0.$$

Der Beweis für $x < x_0$ verläuft völlig analog.

Zu 2.: Sowohl $f(x)$ also auch $\int_a^x f'(t)dt$ sind Stammfunktionen von $f'(x)$. Also gibt es eine Konstante C mit

$$f(x) = \int_a^x f'(t)dt + C.$$

Für $x = a$ folgt daher: $f(a) = C$, also

$$f(x) = f(a) + \int_a^x f'(t)dt.$$

Daraus erhält man die Behauptung für $x = b$. $\square$

Ähnlich wie den zweiten Teil des Hauptsatzes der Differential- und Integralrechnung zeigt man die folgenden beiden Sätze:

Satz 3.8 (Partielle Integration)**.** *Seien* $f\colon I \to \mathbb{R}$ *und* $g\colon I \to \mathbb{R}$ *stetig differenzierbare reelle Funktionen. Dann gilt*

$$\int_a^b f'(x) \cdot g(x)\ dx = \underbrace{f(b) \cdot g(b) - f(a) \cdot g(a)}_{f(x) \cdot g(x)\big|_a^b} - \int_a^b f(x) \cdot g'(x)\ dx.$$

Beweis. Aus dem entsprechenden Satz für unbestimmte Integrale (Stammfunktionen) und dem Hauptsatz folgt sofort, dass es eine Konstante C gibt, sodass:

$$\int_a^x f'(t) \cdot g(t)\ dt = f(x) \cdot g(x) - \int_a^x f(t) \cdot g'(t)\ dt + C.$$

Für $x = a$ folgt: $0 = f(a) \cdot g(a) + C$, also

$$\int_a^x f'(t) \cdot g(t)\ dt = f(x) \cdot g(x) - f(a) \cdot g(a) - \int_a^x f(t) \cdot g'(t)\ dt.$$

Daraus erhält man die Behauptung für $x = b$. $\square$

Satz 3.9 (Substitutionsregel)**.** *Seien* $f\colon [c,d] \to \mathbb{R}$ *eine stetige Funktion,* $g\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ *eine stetig differenzierbare Funktion mit* $g([a,b]) \subset [c,d]$*. Dann gilt:*

$$\int_{g(a)}^{g(b)} f(x)\ dx = \int_a^b f(g(t)) \cdot g'(t)\ dt.$$

Beweis. Aus dem entsprechenden Satz für unbestimmte Integrale (Stammfunktionen) und dem Hauptsatz folgt sofort, dass es eine Konstante C gibt, sodass:

$$\int_c^{g(y)} f(x)\ dx = \int_a^y f(g(t)) \cdot g'(t)\ dt + C \quad \text{für alle } y \in [a,b].$$

Für $y = a$ folgt:

$$\int_c^{g(a)} f(x)\ dx = C,$$

also

$$\underbrace{\int_c^{g(y)} f(x)\ dx - \int_c^{g(a)} f(x)\ dx}_{= \int_{g(a)}^{g(y)} f(x)\ dx} = \int_a^y f(g(t)) \cdot g'(t)\ dt.$$

Daraus erhält man die Behauptung für $y = b$. $\square$

3.7 Uneigentliche Integrale

Integrale unbeschränkter Funktionen auf beschränkten Intervallen und Integrale auf unbeschränkten Intervallen als Grenzwerte von Riemann-Integralen.

- Beispiel: Das Riemann-Integral der unbeschränkten Funktion

$$f(t) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{|t|}} & \text{für } t \neq 0 \\ 0 & \text{für } t = 0 \end{cases}$$

  auf dem Intervall $[-1, 1]$ existiert nicht. Das uneigentliche Integral

$$\int_{-1}^{1} f(t)\ dt = \lim_{x \to 0-} \int_{-1}^{x} f(t)\ dt + \lim_{x \to 0+} \int_{x}^{1} f(t)\ dt.$$

  existiert für die obige Funktion: $f(t)$ besitzt die Stammfunktion $F(t)$ mit

$$F(t) = \begin{cases} -2\sqrt{|t|} & \text{für } t < 0, \\ +2\sqrt{|t|} & \text{für } t > 0. \end{cases}$$

  Für $x < 0$ gilt:

$$\int_{-1}^{x} f(t)\ dt = -2\sqrt{|x|} + 2 \to 2 \quad \text{für } x \to 0.$$

  Für $x > 0$ gilt:

$$\int_{x}^{1} f(t)\ dt = 2 - 2\sqrt{|x|} \to 2$$

  Also

$$\int_{-1}^{1} f(t)\ dt = 4.$$

- Warnbeispiel: Für die Funktion

$$f(t) = \begin{cases} \frac{1}{t} & \text{für } t \neq 0 \\ 0 & \text{für } t = 0 \end{cases}$$

  auf dem Intervall $[-1, 1]$ gilt für $\varepsilon > 0$:

$$\int_{-1}^{-\varepsilon} f(t)\ dt + \int_{\varepsilon}^{1} f(t)\ dt = \ln|\varepsilon| - \ln 1 + \ln 1 - \ln|\varepsilon| = 0$$

  Daher existiert natürlich auch der Grenzwert für $\varepsilon \to 0$:

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \left[\int_{-1}^{-\varepsilon} f(t)\ dt + \int_{\varepsilon}^{1} f(t)\ dt \right] = 0.$$

Diesen Grenzwert nennt man den Cauchyschen Hauptwert. Das uneigentliche Integral existiert nicht, da die einzelnen Grenzwerte nicht in $\mathbb{R}$ existieren:

$$\int_{-1}^{-\varepsilon} f(t)\ dt \to -\infty \quad \text{für } \varepsilon \to 0 \quad \text{und} \quad \int_{\varepsilon}^{1} f(t)\ dt \to +\infty \quad \text{für } \varepsilon \to 0.$$

- Beispiel:

$$\int_0^\infty e^{-t}\ dt = \lim_{x\to\infty} \int_0^x e^{-t}\ dt = \lim_{x\to\infty} \left[-e^{-x}+1\right]\ dt = 1.$$

- Warnbeispiel

$$\lim_{k\in\mathbb{N},\ k\to\infty} \int_0^{2k\pi} \sin x\ dx = \lim_{k\in\mathbb{N},\ k\to\infty} [-\cos x]\,\Big|_0^{2k\pi} = -1+1 = 0.$$

Trotzdem existiert das uneigentliche Integral $\int_0^\infty \sin x\ dx$ nicht!

$$\lim_{k\in\mathbb{N},\ k\to\infty} \int_0^{2k\pi+\pi} \sin x\ dx = \lim_{k\in\mathbb{N},\ k\to\infty} [-\cos x]\,\Big|_0^{2k\pi+\pi} = 0+1 = 1.$$

Alle Rechenregeln gelten auch für uneigentliche Integrale, vorausgesetzt alle auftretenden uneigentlichen Integrale existieren.

- Beispiel Gamma-Funktion: Für $x \in \mathbb{R} \setminus \{0,-1,-2,\ldots\}$:

$$\Gamma(x) = \int_0^\infty t^{x-1}e^{-t}\ dt.$$

Es gilt (siehe Übung):

$$\int_0^\infty t^n e^{-t}\ dt = \underbrace{-t^n e^{-t}\big|_0^\infty}_{=0} + n\int_0^\infty t^{n-1}e^{-t}\ dt$$

Also: $\Gamma(n+1) = n\cdot\Gamma(n)$. Daraus folgt: $\Gamma(n+1) = n!$. (Beachte $\Gamma(1) = 1$.)

- Substitutionsregel:

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^\infty \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2}\ dx &= \frac{2}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_\mu^\infty e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2}\ dx \\ &= \frac{2}{\sigma\sqrt{2\pi}}\sigma\sqrt{2}\int_0^\infty \frac{1}{2}t^{-1/2}e^{-t}\ dt = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_0^\infty t^{-1/2}e^{-t}\ dt = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = 1,\end{aligned}$$

($\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2 = t$, d.h.: $x = \mu + \sigma\sqrt{2t}$) weil man zeigen kann: $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$.

Kapitel 4

Differentialgleichungen in $\mathbb{R}$

4.1 Grundbegriffe

- Ordnung einer Differentialgleichung: Ordnung der höchsten Ableitung der gesuchten Funktion
- explizite Differentialgleichungen

$$\begin{aligned} \text{1. Ordnung} \quad & y'(x) = f(x, y(x)) \\ \text{2. Ordnung} \quad & y''(x) = f(x, y(x), y'(x)) \\ n\text{-ter Ordnung} \quad & y^{(n)}(x) = f(x, y(x), \ldots, y^{(n-1)}(x)) \end{aligned}$$

  implizite Differentialgleichungen

$$\begin{aligned} \text{1. Ordnung} \quad & F(x, y(x), y'(x)) = 0 \\ \text{2. Ordnung} \quad & F(x, y(x), y'(x), y''(x)) = 0 \\ n\text{-ter Ordnung} \quad & F(x, y(x), \ldots, y^{(n-1)}(x), y^{(n)}(x)) = 0 \end{aligned}$$

- lineare Differentialgleichungen

$$\begin{aligned} \text{1. Ordnung} \quad & a_1(x)y'(x) + a_0(x)y(x) = f(x) \\ \text{2. Ordnung} \quad & a_2(x)y''(x) + a_1(x)y'(x) + a_0(x)y(x) = f(x) \\ n\text{-ter Ordnung} \quad & a_n(x)y^{(n)}(x) + \ldots + a_1(x)y'(x) + a_0(x)y(x) = f(x) \qquad (4.1) \end{aligned}$$

  lineare Differentialgleichungen mit konstanten Koeffizienten

$$\begin{aligned} \text{1. Ordnung} \quad & a_1y'(x) + a_0y(x) = f(x) \\ \text{2. Ordnung} \quad & a_2y''(x) + a_1y'(x) + a_0y(x) = f(x) \\ n\text{-ter Ordnung} \quad & a_ny^{(n)}(x) + \ldots + a_1y'(x) + a_0y(x) = f(x) \end{aligned}$$

  homogene lineare Differentialgleichungen: $f(x) \equiv 0$.

$$a_n(x)y^{(n)}(x) + \ldots + a_1(x)y'(x) + a_0(x)y(x) = 0 \qquad (4.2)$$

- Kurzschreibweise: $F(x, y, \ldots, y^{(n-1)}, y^{(n)}) = 0$

4.2 Einfache Beispiele

1.
$$y'(x) = f(x)$$
Lösungen
$$y(x) = \int f(x)\ dx$$

2.
$$y''(x) = f(x)$$
Lösungen
$$y(x) = \int F(x)\ dx \quad \text{mit} \quad F(x) = \int f(x)\ dx$$

3.
$$y'(x) = y(x)$$
Lösungen
$$y(x) = C \cdot e^x$$

4.
$$y''(x) = y(x)$$
Lösungen
$$y(x) = C_1 \cdot e^x + C_2 \cdot e^{-x} = C_1' \cdot \sinh x + C_2' \cdot \cosh x$$

5.
$$y''(x) = -y(x)$$
Lösungen
$$y(x) = C_1 \cdot \sin x + C_2 \cdot \cos x$$

4.3 Separable Differentialgleichungen

Differentialgleichung:
$$y'(x) = f(x) \cdot g(y(x))$$
Kurzschreibweise
$$y' = f(x) \cdot g(y)$$
Trennung der Variablen:
$$\frac{y'(x)}{g(y(x))} = f(x)$$

Durch Integration erhält man:

$$\int \frac{1}{g(z)}\,dz = \int f(x)\,dx \quad \text{mit} \quad z = y(x)$$

- Beispiel: Lösungen der Differentialgleichung

$$y'(x) + x \cdot y(x)^2 = 0.$$

Trennung der Variablen

$$-\frac{y'(x)}{y(x)^2} = x$$

Integration:

$$\frac{1}{y(x)} = \frac{1}{2}x^2 + C \quad \text{also} \quad y(x) = \frac{2}{x^2 + C'}.$$

4.4 Differentialgleichungen 1. Ordnung mit rechter Seite der Form $f\left(\frac{y}{x}\right)$

Differentialgleichung:

$$y' = f\left(\frac{y}{x}\right)$$

Ansatz $y(x) = x \cdot v(x)$:

$$x \cdot v'(x) + v(x) = f(v(x)).$$

Also

$$v' = \frac{1}{x} \cdot (f(v) - v)$$

Anschließend Trennung der Variablen

- Beispiel: Lösungen der Differentialgleichung $x \cdot y'(x) = 2y(x) + x$.

$$x \cdot y'(x) = 2y(x) + x \quad \text{also} \quad y'(x) = \frac{2y(x) + x}{x} = 1 + 2\,\frac{y(x)}{x}$$

Ansatz: $y(x) = x \cdot v(x)$:

$$x \cdot v'(x) + v(x) = 2v(x) + 1 \quad \text{also} \quad \frac{v'(x)}{v(x) + 1} = \frac{1}{x}$$

Integration:

$$\ln|v(x) + 1| = \ln|x| + C \quad \text{also} \quad v(x) = C' \cdot x - 1$$

Lösung: $y(x) = C' \cdot x^2 - x$.

4.5 Lineare Differentialgleichungen

Allgemeine Eigenschaften linearer Differentialgleichungen:

Satz 4.1. *1. (Superpositionsprinzip) Wenn $y_1(x)$ und $y_2(x)$ Lösungen der homogenen Differentialgleichung* (4.2) *sind, dann ist auch $c_1 \cdot y_1(x) + c_2 \cdot y_2(x)$ eine Lösung der homogenen Differentialgleichung* (4.2)*.*

2. Wenn $y_p(x)$ eine Lösung der inhomogenen Differentialgleichung (4.1) *und $y_{hom}(x)$ eine Lösung der homogenen Differentialgleichung* (4.2) *sind, dann ist $y_p(x)+y_{hom}(x)$ eine Lösung der inhomogenen Differentialgleichung* (4.1)*.*

3. Wenn $y_1(x)$ und $y_2(x)$ Lösungen der inhomogenen Differentialgleichung (4.1) *sind, dann ist $y_2(x) - y_1(x)$ eine Lösung der homogenen Differentialgleichung* (4.2)*.*

4. Jede Lösung $y_{inh}(x)$ der inhomogenen Differentialgleichung lässt sich als Summe einer partikulären Lösung $y_p(x)$ der inhomogenen Differentialgleichung (4.1) *und einer Lösung $y_{hom}(x)$ der homogonen Differentialgleichung* (4.2) *darstellen.*

4.5.1 Lineare Differentialgleichungen 1. Ordnung

In expliziter Form:

$$y'(x) + a(x)y(x) = f(x)$$

- Homogene Differentialgleichung mit konstanten Koeffizienten

  $$y'(x) + a \cdot y(x) = 0$$

  Setzt man den Ansatz $y(x) = e^{\lambda x}$ in die Differentialgleichung ein, erhält man die Bedingung $\lambda = -a$ und daher die Lösung:

  $$\boxed{y(x) = c \cdot e^{-a\,x}}$$

- Homogene Differentialgleichung mit variablen Koeffizienten: separable Differentialgleichung

  $$y'(x) = -a(x) \cdot y(x) \quad \text{also} \quad \frac{y'(x)}{y(x)} = -a(x)$$

  Integration

  $$\ln|y(x)| = -\int a(x)\ dx + C \quad \text{also} \quad \boxed{y(x) = c \cdot e^{-\int a(x)\ dx}}$$

- Bestimmung einer partikulären Lösung der inhomogenen Differentialgleichung durch Ansatz: Für spezielle Funktionen $f(x)$, wie z.B. $f(x) = p(x) \cdot q(x)$ mit $p(x) = x^n$ und $q(x) \in \{e^{\alpha\,x}, \sin(\beta\,x), \cos(\beta\,x)\}$ und Linearkombinationen solcher Funktionen, lässt sich oft eine partikuläre Lösung der selben Form finden:

– Beispiel: Berechnung einer partikulären Lösung der Differentialgleichung

$$y'(x) - y(x) = e^{-2x}$$

durch einen geeigneten Ansatz und Berechnung der allgemeinen Lösung der Differentialgleichung.
Mit dem Ansatz

$$y_p(x) = c_1 \cdot e^{-2x}$$

erhält man die Bedingungen

$$-2c_1 - c_1 = 1 \quad \text{also} \quad y_p(x) = -\frac{1}{3}\, e^{-2x}$$

Allgemeine Lösung:

$$y(x) = -\frac{1}{3}\, e^{-2x} + c \cdot e^{x}.$$

Warnung: Ansatz funktioniert nicht für die rechte Seite $f(x) = e^x$.

- Variation der Konstanten: Allgemeine Strategie, um eine partikuläre Lösung zu finden.

  Ansatz:

  $$y(x) = c(x) \cdot e^{-\int a(x)\ dx}$$

  Durch Einsetzen in die Differentialgleichung erhält man:

  $$c'(x) \cdot e^{-\int a(x)\ dx} + \underbrace{c(x) \cdot e^{-\int a(x)\ dx}(-a(x)) + a(x) \cdot c(x) \cdot e^{-\int a(x)\ dx}}_{=0} = f(x)$$

  Also

  $$c'(x) = f(x) \cdot e^{\int a(x)\ dx}$$

  und daher

  $$c(x) = \int f(x) \cdot e^{\int a(x)\ dx}\ dx$$

  Lösung:

  $$\boxed{y(x) = \left(\int f(x) \cdot e^{\int a(x)\ dx}\ dx\right) \cdot e^{-\int a(x)\ dx}}$$

  – Beispiel: Berechnung einer partikulären Lösung der Differentialgleichung

  $$y'(x) - y(x) = e^{-2x}$$

  durch Variation der Konstanten und Berechnung der allgemeinen Lösung der Differentialgleichung.

$$\int a(x)\;dx = -x,$$

$$\int f(x)\cdot e^{\int a(x)\;dx}\;dx = \int e^{-2x}e^{-x}\;dx = \int e^{-3x}\;dx = -\frac{1}{3}e^{-3x}$$

also

$$y(x) = -\frac{1}{3}e^{-2x} + C\,e^{x} = \left(-\frac{1}{3}e^{-3x} + C\right)e^{x}$$

4.5.2 Lineare Differentialgleichungen 2. Ordnung

- Homogene lineare Differentialgleichungen mit konstanten Koeffizienten:

$$y''(x) + a\cdot y'(x) + b\cdot y(x) = 0$$

Exponentialansatz:

$$y(x) = e^{\lambda\,x}$$

Durch Einsetzen in die Differentialgleichungen erhält man die Bedingung:

$$\lambda^2 + a\cdot\lambda + b = 0 \tag{4.3}$$

Drei Fälle:

- (4.3) besitzt zwei verschiedene reelle Nullstellen λ_1 und λ_2:

$$\lambda_1 = -\frac{a}{2} + \sqrt{\frac{a^2}{4} - b} \quad \text{und} \quad \lambda_2 = -\frac{a}{2} - \sqrt{\frac{a^2}{4} - b}$$

Dann erhält man die Lösungen

$$\boxed{y(x) = c_1\cdot e^{\lambda_1\,x} + c_2\cdot e^{\lambda_2\,x}}$$

- (4.3) besitzt genau eine reelle Nullstelle λ (mit Vielfachheit 2):

$$\frac{a^2}{4} - b = 0 \quad \text{und} \quad \lambda = -\frac{a}{2}$$

Dann erhält man die Lösungen

$$\boxed{y(x) = (c_1 + c_2\cdot x)\cdot e^{\lambda\,x}}$$

Beweis. Für $y(x) = x \cdot e^{\lambda x}$ folgt

$$y'(x) = (1 + \lambda x)e^{\lambda x} \quad \text{und} \quad y''(x) = (2\lambda + \lambda^2 x)e^{\lambda x}$$

und daher

$$\begin{aligned} y''(x) + a \cdot y'(x) + b \cdot y(x) &= \left[2\lambda + \lambda^2 x + a \cdot (1 + \lambda x) + b \cdot x\right] e^{\lambda x} \\ &= \left[2\lambda + a + (\lambda^2 + a \cdot \lambda + b)x\right] e^{\lambda x} = 0 \end{aligned}$$

□

– (4.3) besitzt keine reellen Nullstellen. Dann erhält man die Lösungen

$$\boxed{y(x) = e^{\alpha x} \cdot (c_1 \cdot \cos(\beta x) + c_2 \cdot \sin(\beta x))}$$

mit

$$\alpha = -\frac{a}{2} \quad \text{und} \quad \beta = \sqrt{b - \frac{a^2}{4}}$$

- Inhomogene lineare Differentialgleichungen mit konstanten Koeffizienten:

$$y''(x) + a \cdot y'(x) + b \cdot y(x) = f(x)$$

Wie im Fall linearer Differentialgleichungen 1. Ordnung lässt sich oft für spezielle Funktionen $f(x)$, wie z.B. $f(x) = p(x) \cdot q(x)$ mit $p(x) = x^n$ und $q(x) \in \{e^{\alpha x}, \sin(\beta x), \cos(\beta x)\}$ und Linearkombinationen solcher Funktionen, eine partikuläre Lösung der selben Form finden.

– Beispiel: Berechnung einer partikulären Lösung der Differentialgleichung

$$y''(x) - y'(x) - 2y(x) = 4x^2$$

durch einen geeigneten Ansatz und Berechnung der allgemeinen Lösung der Differentialgleichung.
Ansatz

$$y_p(x) = a_2 x^2 + a_1 x + a_0$$

Durch Einsetzen erhält man die Bedingung:

$$2a_2 - 2a_2 x - a_1 - 2a_2 x^2 - 2a_1 x - 2a_0 = 4x^2$$

Koeffizientenvergleich:

$$-2a_2 = 4, \quad -2a_2 - 2a_1 = 0, \quad 2a_2 - a_1 - 2a_0 = 0.$$

Daraus erhält man:

$$a_2 = -2, \quad a_1 = 2, \quad a_0 = -3, \quad \text{also} \quad y_p(x) = -2x^2 + 2x - 3$$

Lösung der homogenen Differentialgleichung:

$$\lambda^2 - \lambda - 2 = 0, \quad \text{also} \quad \lambda_1 = 2,\ \lambda_2 = -1$$

Allgemeine Lösung:

$$y(x) = -2x^2 + 2x - 3 + c_1 \cdot e^{2x} + c_2 \cdot e^{-x}$$

Allgemeine Technik: Variation der Konstanten

Man wählt den Ansatz:

$$y_p(x) = c_1(x) \cdot y_1(x) + c_2(x) \cdot y_2(x),$$

wobei $y_1(x)$ und $y_2(x)$ zwei (unabhängige) Lösungen der homogenen Differentialgleichung sind, und erhält

$$y_p'(x) = c_1'(x) \cdot y_1(x) + c_1(x) \cdot y_1'(x) + c_2'(x) \cdot y_2(x) + c_2(x) \cdot y_2'(x)$$

Wir fordern nun, dass

$$c_1'(x) \cdot y_1(x) + c_2'(x) \cdot y_2(x) = 0$$

Dann folgt

$$y_p'(x) = c_1(x) \cdot y_1'(x) + c_2(x) \cdot y_2'(x)$$

und

$$y_p''(x) = c_1'(x) \cdot y_1'(x) + c_1(x) \cdot y_1''(x) + c_2'(x) \cdot y_2'(x) + c_2(x) \cdot y_2''(x)$$

Also

$$\begin{aligned} y_p''(x) + a \cdot y_p'(x) + b \cdot y_p(x) &= c_1'(x) \cdot y_1'(x) + c_2'(x) \cdot y_2'(x) \\ &+ c_1(x) \cdot \underbrace{[y_1''(x) + a \cdot y_1'(x) + b\, y_1(x)]}_{=0} + c_2(x) \cdot \underbrace{[y_2''(x) + a \cdot y_2'(x) + b\, y_2(x)]}_{=0} \end{aligned}$$

Somit genügt es, $c_1(x)$ und $c_2(x)$ so zu wählen, dass

$$\begin{aligned} c_1'(x) \cdot y_1(x) + c_2'(x) \cdot y_2(x) &= 0 \\ c_1'(x) \cdot y_1'(x) + c_2'(x) \cdot y_2'(x) &= f(x) \end{aligned}$$

– Beispiel: Berechnung einer partikulären Lösung der Differentialgleichung

$$y''(x) - y'(x) - 2y(x) = 4x^2$$

durch Variation der Konstanten und Berechnung der allgemeinen Lösung der Differentialgleichung.

$$y_1(x) = e^{2x}, \quad y_2(x) = e^{-x}$$

Bedingungen an $c_1(x)$ und $c_2(x)$:

$$\begin{aligned} c_1'(x) \cdot e^{2x} + c_2'(x) \cdot e^{-x} &= 0 \\ 2c_1'(x) \cdot e^{2x} - c_2'(x) \cdot e^{-x} &= 4x^2 \end{aligned}$$

Durch Addition folgt:

$$c_1'(x) = \frac{4}{3}x^2 e^{-2x} \quad \text{und} \quad c_2'(x) = -c_1'(x)e^{3x} = -\frac{4}{3}x^2 e^x$$

Also (partielle Integration):

$$c_1(x) = -\frac{1}{3}(2x^2 + 2x + 1)e^{-2x}, \quad c_2(x) = -\frac{4}{3}(x^2 - 2x + 2)e^x$$

und somit

$$y_p(x) = -\frac{1}{3}(2x^2 + 2x + 1)e^{-2x}e^{2x} - \frac{4}{3}(x^2 - 2x + 2)e^x e^{-x} = -2x^2 + 2x - 3.$$

4.6 Zusatzbedingungen

Wir haben an Beispielen gesehen: Die allgemeine Lösung einer Differentialgleichung der Ordnung n besitzt n frei wählbare Parameter. In Anwendungen werden diese Parameter durch Zusatzbedingungen festgelegt:

- Anfangsbedingungen: Anfangswertproblem
  - Beispiel:

$$\begin{aligned} x'(t) &= f(t, x(t)) \quad \text{für alle } t > 0, \\ x(0) &= x_0 \end{aligned}$$

  Beispiel:

$$\begin{aligned} x''(t) &= f(t, x(t), x'(t)) \quad \text{für alle } t > 0, \\ x(0) &= x_0, \\ x'(0) &= v_0 \end{aligned}$$

- Randbedingungen: Randwertproblem
  - Beispiel:

$$\begin{aligned} y''(x) &= f(x, y(x), y'(x)) \quad \text{für alle } x \in (a, b), \\ y(a) &= y_a, \\ y(b) &= y_b \end{aligned}$$

4.7 Einige Anwendungen

- Beispiel: Bewegung mit konstanter Geschwindigkeit v:

$$x'(t) = v$$

$$x(t) = \int v\ dt = x_0 + v \cdot t$$

- Beispiel: Bewegung mit konstanter Beschleunigung a:

$$x''(t) = a$$

$$\begin{aligned} x'(t) &= \int v\ dt = v_0 + a \cdot t \\ x(t) &= \int (v_0 + a \cdot t)\ dt = x_0 + v_0 \cdot t + \frac{a}{2} t^2 \end{aligned}$$

- Beispiel: Ungedämpfter harmonischer Oszillator:

$$mx''(t) = -kx(t).$$

Also

$$x''(t) + \frac{k}{m} x(t) = 0$$

Charakteristische Gleichung

$$\lambda^2 + \frac{k}{m} = 0, \quad d = -\frac{k}{m} < 0, \quad \alpha = 0, \quad \beta = \sqrt{|d|} = \sqrt{\frac{k}{m}} = \omega_0.$$

Lösungen

$$x(t) = c_1 \cos(\omega_0 t) + c_2 \sin(\omega_0 t)$$

Für die Anfangsbedingungen:

$$x(0) = x_0 \quad \text{und} \quad x'(0) = v_0$$

erhält man:

$$c_1 = x_0, \quad \omega_0 \cdot c_2 = v_0, \quad \text{also} \quad x(t) = x_0 \cos(\omega_0 t) + \frac{v_0}{\omega_0} \sin(\omega_0 t).$$

- Beispiel: Ungedämpfter harmonischer Oszillator mit periodischer Anregung:

$$mx''(t) = -kx(t) + F_0 \cos(\omega\, t).$$

Partikuläre Lösung: Ansatz

$$x_p(t) = A\,\cos(\omega\, t)$$

Durch Einsetzen erhält man:

$$m\,\left[-A\omega^2 \cos(\omega\, t)\right] + k\,A\,\cos(\omega\, t) = F_0\,\cos(\omega\, t)$$

Koeffizientenvergleich:

$$-m\omega^2\,A + k\,A = F_0.$$

Also, falls $\omega^2 \neq \frac{k}{m} = \omega_0^2$,

$$A = \frac{F_0}{k - m\,\omega^2} = \frac{F_0}{m\,(\omega_0^2 - \omega^2)}.$$

Allgemeine Lösung:

$$x(t) = c_1 \cos(\omega_0\, t) + c_2\,\sin(\omega_0\, t) + \frac{F_0}{m\,(\omega_0^2 - \omega^2)} \cos(\omega\, t)$$

Für die Anfangsbedingungen:

$$x(0) = 0 \quad \text{und} \quad x'(0) = 0$$

erhält man:

$$\begin{aligned} x(t) &= \frac{F_0}{m\,(\omega_0^2 - \omega^2)} \left[\cos(\omega\, t) - \cos(\omega_0\, t)\right] \\ &= \frac{2F_0}{m\,(\omega^2 - \omega_0^2)}\,\sin\left(\frac{\omega - \omega_0}{2}\,t\right)\,\sin\left(\frac{\omega + \omega_0}{2}\,t\right) \end{aligned}$$

Im Fall $\omega = \omega_0$ erhält man eine partikuläre Lösung durch Variation der Konstanten:

$$x_p(t) = c_1(t)\,\cos(\omega_0\, t) + c_2(t)\,\sin(\omega_0\, t)$$

mit

$$\begin{aligned} c_1'(t) \cos(\omega_0\, t) + c_2'(t)\,\sin(\omega_0\, t) &= 0 \\ -\omega_0\, c_1'(t) \sin(\omega_0\, t) + \omega_0\, c_2'(t)\,\cos(\omega_0\, t) &= \frac{F_0}{m} \cos(\omega_0\, t) \end{aligned}$$

Daraus folgt

$$c_1'(t) = -\frac{F_0}{m\,\omega_0} \cos(\omega_0\, t) \sin(\omega_0\, t) \quad \text{und} \quad c_2'(t) = \frac{F_0}{m\,\omega_0} \cos^2(\omega_0\, t)$$

Also

$$c_1(t) = \frac{F_0}{2m\,\omega_0^2}\,\cos^2(\omega_0\,t) \quad \text{und} \quad c_2(t) = \frac{F_0}{2m\,\omega_0^2}\,[\omega_0\,t + \sin(\omega_0\,t)\,\cos(\omega_0\,t)]$$

und daher

$$x_p(t) = \frac{F_0}{2m\,\omega_0^2}\,[\omega_0\,t\,\sin(\omega_0\,t) + \cos(\omega_0\,t)]$$

Für die Anfangsbedingungen:

$$x(0) = 0 \quad \text{und} \quad x'(0) = 0$$

erhält man:

$$x(t) = \frac{F_0}{2m\,\omega_0}\,t\,\sin(\omega_0\,t)$$

Kapitel 5

Komplexe Zahlen

- Die Menge der komplexen Zahlen: $\mathbb{C} = \{(x, y) \colon x, y \in \mathbb{R}\}$.

  Sei $z = (x, y)$ eine komplexe Zahl.

  - x heißt Realteil von z, y heißt Imaginärteil von z. Schreibweise: $x = \operatorname{Re} z$, $y = \operatorname{Im} z$.
  - Grafische Darstellung als Punkt in der „komplexen“ Ebene. Die x-Achse heißt die reelle Achse, die y-Achse heißt die imaginäre Achse.
  - Alternative Schreibweisen einer komplexen Zahl $z = (x, y)$: $z = x + i\,y$, $z = x + y\,i$, $z = x + i \cdot y$, $z = x + y \cdot i$.
  - Für $x \in \mathbb{R}$ unterscheiden wir nicht zwischen x und $x + 0 \cdot i$, also nicht zwischen der reellen Zahl x und $(x, 0) \in \mathbb{C}$. In diesem Sinne gilt: $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$.

- Operationen: Addition und Multiplikation von zwei komplexen Zahlen $z_1 = (x_1, y_1)$ und $z_2 = (x_2, y_2)$:

$$\begin{aligned} z_1 + z_2 &= (x_1 + x_2, y_1 + y_2) \\ z_1 \cdot z_2 &= (x_1 \cdot x_2 - y_1 \cdot y_2, x_1 \cdot y_2 + x_2 \cdot y_1) \end{aligned}$$

  Motivation: Bei Verwendung der alternativen Schreibweise $z_1 = x_1 + y_1 \cdot i$ und $z_2 = x_2 + y_2 \cdot i$ würde man für die Addition und Multiplikation erwarten, wenn man die üblichen Rechenregeln unterstellt:

$$z_1 + z_2 = (x_1 + y_1 \cdot i) + (x_2 + y_2 \cdot i) = (x_1 + x_2) + (y_1 + y_2) \cdot i$$

  und, wenn man die zusätzliche Regel $i^2 = i \cdot i = -1$ vereinbart:

$$\begin{aligned} z_1 \cdot z_2 &= (x_1 + y_1 \cdot i) \cdot (x_2 + y_2 \cdot i) = x_1 \cdot x_2 + y_1 \cdot y_2 \cdot i^2 + (x_1 \cdot y_2 + x_2 \cdot y_1) \cdot i \\ &= (x_1 \cdot x_2 - y_1 \cdot y_2) + (x_1 \cdot y_2 + x_2 \cdot y_1) \cdot i \end{aligned}$$

- Man überprüft leicht, dass die Addition und Multiplikation von komplexen Zahlen die selben Rechenregeln erfüllen wie die Addition und Multiplikation reeller Zahlen.

- Um die Subtraktion und die Division zweier komplexer Zahlen einführen zu können, muss man nur vereinbaren, was man unter $-z$ und $\frac{1}{z}$ versteht. Wir erwarten natürlich

$$z + (-z) = 0 \quad \text{und} \quad z \cdot \frac{1}{z} = 1.$$

Wie man leicht nachrechnet, gelten diese Eigenschaften für jede Zahl $z = (x, y)$ mit

$$-z = (-x, -y) \quad \text{und für } z \neq 0: \quad \frac{1}{z} = \left(\frac{x}{x^2 + y^2}, \frac{-y}{x^2 + y^2} \right)$$

Subtraktion: $z_1 - z_2 = z_1 + (-z_2)$. Multiplikation $\frac{z_1}{z_2} = z_1 \cdot \frac{1}{z_2}$.

- Mit den getroffenen Vereinbarungen gilt natürlich:

$$z = (x, y) = (x, 0) + (0, y) = (x, 0) + (y, 0) \cdot (0, 1) = x + y \cdot i \quad \text{mit} \quad i = (0, 1).$$

und

$$i^2 = i \cdot i = (0, 1) \cdot (0, 1) = (-1, 0) = -1$$

- Zwei weitere wichtige Operationen für eine komplexe Zahl $z = (x, y) = x + y \cdot i$:

$$\bar{z} = (x, -y) = x - y \cdot i \quad \text{und} \quad |z| = \sqrt{x^2 + y^2}$$

$\bar{z}$ heißt die zu z konjugiert komplexe Zahl, $|z|$ heißt der Betrag von z. Man sieht sofort:

$$\bar{z} \cdot z = |z|^2 \quad \text{und somit} \quad \frac{1}{z} = \frac{\bar{z}}{\bar{z} \cdot z} = \frac{\bar{z}}{|z|^2}$$

und

$$\operatorname{Re} z = \frac{1}{2}(z + \bar{z}), \quad \operatorname{Im} z = \frac{1}{2i}(z - \bar{z}).$$

5.1 Quadratische Gleichungen in $\mathbb{C}$

Seien $p, q \in \mathbb{R}$ mit $d = \frac{p^2}{4} - q < 0$. Dann besitzt die Gleichung

$$z^2 + p \cdot z + q = 0$$

keine reelle Lösung.

- Spezialfall: $p = 0$, $q = 1$, also

$$z^2 + 1 = 0$$

Mit $z = (x, y)$ erhält man

$$(x^2 - y^2, 2xy) + 1 = 0$$

Also

$$x^2 - y^2 + 1 = 0 \quad \text{und} \quad 2xy = 0$$

Lösungen:

$$x = 0 \quad \text{und} \quad y = \pm 1 \quad \text{also} \quad z = \pm i.$$

- Allgemeiner Fall ($p, q \in \mathbb{R}$)

$$z^2 + p \cdot z + q = 0$$

$\iff$

$$z^2 + p \cdot z + \frac{p^2}{4} + q - \frac{p^2}{4} = 0$$

$\iff$

$$\left(z + \frac{p}{2}\right)^2 + q - \frac{p^2}{4} = 0$$

$\iff$

$$\left(\frac{z + \frac{p}{2}}{\sqrt{q - \frac{p^2}{4}}}\right)^2 + 1 = 0$$

$\iff$

$$\frac{z + \frac{p}{2}}{\sqrt{q - \frac{p^2}{4}}} = \pm i$$

$\iff$

$$z = -\frac{p}{2} \pm i \sqrt{q - \frac{p^2}{4}}.$$

5.2 Erweiterung der Exponentialfunktion auf $\mathbb{C}$

Wir betrachten die Taylor-Reihe der Exponentialfunktion für $x \in \mathbb{R}$:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} x^n$$

Für $x = i\,y$, dann erhält man

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} x^n = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k)!}(iy)^{2k} + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)!}(iy)^{2k+1} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k)!} y^{2k} + i \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} y^{2k+1}$$

Das motiviert die folgende Erweiterung der Exponentialfunktion

Definition 5.1. *1. Für rein imaginäre Zahlen:*

$$e^{iy} = \cos y + i\, \sin y$$

2. Für komplexe Zahlen $z = x + i\,y \in \mathbb{C}$:

$$e^z = e^x \cdot e^{iy} = e^x \cdot (\cos y + i\, \sin y).$$

Es gelten analoge Rechenregeln wie im reellen Fall, z.B.:

$$\boxed{e^{z_1+z_2} = e^{z_1} \cdot e^{z_2} \quad \text{für alle } z_1, z_2 \in \mathbb{C}}. \tag{5.1}$$

Das folgt leicht aus der entsprechenden Eigenschaft der reellen Exponentialfunktion und der Additionstheoreme der Winkelfunktionen.

Weitere Rechenregeln:

- Für $x \in \mathbb{R}$ gilt:

$$\boxed{\left|e^{i\,x}\right| = 1}$$

- Für $x \in \mathbb{R}$ gilt:

$$\boxed{\cos x = \frac{1}{2}\left(e^{i\,x} + e^{-i\,x}\right)} \quad \text{und} \quad \boxed{\sin x = \frac{1}{2\,i}\left(e^{i\,x} - e^{-i\,x}\right)}$$

Die Hyperbelfunktionen wurden mit Hilfe der Exponentialfunktion eingeführt. Daher lassen sie sich ebenfalls auf $\mathbb{C}$ erweitern. Die obige Darstellung der Winkelfunktionen mit Hilfe der Exponentialfunktion erlaubt es auch, die Winkelfunktionen auf $\mathbb{C}$ zu erweitern.

Definition 5.2.

$$\cosh z = \frac{1}{2}\left(e^{z} + e^{-z}\right), \quad \sinh z = \frac{1}{2}\left(e^{z} - e^{-z}\right) \quad \textit{für} \quad z \in \mathbb{C}.$$

$$\cos z = \frac{1}{2}\left(e^{i\,z} + e^{-i\,z}\right), \quad \sin z = \frac{1}{2\,i}\left(e^{i\,z} - e^{-i\,z}\right) \quad \textit{für} \quad z \in \mathbb{C}.$$

5.3 Polarform

Satz 5.1. *Jede komplexe Zahl $z = x + i\,y \neq 0$ lässt sich folgendermaßen darstellen:*

$$z = r \cdot e^{i\,\varphi} = r \cdot (\cos\varphi + i\,\sin\varphi) \tag{5.2}$$

mit

$$r = |z| = \sqrt{x^2 + y^2} \quad \textit{und} \quad \varphi = \arg(z) = \begin{cases} \arctan\left(\frac{y}{x}\right) & \textit{für } x > 0, \\ \arctan\left(\frac{y}{x}\right) + \pi & \textit{für } x < 0,\ y \geq 0, \\ \arctan\left(\frac{y}{x}\right) - \pi & \textit{für } x < 0,\ y < 0, \\ \frac{\pi}{2} & \textit{für } x = 0,\ y > 0, \\ -\frac{\pi}{2} & \textit{für } x = 0,\ y < 0 \end{cases}$$

Die Darstellung ist im folgenden Sinne eindeutig: Falls für ein $z \in \mathbb{C}$ die Darstellung (5.2) *für $r > 0$ und $\varphi \in \mathbb{R}$ gilt, dann folgt*

$$r = |z| \quad \textit{und} \quad \varphi = \arg(z) + 2k\pi \quad \textit{mit } k \in \mathbb{Z}.$$

Beweis. Untersuchung von Lösungen $r \in (0, \infty)$ und $\varphi \in (-\pi, \pi]$ der Gleichungen

$$r \cdot \cos\varphi = x, \quad r \cdot \sin\varphi = y$$

für gegebene Werte $x, y \in \mathbb{R}$ mit $(x, y) \neq 0$.

Bestimmung von r:

$$x^2 + y^2 = r^2 \cdot \left(\cos^2\varphi + \sin^2\varphi\right) = r^2, \quad \text{also} \quad r = \sqrt{x^2 + y^2} = |z|.$$

Bestimmung von $\varphi \in (-\pi, \pi]$: Sei $x \neq 0$. Notwendige Bedingung:

$$\tan\varphi = \frac{y}{x}. \tag{5.3}$$

Dafür gibt es folgende Lösungen in $(-\pi, \pi]$:

$$\arctan\frac{y}{x} \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$$

und zusätzlich

$$\arctan\frac{y}{x} - \pi \in \left(-\pi, -\frac{\pi}{2}\right) \text{ falls } \frac{y}{x} > 0. \qquad \arctan\frac{y}{x} + \pi \in \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right] \text{ falls } \frac{y}{x} \leq 0,$$

Aus (5.3) folgt:

$$\cos^2\varphi = \frac{1}{1 + \tan^2\varphi} = \frac{x^2}{x^2 + y^2}, \quad \sin^2\varphi = \frac{\tan^2\varphi}{1 + \tan^2\varphi} = \frac{y^2}{x^2 + y^2}.$$

Also

$$r\,|\cos\varphi| = |x|, \quad r\,|\sin\varphi| = |y|.$$

Bis auf das Vorzeichen sind also die Gleichungen erfüllt. Welche der 3 Kandidaten für φ die richtigen Vorzeichen ergeben, ist einfach zu überprüfen. Der Sonderfall $x = 0$ lässt sich leicht überprüfen. $\square$

Beispiel: Einheitswurzeln. Mit Hilfe der Polarform lassen sich leicht die Lösungen der Gleichung

$$z^n = 1$$

für $n \in \mathbb{N}$ bestimmen. Mit $z = r \cdot e^{i\varphi}$ erhalten wir aus (5.1)

$$r^n \cdot e^{i\,n\,\varphi} = 1.$$

Also

$$r^n = 1 \quad \text{und} \quad n\,\varphi = 2k\pi. \quad \text{d.h.} \quad r = 1 \quad \text{und} \quad \varphi = \frac{2k\pi}{n}.$$

Lösungen

$$z_k = e^{i\frac{2k\pi}{n}} = \cos\left(\frac{2k\pi}{n}\right) + i\,\sin\left(\frac{2k\pi}{n}\right) \quad \text{für } k = 0, 1, \ldots, n-1.$$

$n = 3$:

$$\begin{aligned} z_0 &= 1 \\ z_1 &= \cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) + i\,\sin\left(\frac{2\pi}{3}\right) = \frac{-1+i\sqrt{3}}{2} \\ z_2 &= \cos\left(\frac{4\pi}{3}\right) + i\,\sin\left(\frac{4\pi}{3}\right) = \frac{-1-i\sqrt{3}}{2} \end{aligned}$$

5.4 Erweiterung der Ableitung

Der Begriff der Ableitung lässt sich auf Funktionen $f\colon X \to \mathbb{C}$ mit $X \subset \mathbb{R}$ erweitern:

Definition 5.3. *Sei $f\colon X \longrightarrow \mathbb{C}$ eine Funktion und $x_0 \in X$ ein nicht-isolierter Punkt. Dann heißt f im Punkt x_0 differenzierbar, falls der Grenzwert*

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

existiert. In diesem Fall wird der Grenzwert mit $f'(x_0)$ bezeichnet und heißt Ableitung von f in x_0.

Es gelten die analogen Rechenregeln: Additionsregel, Produktregel, ...

Folgerung: Die Ableitung von $f\colon X \to \mathbb{C}$ mit $X \subset \mathbb{R}$ und $f(x) = g(x) + i\,h(x)$ mit $g\colon X \to \mathbb{R}$, $h\colon X \to \mathbb{R}$ ist durch

$$f'(x) = g'(x) + i\,h'(x).$$

gegeben.

Beispiel: Für die Ableitung der Funktion $y(x) = e^{\lambda x}$ mit $\lambda = \alpha + i\,\beta \in \mathbb{C}$ gilt:

$$\begin{aligned} y'(x) &= [e^{\alpha x} \cdot (\cos(\beta\,x) + i\,\sin(\beta\,x))]' \\ &= (e^{\alpha x} \cdot \cos(\beta\,x))' + i\,(e^{\alpha x} \sin(\beta\,x))' \\ &= \alpha\,e^{\alpha x} \cdot \cos(\beta\,x) - \beta\,e^{\alpha x} \cdot \sin(\beta\,x) + i\,[\alpha\,e^{\alpha x} \cdot \sin(\beta\,x) + \beta\,e^{\alpha x} \cdot \cos(\beta\,x)] \\ &= (\alpha + i\,\beta) \cdot e^{\alpha x} \cdot (\cos(\beta\,x) + i\,\sin(\beta\,x)) = \lambda\,y(x). \end{aligned}$$

Also gilt auch für $\lambda \in \mathbb{C}$:

$$\boxed{\left(e^{\lambda x}\right)' = \lambda \cdot e^{\lambda x}}$$

5.5 Lineare Differentialgleichungen 2. Ordnung: Nachtrag

Durch Exponentialansatz: $y(x) = e^{\lambda x}$ mit $\lambda \in \mathbb{C}$ führt (wie im reellen Fall) zu Lösungen, falls λ eine Lösung der charakteristischen Gleichung

$$\lambda^2 + a \cdot \lambda + b = 0$$

ist. Für den Fall $b > \frac{a^2}{4}$ erhalten wir ein Paar konjugiert komplexer Lösungen:

$$\lambda_1 = \underbrace{-\frac{a}{2}}_{=\alpha} + i \underbrace{\sqrt{b - \frac{a^2}{4}}}_{=\beta} \quad \text{und} \quad \lambda_2 = \overline{\lambda_1} = \underbrace{-\frac{a}{2}}_{=\alpha} - i \underbrace{\sqrt{b - \frac{a^2}{4}}}_{=\beta}$$

Nach dem Superpositionsprinzip erhalten wir damit Lösungen der Form

$$y(x) = c_1 \, e^{\lambda_1 \, x} + c_2 \, e^{\lambda_2 \, x}$$

Im Speziellen erhält man die Lösungen:

$$\frac{1}{2}(e^{\lambda_1 \, x} + e^{\lambda_2 x}) = \frac{1}{2}(e^{(\alpha + i\beta) \, x} + e^{(\alpha - i\beta) \, x}) = e^{\alpha \, x} \, \frac{1}{2}(e^{i\beta \, x} + e^{-i\beta \, x}) = e^{\alpha \, x} \, \cos(\beta \, x) = \mathrm{Re}\left(e^{\lambda_1 \, x}\right)$$
$$\frac{1}{2i}(e^{\lambda_1 \, x} - e^{\lambda_2 x}) = \frac{1}{2i}(e^{(\alpha + i\beta) \, x} - e^{(\alpha - i\beta) \, x}) = e^{\alpha \, x} \, \frac{1}{2i}(e^{i\beta \, x} - e^{-i\beta \, x}) = e^{\alpha \, x} \, \sin(\beta \, x) = \mathrm{Im}\left(e^{\lambda_1 \, x}\right)$$

und damit auch alle Linearkombinationen als Lösungen:

$$y(x) = e^{\alpha \, x} \, (\tilde{c}_1 \, \cos(\beta \, x) + \tilde{c}_1 \, \sin(\beta \, x))$$

Kapitel 6

Mehrdimensionale Differentialrechnung

6.1 Der Vektorraum $\mathbb{R}^n$

Vereinbarung $x \in \mathbb{R}^n$ ist ein Spaltenvektor.

$$\mathbb{R}^n = \{x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)^T : x_1, x_2, \ldots, x_n \in \mathbb{R}\}$$

Operationen:

- Addition und skalare Multiplikation:

$$(x_1, x_2, \ldots, x_n)^T + (y_1, y_2, \ldots, y_n)^T = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, \ldots, x_n + y_n)^T$$
$$c\,(x_1, x_2, \ldots, x_n)^T = (c\,x_1, c\,x_2, \ldots, c\,x_n)^T$$

- Skalarprodukt:

$$x \cdot y = x_1\,y_1 + x_2\,y_2 + \ldots + x_n\,y_n \in \mathbb{R}$$

- Vektorprodukt in $\mathbb{R}^3$:

$$x \times y = \begin{pmatrix} x_2\,y_3 - x_3\,y_2 \\ x_3\,y_1 - x_1\,y_3 \\ x_1\,y_2 - x_2\,y_1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$$

- Norm:

$$\|x\| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2}$$

  Es gelten folgende Eigenschaften der Norm:

  1. $\|x\| \geq 0$ und $\|x\| = 0$ genau dann, wenn $x = 0$.
  2. Homogenität

$$\|c\,x\| = |c|\,\|x\|$$

3. Dreiecksungleichung
$$\|x+y\| \leq \|x\| + \|y\|$$

- $\mathbb{R}^{m\times n}$: Die Menge der reellen $m \times n$-Matrizen. $\mathbb{R}^n = \mathbb{R}^{n\times 1}$.

- Vereinbarung: Der Definitionsbereich X ist eine offene Menge, d.h. zu jedem Element von X gibt es eine Umgebung, die ebenfalls noch in X liegt. (Jedes Element von X ist ein innerer Punkt.)

  Funktionen $f\colon X \to \mathbb{R}^m$ mit Definitionsbereich $X \subset \mathbb{R}^n$.

  $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)^T \mapsto (f_1(x), f_2(x), \dots, f_m(x))^T$. $f_j(x)$ Komponentenfunktionen.

  Vereinbarung zur Schreibweise $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$.

- Graphische Darstellung von mehrdimensionalen Funktionen.

  1. $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$: Graph, Niveaulinien in $\mathbb{R}^2$.
     Beispiel: $f(x,y) = x^2 + y^2$.
  2. $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$: Niveauflächen in $\mathbb{R}^3$.
     Beispiel: $f(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2$.
  3. $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$: (Graph,) Bildmenge als parametrisierte Kurve in $\mathbb{R}^2$.
     Beispiel: $f(t) = (\cos t, \sin t)^T$
  4. $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$: Bildmenge als parametrisierte Kurve in $\mathbb{R}^3$.
     Beispiel: $f(t) = (\cos t, \sin t, t)^T$
  5. $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$: Bildmenge als parametrisierte Oberfläche in $\mathbb{R}^3$ oder Gitterlinienbild der Bildmenge in $\mathbb{R}^3$.
     Beispiel: $f(x,y) = (x, y, \sqrt{x^2+y^2})^T$.
  6. $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ und $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$: Richtungsfeld
     Beispiel: $\vec{f}(\vec{x}) = -G\,\frac{m_1\,m_2}{\|x\|^2}\,\vec{x}$

6.2 Ableitungsbegriffe

Eine direkte Übertragung des Begriffes Differenzenquotient ist nur im Spezialfall $n = 1$ möglich. Sei I ein Intervall in $\mathbb{R}$.

Definition 6.1. *Eine Funktion $f\colon I \to \mathbb{R}^m$ heißt im Punkt $x_0 \in I$ differenzierbar, falls der Grenzwert*
$$f'(x_0) = \lim_{h\to 0} \frac{1}{h}\,(f(x_0+h) - f(x_0)) \in \mathbb{R}^m$$
existiert. $f'(x_0)$ heißt die Ableitung von f im Punkt x_0.

Geometrische Interpretation für $m = 2$ und $m = 3$: Tangentialvektor der parametrisierten Kurve im Punkt x_0.

Für $n > 1$ ist diese Definition der Ableitung nicht möglich, da keine vernünftige Division von Vektoren zur Verfügung steht.

Definition 6.2. *Eine Funktion $f\colon X \to \mathbb{R}^m$ heißt im Punkt $x_0 \in X$ differenzierbar, falls es eine Matrix $f'(x_0) \in \mathbb{R}^{m\times n}$ gibt, sodass*

$$f(x_0 + h) = f(x_0) + f'(x_0)\, h + r(h)$$

mit

$$\lim_{h\to 0} \frac{r(h)}{\|h\|} = 0.$$

$f'(x_0)$ ist durch diese Definition eindeutig bestimmt und heißt die Ableitung von f in x_0.

Alternative Begriffe und Schreibweisen: totale Ableitung, Fréchet-Ableitung, $Df(x_0)$.

Geometrische Interpretation für $n = 2$ und $m = 1$: Der Graph der Funktion $x \mapsto f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$ ist die Tangentialebene an den Graphen der Funktion $f(x)$ im Punkt x_0.

Definition 6.3. *Eine Funktion $f\colon X \to \mathbb{R}^m$ heißt im Punkt $x \in X$ partiell nach x_i differenzierbar, falls der Grenzwert*

$$\begin{aligned}&\frac{\partial f}{\partial x_i}(x_1, x_2, \ldots, x_n)\\ &\quad = \lim_{t\to 0} \frac{1}{t}\big(f(x_1, \ldots, x_{i-1}, x_i + t, x_{i+1} \ldots, x_n) - f(x_1, \ldots, x_{i-1}, x_i, x_{i+1} \ldots, x_n)\big)\end{aligned}$$

existiert. $\frac{\partial f}{\partial x_i}(x) \in \mathbb{R}^m$ heißt die partielle Ableitung von f nach x_i in x.

Alternative Schreibweise: $f_{x_i}(x)$.

Definition 6.4. *Richtungsableitung: Sei $v \in \mathbb{R}^n$ mit $v \neq 0$.*

$$\frac{\partial f}{\partial v}(x) = \lim_{t\to 0} \frac{1}{t}\big(f(x + t\,v) - f(x)\big)$$

Alternative Schreibweisen: $D_v f(x)$, $f_v(x)$.

Wie man leicht sieht, lassen sich Ableitungen komponentenweise berechnen:

$$f'(x) = \begin{pmatrix} f_1'(x) \\ f_2'(x) \\ \vdots \\ f_m'(x) \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \frac{\partial f}{\partial v}(x) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial v}(x) \\ \frac{\partial f_2}{\partial v}(x) \\ \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial v}(x) \end{pmatrix}$$

Satz 6.1. *Falls $f\colon X \to \mathbb{R}^m$ im Punkt $x_0 \in X$ differenzierbar ist, dann existieren alle Richtungsableitungen und es gilt:*

$$\frac{\partial f}{\partial v}(x_0) = f'(x_0)\, v.$$

Beweis. Wenn f im Punkt x_0 differenzierbar ist, dann gilt ($h = tv$)

$$f(x_0 + t\, v) = f(x_0) + t\, f'(x_0)v + r(t\, v)$$

und somit

$$\lim_{t\to 0}\left[\frac{1}{t}(f(x_0 + t\, v) - f(x_0)) - f'(x_0)v\right] = \lim_{t\to 0}\frac{r(t\, v)}{t} = \lim_{t\to 0}\frac{r(t\, v)}{\|t\, v\|}\,\frac{|t|}{t}\,\|v\| = 0.$$

□

Damit erhält man im Speziellen (Jacobi-Matrix):

$$f'(x_0) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(x_0) & \frac{\partial f_1}{\partial x_2}(x_0) & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(x_0) \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1}(x_0) & \frac{\partial f_2}{\partial x_2}(x_0) & \dots & \frac{\partial f_2}{\partial x_n}(x_0) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1}(x_0) & \frac{\partial f_m}{\partial x_2}(x_0) & \dots & \frac{\partial f_m}{\partial x_n}(x_0) \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{m\times n}$$

und daher auch:

$$\frac{\partial f}{\partial v}(x_0) = \sum_{i=1}^{n} v_i \frac{\partial f}{\partial x_i}(x_0).$$

Für $m = 1$ erhält man:

$$f'(x_0) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x_1}(x_0) & \frac{\partial f}{\partial x_2}(x_0) & \dots & \frac{\partial f}{\partial x_n}(x_0) \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{1\times n}$$

Satz 6.2. *Falls alle partiellen Ableitungen von $f\colon X \to \mathbb{R}^m$ in einer Umgebung von $x_0 \in X$ existieren und im Punkt x_0 stetig sind, dann ist f im Punkt x_0 differenzierbar.*

Definition 6.5. 1. *Für $f\colon X \to \mathbb{R}$ mit $X \subset \mathbb{R}^n$ definiert man den Gradienten durch:*

$$\operatorname{grad} f(x) = \nabla f(x) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x_1}(x) \\ \frac{\partial f}{\partial x_2}(x) \\ \vdots \\ \frac{\partial f}{\partial x_n}(x) \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$$

2. *Für $\vec{f}\colon X \to \mathbb{R}^n$ mit $X \subset \mathbb{R}^n$ definiert man die Divergenz durch:*

$$\operatorname{div} \vec{f}(x) = \nabla \cdot \vec{f}(x) = \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(x) + \frac{\partial f_2}{\partial x_2}(x) + \ldots + \frac{\partial f_n}{\partial x_n}(x) \in \mathbb{R}$$

3. Für $\vec{f}\colon X \to \mathbb{R}^3$ mit $X \subset \mathbb{R}^3$ definiert man die Rotation durch:

$$\operatorname{rot} \vec{f}(x) = \nabla \times \vec{f}(x) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_3}{\partial x_2}(x) - \frac{\partial f_2}{\partial x_3}(x) \\ \frac{\partial f_1}{\partial x_3}(x) - \frac{\partial f_3}{\partial x_1}(x) \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1}(x) - \frac{\partial f_1}{\partial x_2}(x) \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$$

Es gilt offensichtlich:

$$\operatorname{grad} f(x) = f'(x)^T \quad \text{und} \quad \frac{\partial f}{\partial v}(x) = v \cdot \operatorname{grad} f(x).$$

und

$$\operatorname{div} \vec{f}(x) = \operatorname{Spur} \vec{f}\,'(x), \quad \Omega(\operatorname{rot} \vec{f}(x)) = \vec{f}\,'(x) - \vec{f}\,'(x)^T$$

mit

$$\operatorname{Spur}(M) = m_{11} + m_{22} + \ldots + m_{nn} \quad \text{und} \quad \Omega(\vec{v}) = \begin{pmatrix} 0 & -v_3 & v_2 \\ v_3 & 0 & -v_1 \\ -v_2 & v_1 & 0 \end{pmatrix}$$

für eine $n \times n$-Matrix $M = (m_{ij})$ und einen Vektor $\vec{v} = (v_i) \in \mathbb{R}^3$.

6.3 Differentiationsregeln

Für differenzierbare Funktionen gelten die analogen Rechenregeln wie im Eindimensionalen.

Linearität (folgt unmittelbar aus der Definition):

Satz 6.3. *Seien $\vec{f}\colon X \to \mathbb{R}^m$ und $\vec{g}\colon X \to \mathbb{R}^m$ differenzierbar und $C \in \mathbb{R}^{p\times m}$. Dann gilt:*

$$(\vec{f}(x) + \vec{g}(x))' = \vec{f}\,'(x) + \vec{g}\,'(x)$$
$$(C\vec{f}(x))' = C\,\vec{f}\,'(x)$$

Für die Spezialfälle

$$C = c\,I, \quad C = \vec{c}^{\,T}, \quad C = \Omega(\vec{c})$$

mit $c \in \mathbb{R}$ und $\vec{c} \in \mathbb{R}^m$ erhält man damit

$$(c\,\vec{f}(x))' = c\,\vec{f}\,'(x), \quad (\vec{c} \cdot \vec{f}(x))' = \vec{c}^{\,T} \vec{f}\,'(x), \quad (\vec{c} \times \vec{f}(x))' = \Omega(\vec{c})\;\vec{f}\,'(x)$$

Produktregeln:

Satz 6.4. *Seien $f\colon X \to \mathbb{R}$, $\vec{f}\colon X \to \mathbb{R}^m$ und $\vec{g}\colon X \to \mathbb{R}^m$ differenzierbar. Dann gilt:*

$$(f(x)\,\vec{g}(x))' = \vec{g}(x)\,f'(x) + f(x)\,\vec{g}\,'(x)$$
$$(\vec{f}(x) \cdot \vec{g}(x))' = \vec{g}(x)^T\,\vec{f}\,'(x) + \vec{f}(x)^T\,\vec{g}\,'(x)$$
$$(\vec{f}(x) \times \vec{g}(x))' = -\Omega(\vec{g}(x))\,\vec{f}\,'(x) + \Omega(\vec{f}(x))\,\vec{g}\,'(x) = \Omega(\vec{g}(x))^T\,\vec{f}\,'(x) + \Omega(\vec{f}(x))\,\vec{g}\,'(x)$$

Satz 6.5 (Kettenregel)**.** *Seien $g\colon X \longrightarrow \mathbb{R}^m$ mit $X \subset \mathbb{R}^n$ und $f\colon Y \longrightarrow \mathbb{R}^p$ mit $g(X) \subset Y \subset \mathbb{R}^m$ differenzierbar. Dann gilt: $f \circ g$ ist differenzierbar und es gilt:*

$$(f \circ g)'(x) = f'(g(x))\; g'(x).$$

Komponentenweise:

$$\frac{\partial(f_i \circ g)}{\partial x_j}(x_0) = \sum_{k=1}^{m} \frac{\partial f_i}{\partial y_k}(g(x_0))\,\frac{\partial g_k}{\partial x_j}(x_0)$$

Analoge Rechenregeln für grad, div und rot, z.B.:

$$\begin{aligned}
\nabla(f(x)+g(x)) &= \nabla f(x) + \nabla g(x)\\
\nabla\cdot(\vec{f}(x)+\vec{g}(x)) &= \nabla\cdot\vec{f}(x) + \nabla\cdot\vec{g}(x)\\
\nabla\times(\vec{f}(x)+\vec{g}(x)) &= \nabla\times\vec{f}(x) + \nabla\times\vec{g}(x)
\end{aligned}$$

$$\nabla(cf(x)) = c\,\nabla f(x), \quad \nabla(\vec{c}\cdot\vec{f}(x)) = \vec{f}\,'(x)^T\vec{c}$$

$$\nabla\cdot(c\vec{f}(x)) = c\,\nabla\cdot\vec{f}(x), \quad \nabla\cdot(f(x)\,\vec{c}) = \nabla f(x)\cdot\vec{c}, \quad \nabla\cdot(\vec{c}\times\vec{f}(x)) = -\vec{c}\cdot\nabla\times\vec{f}(x)$$

$$\nabla\times(c\,\vec{f}(x)) = c\,\nabla\times\vec{f}(x), \quad \nabla\times(f(x)\,\vec{c}) = \nabla\, f(x)\times\vec{c}, \quad \nabla\times(\vec{c}\times\vec{f}(x)) = (\nabla\cdot\vec{f}(x))\,\vec{c} - \vec{f}\,'(x)\vec{c}$$

$$\begin{aligned}
\nabla(f(x)\,g(x)) &= f(x)\,\nabla g(x) + g(x)\,\nabla f(x)\\
\nabla(\vec{f}(x)\cdot\vec{g}(x)) &= \vec{f}\,'(x)^T\vec{g}(x) + \vec{g}\,'(x)^T\vec{f}(x)\\
\nabla\cdot(f(x)\vec{g}(x)) &= \nabla\, f(x)\cdot\vec{g}(x) + f(x)\,\nabla\cdot\vec{g}(x)\\
\nabla\cdot(\vec{f}(x)\times\vec{g}(x)) &= \vec{g}(x)\cdot\nabla\times\vec{f}(x) - \vec{f}(x)\cdot\nabla\times\vec{g}(x)\\
\nabla\times(f(x)\,\vec{g}(x)) &= \nabla\, f(x)\times\vec{g}(x) + f(x)\,\nabla\times\vec{g}(x)\\
\nabla\times(\vec{f}(x)\times\vec{g}(x)) &= -(\nabla\cdot\vec{f}(x))\,\vec{g}(x) + \vec{f}\,'(x)\vec{g}(x) + (\nabla\cdot\vec{g}(x))\,\vec{f}(x) - \vec{g}\,'(x)\vec{f}(x)
\end{aligned}$$

6.4 Ableitungen höherer Ordnung und der Satz von Taylor

- Partielle Ableitungen 2. Ordnung für $f\colon X \to \mathbb{R}$ mit $X \subset \mathbb{R}^2$:

  $$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right), \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right), \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right), \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)$$

  Alternative Schreibweise: f_{xx}, f_{yy}, f_{yx}, f_{xy}.

  Nicht in allen Fällen stimmen $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$ und $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$ überein. Es gilt allerdings:

Satz 6.6 (Schwarz)**.** *Falls für* $f\colon X \to \mathbb{R}$ *mit* $X \subset \mathbb{R}^2$ *die partiellen Ableitungen* $\dfrac{\partial f}{\partial x}$, $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ *und* $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$ *existieren und* $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$ *im Punkt* (x_0, y_0) *stetig ist, dann existiert auch* $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x_0, y_0)$ *und es gilt*

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x_0, y_0) = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_0, y_0)$$

- Hesse-Matrix:

$$H_f(x,y) = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) \\ \dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x,y) & \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) \end{pmatrix}$$

Unter den Voraussetzungen des obigen Satzes ist $H_f(x,y)$ eine symmetrische Matrix. Analoge Erweiterung für Funktionen $f\colon X \to \mathbb{R}$ mit $X \subset \mathbb{R}^n$.

$$H_f(x) = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}(x) & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2}(x) & \cdots & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_n}(x) \\ \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1}(x) & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_2^2}(x) & \cdots & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_n}(x) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_1}(x) & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_2}(x) & \cdots & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_n^2}(x) \end{pmatrix}$$

- Laplace-Operator für Funktionen $f\colon X \to \mathbb{R}$ mit $X \subset \mathbb{R}^n$:

$$\Delta f(x) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}(x) + \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2}(x) + \ldots + \frac{\partial^2 f}{\partial x_n^2}(x)$$

Es gilt

$$\Delta f(x) = \operatorname{div} \operatorname{grad} f(x) = \nabla \cdot \nabla f(x) \quad \text{und} \quad \Delta f(x) = \operatorname{Spur} H_f(x).$$

Erweiterung auf Funktionen $f\colon X \to \mathbb{R}^m$ mit $X \subset \mathbb{R}^n$ durch komponentenweise Anwendung.

- Der Satz von Taylor für $f\colon X \to \mathbb{R}$ mit $X \subset \mathbb{R}^2$: Für

$$\varphi(t) = f(x_0 + t\,h)$$

folgt:

$$\varphi(1) = \sum_{k=0}^{n} \frac{\varphi^{(k)}(0)}{k!} + \frac{\varphi^{(n+1)}(\theta)}{(n+1)!}$$

Nun gilt:

$$\varphi(1) = f(x_0 + h), \quad \varphi(0) = f(x_0),$$

und

$$\varphi'(t) = f'(x_0 + th)h = \frac{\partial f}{\partial x_1}(x_0 + th)\, h_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2}(x_0 + th)\, h_2$$

und

$$\begin{aligned}
\varphi''(t) &= \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(x_0 + th)\right)' h_1 + \left(\frac{\partial f}{\partial x_2}(x_0 + th)\right)' h_2 \\
&= \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}(x_0 + th)\, h_1 + \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1}(x_0 + th)\, h_2\right) h_1 \\
&\quad + \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2}(x_0 + th)\, h_1 + \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2}(x_0 + th)\, h_2\right) h_2 \\
&= \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}(x_0 + th)\, h_1^2 + 2\frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2}(x_0 + th)\, h_1\, h_2 + \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2}(x_0 + th)\, h_2^2
\end{aligned}$$

Analog erhält man

$$\begin{aligned}
\varphi'''(t) &= \frac{\partial^3 f}{\partial x_1^3}(x_0 + th)\, h_1^3 + 3\frac{\partial^3 f}{\partial x_1^2 \partial x_2}(x_0 + th) h_1^2\, h_2 \\
&\quad + 3\frac{\partial^3 f}{\partial x_1 \partial x_2^2}(x_0 + th)\, h_1\, h_2^2 + \frac{\partial^3 f}{\partial x_2^3}(x_0 + th)\, h_2^3
\end{aligned}$$

u.s.w.

Allgemein gilt:

$$\varphi^{(k)}(t) = \sum_{i=0}^{k} \binom{k}{i} \frac{\partial^k}{\partial x_1^{k-i} \partial x_2^i}(x_0 + th)\, h_1^{k-i} h_2^i$$

und daher

$$\frac{\varphi^{(k)}(0)}{k!} = \sum_{i=0}^{k} \frac{1}{(k-i)!i!} \frac{\partial^k f}{\partial x_1^{k-i} \partial x_2^i}(x_0)\, h_1^{k-i} h_2^i = \sum_{\substack{i_1, i_2 \in \mathbb{N}_0 \\ i_1 + i_2 = k}} \frac{1}{(i_1)!(i_2)!} \frac{\partial^k f}{\partial x_1^{i_1} \partial x_2^{i_2}}(x_0)\, h_1^{i_1} h_2^{i_2}$$

Satz 6.7. *Sei $f\colon X \to \mathbb{R}$ mit $X \subset \mathbb{R}^2$ $(n+1)$-mal stetig differenzierbar und $x_0, h \in \mathbb{R}^2$ mit $x_0 + t\,h \in X$ für alle $t \in [0,1]$. Dann gibt es zu $x = x_0 + h$ eine Zahl $\theta \in (0,1)$, sodass:*

$$\begin{aligned}
f(x) &= \sum_{k=0}^{n} \sum_{\substack{i_1, i_2 \in \mathbb{N}_0 \\ i_1 + i_2 = k}} \frac{1}{(i_1)!(i_2)!} \frac{\partial^k f}{\partial x_1^{i_1} \partial x_2^{i_2}}(x_0)\, h_1^{i_1} h_2^{i_2} \\
&\quad + \sum_{\substack{i_1, i_2 \in \mathbb{N}_0 \\ i_1 + i_2 = n+1}} \frac{1}{(i_1)!(i_2)!} \frac{\partial^{n+1} f}{\partial x_1^{i_1} \partial x_2^{i_2}}(x_0 + \theta h)\, h_1^{i_1} h_2^{i_2}
\end{aligned}$$

Multi-Index-Schreibweise:

$$i = (i_1, i_2), \quad |i| = i_1 + i_2, \quad , i! = i_1!\, i_2!, \quad h^i = h_1^{i_1}\, h_2^{i_2}, \quad \frac{\partial^{|i|} f}{\partial x^i} = \frac{\partial^{|i|} f}{\partial x_1^{i_1} \partial x_2^{i_2}}$$

Taylor-Formel:

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \sum_{|i|=k} \frac{1}{i!} \frac{\partial^{|i|} f}{\partial x^i}(x_0)\,(x - x_0)^i + \sum_{|i|=n+1} \frac{1}{i!} \frac{\partial^{|i|} f}{\partial x^i}(x_0 + \theta\, h)\,(x - x_0)^i$$

Erweiterung für mehr als 2 Unbekannte: völlig analog.

6.5 Lokale Extrema

- Geometrische Bedeutung von $\operatorname{grad} f(x)$:

$$\frac{\partial f}{\partial v}(x) = \operatorname{grad} f(x) \cdot v$$

Also gilt für v mit $\|v\| = 1$:

$$\left| \frac{\partial f}{\partial v}(x) \right| \leq \|\operatorname{grad} f(x)\|$$

und

$$\left| \frac{\partial f}{\partial v_0}(x) \right| = \|\operatorname{grad} f(x)\| \quad \text{für } v_0 = \frac{1}{\|\operatorname{grad} f(x)\|} \operatorname{grad} f(x).$$

$\operatorname{grad} f(x)$ ist also die Richtung des steilsten Anstiegs der Funktion f im Punkt x.

- Notwendige Bedingung für ein Extremum:

Satz 6.8. *Sei $X \subset \mathbb{R}^n$ eine offene Menge und $f\colon X \longrightarrow \mathbb{R}$. Sei $x_0 \in X$ und f ist in diesem Punkt differenzierbar. Dann gilt: Falls x_0 ein lokales Extremum ist, folgt*

$$\operatorname{grad} f(x_0) = 0$$

Beweis. Wie in $\mathbb{R}$ folgt:

$$\frac{\partial f}{\partial v}(x_0) = 0 \quad \text{für alle Richtungen } v \in \mathbb{R}^n$$

Aus

$$\frac{\partial f}{\partial v}(x_0) = \operatorname{grad} f(x_0) \cdot v$$

folgt die Behauptung. □

•

Definition 6.6. *Sei $M \in \mathbb{R}^{n\times n}$ eine symmetrische Matrix. Dann heißt M positiv (negativ) definit, wenn*

$$x^T M x > 0 \ (< 0) \quad \textit{für alle } x \in \mathbb{R}^n \textit{ mit } x \neq 0.$$

Wir diskutieren positiv definite Matrizen.

Fall $n = 1$:

$$M = m_{11}, \quad x^T M x = m_{11} x_1^2 > 0 \iff m_{11} > 0.$$

Fall $n = 2$:

$$M = \begin{pmatrix} m_{11} & m_{12} \\ m_{21} & m_{22} \end{pmatrix} \quad \text{mit} \quad m_{21} = m_{12}.$$

$$x^T M x = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} m_{11} & m_{12} \\ m_{21} & m_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = m_{11}\, x_1^2 + 2m_{12}\, x_1 x_2 + m_{22}\, x_2^2$$

Für $x_2 = 0$ muss $x_1 \neq 0$ gelten und man erhält die Bedingung

$$m_{11}\, x_1^2 > 0, \quad \text{also} \quad m_{11} > 0.$$

Für $x_2 \neq 0$ erhält man nach Division durch x_2^2 die Bedingung

$$m_{11} \left(\frac{x_1}{x_2}\right)^2 + 2m_{12} \left(\frac{x_1}{x_2}\right) + m_{22} > 0$$

Das ist genau dann der Fall, wenn die quadratische Gleichung

$$m_{11}\, z^2 + 2m_{12}\, z + m_{22} > 0$$

keine reelle Nullstelle besitzt, also wenn

$$4m_{12}^2 - 4m_{11}\, m_{22} < 0, \quad \text{also} \quad m_{11} m_{22} - m_{21} m_{12} > 0.$$

M ist also genau dann positiv definit, wenn

$$m_{11} > 0 \quad \text{und} \qquad m_{11} m_{22} - m_{21} m_{12} > 0$$

Völlig analog folgt: M ist also genau dann negativ definit, wenn

$$m_{11} < 0 \quad \text{und} \qquad m_{11} m_{22} - m_{21} m_{12} > 0$$

Hinreichende Bedingung für ein lokales Extremum:

Satz 6.9. *Sei $X \subset \mathbb{R}^n$ eine offene Menge, $f\colon X \longrightarrow \mathbb{R}$ sei 2 mal stetig differenzierbar. Sei $x_0 \in X$ mit*

$$\operatorname{grad} f(x_0) = 0 \quad \textit{und} \quad H_f(x_0) \textit{ ist positiv (negativ) definit.}$$

Dann ist x_0 ein lokales Minimum (Maximum).

Beweis. Wir führen der Einfachheit halber den Beweis nur für $n = 2$ und für $H_f(x_0)$ positiv definit. (Der allgemeine Fall wird völlig analog bewiesen.) Aus dem Satz von Taylor erhält man

$$\begin{aligned} f(x_0 + h) &= f(x_0) + \frac{\partial f}{\partial x_1}(x_0)\, h_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2}(x_0)\, h_2 \\ &\quad + \frac{1}{2!}\left[\frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}(x_0 + \theta\, h)\, h_1^2 + 2\frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2}(x_0 + \theta\, h)\, h_1\, h_2 + \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2}(x_0 + \theta\, h)\, h_2^2\right] \\ &= f(x_0) + \nabla f(x_0) \cdot h + \frac{1}{2}\, h^T H_f(x_0 + \theta\, h) h \end{aligned}$$

Da f 2-mal stetig differenzierbar ist und $H_f(x_0)$ positiv definit ist, ist auch $H_f(x)$ in einer Umgebung von x_0 positiv definit. Dann gilt für $x \neq x_0$ aus dieser Umgebung:

$$f(x) = f(x_0) + \underbrace{\nabla f(x_0)}_{=0} \cdot h + \frac{1}{2}\, \underbrace{h^T H_f(x_0 + \theta\, h) h}_{>0} > f(x_0).$$

$\square$

Kapitel 7

Mehrdimensionale Integralrechnung

7.1 Einfachintegrale

Der Begriff Stammfunktion macht zunächst nur für $n = 1$ Sinn:

Definition 7.1. *Sei $I \subset \mathbb{R}$ ein Intervall und seien $f\colon I \to \mathbb{R}^m$ und $F\colon I \to \mathbb{R}^m$ Funktionen. F heißt Stammfunktion (unbestimmtes Integral) von $f \iff F$ ist differenzierbar und $F' = f$.*

- Schreibweise: $\int f(x)\, dx = F(x) + C$.
- Man sieht sofort:

$$\int f(x)\, dx = \left(\int f_1(x)\, dx, \int f_2(x)\, dx, \ldots, \int f_m(x)\, dx\right)^T$$

Analog lässt sich das bestimmtes Integral für $n = 1$ über Riemann-Summen einführen und komponentenweise berechnen.

$$\int_a^b f(x)\, dx = \left(\int_a^b f_1(x)\, dx, \int_a^b f_2(x)\, dx, \ldots, \int_a^b f_m(x)\, dx\right)^T$$

7.1.1 Kurven in $\mathbb{R}^n$

Definition 7.2. *Eine stetige Funktion $\gamma\colon [a, b] \to \mathbb{R}^n$ heißt Parameterdarstellung einer Kurve in $\mathbb{R}^n$ mit Anfangspunkt $\gamma(a)$ und Endpunkt $\gamma(b)$.*

Andere Bezeichnungen für Parameterdarstellung einer Kurve: parametrisierte Kurve, Weg. Die Bildmenge $\{\gamma(t) : t \in [a, b]\}$ wird gelegentlich auch Bogen genannt.

Ist γ differenzierbar und gilt $\gamma'(t) \neq 0$, dann lässt sich $\gamma'(t) \in \mathbb{R}^n$ als Tangentenvektor der Bildmenge im Punkt $\gamma(t) \in \mathbb{R}^n$ interpretieren.

Definition 7.3. *Für $\gamma_1\colon [a,b] \to \mathbb{R}^n$ und $\gamma_2\colon [c,d] \to \mathbb{R}^n$ gelte:*

$$\gamma_2(s) = \gamma_1(\phi(s)) \quad \textit{für alle } s \in [c,d]$$

mit einer stetigen und streng monoton wachsenden Funktion $\phi\colon [c,d] \to [a,b]$ mit $\phi(c) = a$ und $\phi(d) = b$. Dann heißen γ_1 und γ_2 äquivalente Parameterdarstellungen.

Mathematisch formal: Eine Äquivalenzklasse von parametrisierten Kurven heißt eine Kurve. Das bedeutet: Eine Kurve in $\mathbb{R}^n$ besteht aus einer Teilmenge aus $\mathbb{R}^n$, der Bildmenge einer konkreten Parameterdarstellung (von vielen möglichen äquivalenten Parameterdarstellungen) und einem Durchlaufsinn, ausgedrückt durch eine konkrete Parameterdarstellung (von vielen möglichen äquivalenten Parameterdarstellungen).

- Eine Kurve heißt eine **Jordan-Kurve**, falls es eine Parameterdarstellung $\gamma\colon [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}^n$ gibt, sodass γ auf $[a,b)$ injektiv ist.

- Eine Kurve heißt **stetig differenzierbar**, wenn es eine Parameterdarstellung $\gamma\colon [a,b] \to \mathbb{R}^n$ gibt, die stetig differenzierbar ist.

- Stimmt der Anfangspunkt mit dem Endpunkt überein, spricht man von einer **geschlossenen Kurve**.

- Sei C eine Kurve. Dann bezeichnet $-C$ die Kurve mit entgegengesetztem Durchlaufsinn: Wenn $\gamma\colon [a,b] \to \mathbb{R}^n$ eine Parameterdarstellung der Kurve C ist, dann ist $\bar\gamma\colon [a,b] \to \mathbb{R}^n$ mit
$$\bar\gamma(t) = \gamma(b + a - t)$$
eine Parameterdarstellung der Kurve $-C$.

- Stimmt der Endpunkt der Kurve C_1 mit dem Anfangspunkt der Kurve C_2 zusammen, so lässt sich in natürlicher Weise die Kurve $C_1 + C_2$ bilden. Wenn $\gamma_1\colon [a,b] \to \mathbb{R}^n$ bzw. $\gamma_2\colon [c,d] \to \mathbb{R}^n$ Parameterdarstellungen der Kurven C_1 bzw. C_2 sind, dann ist $\gamma\colon [a, b+d-c] \to \mathbb{R}^n$ mit
$$\gamma(t) = \begin{cases} \gamma_1(t) & \text{für } t \in [a,b] \\ \gamma_2(t - b + c) & \text{für } t \in [b, b+d-c] \end{cases}$$
eine Parameterdarstellung der Kurve $C_1 + C_2$. Falls C eine geschlossene Kurve ist schreibt man für $C + C$ kurz $2C$. Analog wird nC für $n \in \mathbb{N}$ eingeführt.

- Eine Kurve C heißt **stückweise stetig differenzierbar**, wenn sie sich als endliche Summe von stetig differenzierbaren Kurven darstellen lässt.

Beispiele:

- Beispiel: Kreis mit Mittelpunkt 0 und Radius 1:
  $\gamma\colon [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^2$, $t \mapsto (\cos t, \sin t)^T$

- Beispiel: Graph der Funktion $f\colon [-1,1] \to \mathbb{R}$, $x \mapsto x^2$: quadratische Parabel
  $\gamma\colon [-1,1] \to \mathbb{R}^2$, $t \mapsto (t, t^2)^T$.
- Beispiel: Graph der Funktion $f\colon [-1,1] \to \mathbb{R}$, $x \mapsto x^2$, gespiegelt um die erste Mediane:
  $\gamma\colon [-1,1] \to \mathbb{R}^2$, $t \mapsto (t^2, t)^T$.
- Rand des Quadrates $[0,1] \times [0,1]$:
  $C = C_1 + C_2 + C_3 + C_4$ mit den Parameterdarstellungen $\gamma_1\colon [0,1] \to \mathbb{R}^2$, $t \mapsto (t,0)^T$, $\gamma_2\colon [0,1] \to \mathbb{R}^2$, $t \mapsto (1,t)^T$, $\gamma_3\colon [0,1] \to \mathbb{R}^2$, $t \mapsto (1-t,1)^T$, $\gamma_4\colon [0,1] \to \mathbb{R}^2$, $t \mapsto (0,1-t)^T$.

7.1.2 Kurvenintegrale

Seien $\gamma\colon [a,b] \to \mathbb{R}^n$ stetig differenzierbar und $f\colon X \to \mathbb{R}^m$ mit $X \subset \mathbb{R}^n$ eine Funktion mit $\gamma([a,b]) \subset X$.

- Wir zerlegen das Intervall $[a,b]$ in K Teilintervalle
$$a = t_0 < t_1 < \ldots < t_{K-1} < t_K = b.$$
- Länge des Teilintervalls $[t_{k-1}, t_k]$: $\Delta t_k = t_k - t_{k-1}$.
- Zwischenpunkte: $\xi = (\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_K)$ mit $\xi_k \in [t_{k-1}, t_k]$, hier wählen wir $\xi_k = t_{k-1}$.
- Riemann-Summe:
$$\sum_{k=1}^{N} f(\gamma(t_{k-1}))\,\|\gamma(t_k) - \gamma(t_{k-1})\|$$
$$\approx \sum_{k=1}^{N} f(\gamma(t_{k-1}))\,\|\gamma'(t_{k-1})(t_k - t_{k-1})\| = \sum_{k=1}^{N} f(\gamma(t_{k-1}))\,\|\gamma'(t_{k-1})\|\,\Delta t_k$$

Der letzte Ausdruck ist eine Riemann-Summe der reellen Funktion $(f \circ \gamma)\,\|\gamma'\|$. Das motiviert die folgende Definition:

Definition 7.4. *Sei $\gamma\colon [a,b] \to \mathbb{R}^n$ eine stetig differenzierbare Parameterdarstellung einer Kurve C in $\mathbb{R}^n$ und $f\colon X \to \mathbb{R}^m$ mit $\gamma([a,b]) \subset X \subset \mathbb{R}^n$ auf $\gamma([a,b])$ stetig. Dann heißt*
$$\int_C f(x)\;ds = \int_a^b f(\gamma(t))\,\|\gamma'(t)\|\;dt$$
das Kurvenintegral (Linienintegral) von f entlang der Kurve C.

Erweiterung auf stückweise stetig differenzierbare Kurven $C = \sum_{i=1}^k C_i$:
$$\int_C f(x)\;ds = \sum_{i=1}^{k} \int_{C_i} f(x)\;ds.$$

Alternative Schreibweise für geschlossene Kurven:

$$\oint_C f\,ds$$

Unabhängigkeit von der Parametrisierung

Für $\gamma_1\colon [a,b] \to \mathbb{R}^n$ und $\gamma_2\colon [c,d] \to \mathbb{R}^n$ gelte:

$$\gamma_2(s) = \gamma_1(\phi(s)) \quad \text{für alle } s \in [c,d]$$

mit einer differenzierbaren und streng monoton wachsenden Funktion $\phi\colon [c,d] \to [a,b]$ mit $\phi(c) = a$ und $\phi(d) = b$. Dann gilt:

$$\begin{aligned}
&\int_a^b f(\gamma_1(t))\,\|\gamma_1'(t)\|\;dt = \int_{\phi(c)}^{\phi(d)} f(\gamma_1(t))\,\|\gamma_1'(t)\|\;dt \\
&\quad= \int_c^d f(\gamma_1(\phi(s)))\,\|\gamma_1'(\phi(s))\|\,\phi'(s)\;ds = \int_c^d f(\gamma_1(\phi(s)))\,\|\gamma_1'(\phi(s))\,\phi'(s)\|\;ds \\
&\quad= \int_c^d f(\gamma_2(s))\,\|\gamma_2'(s)\|\;ds
\end{aligned}$$

- Länge einer Kurve, Bogenlänge einer Jordan-Kurve:

$$|C| = \int_C 1\;ds = \int_a^b \|\gamma'(t)\|\;dt$$

  - Beispiel: Umfang des Kreises

$$|C| = \int_0^{2\pi} \|\gamma'(t)\|\;dt = \int_0^{2\pi} 1\;dt = 2\pi$$

  - Beispiel: Länge des Parabelbogens der quadratischen Parabel $y = x^2$, $x \in [-1,1]$.

$$\begin{aligned}
|C| &= \int_{-1}^1 \|\gamma'(t)\|\;dt = \int_{-1}^1 \sqrt{1+4t^2}\;dt = \frac{1}{2}\int_{-2}^2 \sqrt{1+u^2}\;du = \int_0^2 \sqrt{1+u^2}\;du \\
&= \frac{1}{2}\left(\operatorname{arsinh} u + u\sqrt{1+u^2}\right)\Big|_0^2 = \frac{1}{2}\left(\operatorname{arsinh} 2 + 2\sqrt{5}\right) = \frac{1}{2}\ln(2+\sqrt{5}) + \sqrt{5}
\end{aligned}$$

- Komponentenweise Berechnung:

$$\int_C f(x)\ ds = \left(\int_C f_1(x)\ ds, \int_C f_2(x)\ ds, \ldots, \int_C f_m(x)\ ds \right)^T$$

Seien $\gamma\colon [a,b] \to \mathbb{R}^n$ stetig differenzierbar und $f\colon X \to \mathbb{R}^n$ mit $X \subset \mathbb{R}^n$ eine vektorwertige Funktion mit $\gamma([a,b]) \subset X$.

Mit den Bezeichnungen von vorhin bilden wir folgende Riemann-Summe:

$$\begin{aligned} &\sum_{k=1}^{N} f(\gamma(t_{k-1})) \cdot (\gamma(t_k) - \gamma(t_{k-1})) \\ &\qquad \approx \sum_{k=1}^{N} f(\gamma(t_{k-1})) \cdot (\gamma'(t_{k-1})(t_k - t_{k-1})) = \sum_{k=1}^{N} f(\gamma(t_{k-1})) \cdot \gamma'(t_{k-1})\, \Delta t_k \end{aligned}$$

Der letzte Ausdruck ist eine Riemann-Summe der reellen Funktion $(f \circ \gamma) \cdot \gamma'$. Das motiviert die folgende Definition:

Definition 7.5. *Sei $\gamma\colon [a,b] \to \mathbb{R}^n$ eine stetig differenzierbare Parameterdarstellung einer Kurve C in $\mathbb{R}^n$ und $f\colon X \to \mathbb{R}^n$ mit $\gamma([a,b]) \subset X \subset \mathbb{R}^n$ auf $\gamma([a,b])$ stetig. Dann heißt*

$$\int_C f(x) \cdot dx = \int_a^b f(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t)\ dt$$

das Kurvenintegral (Linienintegral) von f entlang der Kurve C.

Erweiterung auf stückweise stetig differenzierbare Kurven $C = \sum_{i=1}^{k} C_i$:

$$\int_C f(x) \cdot dx = \sum_{i=1}^{k} \int_{C_i} f(x) \cdot dx.$$

- Alternative Schreibweise:

$$\int_C (f_1\ dx_1 + f_2\ dx_2 + \ldots + f_n\, dx_n)$$

- Alternative Schreibweisen für geschlossene Kurven:

$$\oint_C f \cdot dx \quad \text{oder} \quad \oint_C (f_1\ dx_1 + f_2\ dx_2 + \ldots + f_n\, dx_n)$$

- Wie vorhin folgt die Unabhängigkeit des Integrals von der Parametrisierung.
- Verrichtete Arbeit entlang eines Weges

– Beispiel: Gravitationskraft, die eine Punktmasse mit Masse m_1 im Ursprung auf eine Punktmasse mit Masse m_2 im Punkt $\vec{x}$ ausübt:

$$\vec{F}(\vec{x}) = -G\,\frac{m_1\,m_2}{r^2}\,\frac{\vec{x}}{r} \quad \text{mit } r = \|\vec{x}\|$$

Die Punktmasse mit Masse m_2 wird entlang der Kurve C $\vec{\gamma}\colon [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^3$, $t \mapsto (\cos t, \sin t, t)^T$ bewegt. Die dazu notwendige Arbeit W ist durch

$$W = -\int_C \vec{F}(\vec{x}) \cdot d\vec{x}$$

gegeben. Berechnung von W:

$$\begin{aligned} W &= -\int_C \vec{F}(\vec{x}) \cdot d\vec{x} = -\int_0^{2\pi} \vec{F}(\vec{\gamma}(t)) \cdot \vec{\gamma}\,'(t)\,dt = G\,m_1 m_2 \int_0^{2\pi} \frac{\vec{\gamma(t)} \cdot \vec{\gamma}\,'(t)}{\|\gamma(t)\|^3}\,dt \\ &= G\,m_1 m_2 \int_0^{2\pi} \frac{t}{(t^2+1)^{3/2}}\,dt = G\,m_1 m_2\,\frac{1}{2}\int_1^{4\pi^2+1} \frac{1}{u^{3/2}}\,du \\ &= -G\,m_1 m_2\,\frac{1}{\sqrt{u}}\bigg|_1^{4\pi^2+1} = -G\,m_1 m_2 \left(\frac{1}{\sqrt{4\pi^2+1}} - 1\right) \end{aligned}$$

Die Rechenregeln der eindimensionalen Integralrechnung lassen sich auf Kurvenintegrale leicht übertragen.

Satz 7.1. *Sei C eine stückweise stetig differenzierbare Kurve in $\mathbb{R}^n$. Seien C_1 und C_2 stückweise stetig differenzierbare Kurven, der Endpunkt von C_1 sei der Anfangspunkt von C_2. Dann gilt für alle $c \in \mathbb{R}$ und alle Funktionen f und g, die auf den jeweiligen Kurven stetig sind:*

$$\begin{aligned} \int_C (f(x) + g(x))\;ds &= \int_C f(x)\;ds + \int_C g(x)\;ds \\ \int_C (c\,f(x))\;ds &= c\int_C f(x)\;ds \\ \int_{C_1+C_2} f(x)\;ds &= \int_{C_1} f(x)\;ds + \int_{C_2} f(x)\;ds \\ \int_{-C} f(x)\;ds &= \int_C f(x)\;ds \end{aligned}$$

und

$$\int_C (f(x)+g(x))\cdot dx = \int_C f(x)\cdot dx + \int_C g(x)\cdot dx$$
$$\int_C (c\, f(x))\cdot dx = c\int_C f(x)\cdot dx$$
$$\int_{C_1+C_2} f(x)\cdot dx = \int_{C_1} f(x)\cdot dx + \int_{C_2} f(x)\cdot dx$$
$$\int_{-C} f(x)\cdot dx = -\int_C f(x)\cdot dx$$

und

$$\left\|\int_C f(x)\ ds\right\| \leq \max\{\|f(x)\| : x\in C\}\,|C|$$
$$\left|\int_C f(x)\cdot dx\right| \leq \max\{\|f(x)\| : x\in C\}\,|C|$$

7.1.3 Wegunabhängigkeit

Definition 7.6. *Eine vektorwertige Funktion (Vektorfeld) $f\colon X\to\mathbb{R}^n$ mit $X\subset\mathbb{R}^n$ heißt ein Gradientenfeld (Potentialfeld), falls es eine skalare Funktion $\phi\colon X\to\mathbb{R}$ gibt, sodass $f=\operatorname{grad}\phi$. ϕ heißt Stammfunktion von f, $-\phi$ heißt das Potential von f.*

- Beispiel: Gravitationsfeld

$$\vec{F}(\vec{x}) = -G\,\frac{m_1\,m_2}{r^2}\,\frac{\vec{x}}{r}\quad\text{mit } r=\|\vec{x}\|$$

Es gilt für $x\neq 0$ und $r=\|x\|=\sqrt{x_1^2+x_2^2+\ldots+x_n^2}$:

$$\operatorname{grad} r = \frac{1}{r}\,\vec{x}\quad\text{und daher}\quad \operatorname{grad}\frac{1}{r} = -\frac{1}{r^3}\,\vec{x}$$

Also

$$\vec{F}(\vec{x}) = -\operatorname{grad} U(\vec{x})\quad\text{mit}\quad U(\vec{x}) = -G\,\frac{m_1\,m_2}{r}$$

Satz 7.2. *Sei $f\colon X\to\mathbb{R}^n$ mit $X\subset\mathbb{R}^n$ ein Gradientenfeld mit einer stetig differenzierbaren Stammfunktion $\phi\colon X\to\mathbb{R}$. Dann gilt für jede stückweise stetig differenzierbare Kurve C in X mit Anfangspunkt γ_a und Endpunkt γ_b:*

$$\int_C f(x)\cdot dx = \phi(\gamma_b)-\phi(\gamma_a)$$

Beweis. Es genügt, den Beweis für stetig differenzierbare Kurven zu führen:

$$\int_C f(x) \cdot dx = \int_a^b f(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t)\ dt = \int_a^b \operatorname{grad} \phi(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t)\ dt = \int_a^b \phi'(\gamma(t))\gamma'(t)\ dt$$
$$= \int_a^b [\phi(\gamma(t))]'\ dt = \phi(\gamma(b)) - \phi(\gamma(a)) = \phi(\gamma_b) - \phi(\gamma_a)$$

□

- Formulierung als Integralsatz:

$$\int_C \operatorname{grad} \phi(x) \cdot dx = \phi(\gamma_b) - \phi(\gamma_a)$$

Das rechtfertigt den Namen Stammfunktion.

- Beispiel: Die Punktmasse mit Masse m_2 wird entlang der Kurve C $\vec{\gamma}\colon [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^3$, $t \mapsto (\cos t, \sin t, t)^T$ im Gravitationsfeld bewegt. Berechnung der dazu erforderlichen Arbeit mit Hilfe des Potentials:

$$W = -\int_C \vec{F}(\vec{x}) \cdot d\vec{x} = \int_C \operatorname{grad} U(\vec{x}) \cdot d\vec{x} = U(\vec{\gamma}(2\pi)) - U(\vec{\gamma}(0))$$
$$= -G\, m_1 m_2 \left(\frac{1}{\sqrt{4\pi^2 + 1}} - 1 \right)$$

Definition 7.7. *Eine Menge $M \subset \mathbb{R}^n$ heißt ein Gebiet, wenn*

1. *sie offen und*

2. *sie im folgenden Sinn zusammenhängend ist: Je zwei beliebige Punkte aus M lassen sich durch eine stückweise stetig differenzierbare Kurve in M verbinden.*

Definition 7.8. *Sei $X \subset \mathbb{R}^n$ ein Gebiet und $f\colon X \to \mathbb{R}^n$ stetig. Dann heißt f konservativ, wenn für alle Punkte γ_a, $\gamma_b \in X$ und für alle stückweise stetig differenzierbare Kurven C_1 und C_2 mit Anfangspunkt γ_a und Endpunkt γ_b gilt:*

$$\int_{C_1} f(x) \cdot dx = \int_{C_2} f(x) \cdot dx$$

- Alternative Schreibweise für das Kurvenintegral, falls f konservativ ist:

$$\int_C f(x) \cdot dx = \int_{\gamma_a}^{\gamma_b} f(x) \cdot dx.$$

- Man sieht sofort, dass f genau dann konservativ ist, wenn

$$\oint_C f(x) \cdot dx = 0$$

für alle geschlossenen stückweise stetigen Kurven C in X.

Satz 7.3. *Sei X ein Gebiet und $f\colon X \to \mathbb{R}^n$ stetig. Dann gilt:*

1. *Wenn f ein Gradientenfeld ist, dann ist f konservativ.*
2. *Wenn f konservativ ist, dann ist f ein Gradientenfeld mit der Stammfunktion*

$$\phi(y) = \int_a^y f(x) \cdot dx,$$

wobei $a \in X$ ein beliebiger aber fester Punkt ist.

Beweis. Der erste Teil folgt aus dem letzten Satz.

Zum zweiten Teil: Seien $y \in X$ und $h \in \mathbb{R}^n$, sodass die Gerade C mit der Parameterdarstellung $\gamma(t) = y + th$ für alle $t \in [0,1]$ in X liegt. Dann gilt

$$\phi(y+h) = \phi(y) + f(y)^T h + r(h)$$

mit

$$\begin{aligned} r(h) &= \int_a^{y+h} f(x) \cdot dx - \int_a^y f(x) \cdot dx - f(y)^T h = \int_C f(x) \cdot dx - \int_C f(y) \cdot dx \\ &= \int_C (f(x) - f(y)) \cdot dx. \end{aligned}$$

Also:

$$|r(h)| = \left| \int_C (f(x) - f(y)) \cdot dx \right| \le \max\{\|f(y+th) - f(y)\| \colon t \in [0,1]\} \, \|h\|.$$

Wegen der Stetigkeit von f folgt

$$\frac{1}{\|h\|} |r(h)| \le \max\{\|f(y+th) - f(y)\| \colon t \in [0,1]\} \to 0 \quad \text{für } h \to 0.$$

Das bedeutet: $f(y)^T = \phi'(y)$, also $\operatorname{grad} \phi(y) = f(y)$. □

Definition 7.9.

Eine Menge M heißt sternförmig, falls es einen Punkt $a \in M$ gibt, sodass $a + t(x-a) \in M$ für alle $x \in M$ und alle $t \in [0,1]$.

Satz 7.4. *Sei $X \subset \mathbb{R}^n$ ein Gebiet und sei $f\colon X \to \mathbb{R}^n$ stetig differenzierbar. Dann gilt:*

1. *Ist f ein Gradientenfeld, dann gilt für die Komponentenfunktionen f_i:*

$$\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(x) = \frac{\partial f_j}{\partial x_i}(x) \tag{7.1}$$

   für alle $i, j = 1, 2, \ldots, n$.

2. *Ist X zusätzlich sternförmig und gilt* (7.1), *dann ist f ein Gradientenfeld.*

Beweis. Zu 1.:

$$\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(x) = \frac{\partial}{\partial x_j}\left(\frac{\partial \phi}{\partial x_i}\right)(x) = \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{\partial \phi}{\partial x_j}\right)(x) = \frac{\partial f_j}{\partial x_i}(x)$$

Zu 2.: Sei $a \in X$ fest und sei C_x die Gerade zwischen a und x mit der Parameterdarstellung $\gamma_x \colon [0,1] \to \mathbb{R}^n$ mit $\gamma_x(t) = a + t(x-a)$.

Wir zeigen, dass

$$\phi(x) = \int_{C_x} f(y) \cdot dy = \int_0^1 f(a + t(x-a)) \cdot (x-a)\ dt$$

eine Stammfunktion von f ist:

$$\begin{aligned}
\operatorname{grad} \phi(x) &= \operatorname{grad} \left(\int_0^1 f(a + t(x-a)) \cdot (x-a)\ dt \right) \\
&= \int_0^1 \operatorname{grad} \big(f(a + t(x-a)) \cdot (x-a) \big)\ dt
\end{aligned}$$

Nun gilt

$$\begin{aligned}
&\operatorname{grad} \big(f(a + t(x-a)) \cdot (x-a) \big) = \Big[\big(f(a + t(x-a)) \big)' \Big]^T (x-a) + I\, f(a + t(x-a)) \\
&\quad = f(a + t(x-a)) + \Big[f'(a + t(x-a))\, (t\, I) \Big]^T (x-a) \\
&\quad = f(a + t(x-a)) + t\, f'(a + t(x-a))^T (x-a) \\
&\quad = f(a + t(x-a)) + t\, f'(a + t(x-a))(x-a) = \frac{d}{dt}\Big(t\, f(a + t(x-a)) \Big)
\end{aligned}$$

Also

$$\operatorname{grad} \phi(x) = \int_0^1 \frac{d}{dt}\Big(t\, f(a + t(x-a)) \Big)\ dt = \Big(t\, f(a + t(x-a)) \Big)\Big|_0^1 = f(x)$$

□

- Die Bedingung (7.1) nennt man Integrabilitätsbedingung.

- Dieser Satz bietet ein einfach zu überprüfendes Kriterium, um zu überprüfen, ob ein Vektorfeld konservativ bzw. ein Gradientenfeld ist.

- (7.1) $\Leftrightarrow$ $f'(x)$ ist symmetrisch.

- Für $n = 3$: (7.1) $\Leftrightarrow$ $\operatorname{rot} f(x) = 0$.

- Sei der Einfachheit halber $n = 2$: Für ein konservatives Vektorfeld kann man jeden Weg zwischen $\gamma_a = (a_1, a_2)^T$ und $\gamma_b = (b_1, b_2)^T$ wählen, z.B. auch einen stückweise geraden Weg parallel zu den Koordinatenachsen, sofern man den Definitionsbereich X nicht verlässt: $C = C_1 + C_2$ mit $\gamma_1 \colon [0, 1] \to \mathbb{R}^2$, $\gamma_1(t) = (a_1 + t(b_1 - a_1), a_2)^T$ und $\gamma_2 \colon [0, 1] \to \mathbb{R}^2$, $\gamma_2(t) = (b_1, a_2 + t(b_2 - a_2))^T$. Dann erhält man:

$$
\begin{aligned}
&\int_{\gamma_a}^{\gamma_b} f(x) \cdot dx \\
&\quad = \int_0^1 f_1(a_1 + t(b_1 - a_1), a_2)(b_1 - a_1)\, dt + \int_0^1 f_2(b_1, a_2 + t(b_2 - a_2))(b_2 - a_2)\, dt \\
&\quad = \int_{a_1}^{b_1} f_1(x_1, a_2)\, dx_1 + \int_{a_2}^{b_2} f_2(b_1, x_2)\, dx_2
\end{aligned}
$$

- Die Aussagen des letzten Satzes lassen sich auf so genannte einfach zusammenhängende Gebiete erweitern. Ein Gebiet X heißt einfach zusammenhängend, wenn sich jede geschlossene Kurve in X auf einen Punkt zusammenziehen lässt.

7.2 Mehrfachintegrale

Sei $f \colon I \to \mathbb{R}$ eine Funktion auf dem Intervall $I = [a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \subset \mathbb{R}^2$.

- Durch Zerlegungen $Z_1 = \{x_0, x_1, \ldots, x_M\}$ von $[a_1, b_1]$ und $Z_2 = \{y_0, y_1, \ldots, y_N\}$ von $[a_2, b_2]$ wird das Intervall I in Teilintervalle I_{kl} unterteilt.

  $Z = Z_1 \times Z_2$ heißt Zerlegung von I.

- Länge der Teilintervalle $[x_{k-1}, x_k]$ und $[y_{l-1}, y_l]$: $\Delta x_k = x_k - x_{k-1}$ und $\Delta y_l = y_l - y_{l-1}$.

  Fläche der Teilintervalle I_{kl}: $\Delta x_k\, \Delta y_l$

- Feinheit der Zerlegungen $h_1 = \max\{\Delta x_k \colon k = 1, 2, \ldots, M\}$ und $h_2 = \max\{\Delta y_l \colon l = 1, 2, \ldots, N\}$.

  Feinheit der Zerlegung Z: $h = \max(h_1, h_2)$

- Zwischenpunkte: $\zeta = (\zeta_{kl})_{k=1,\ldots,M, l=1,\ldots,N}$ mit $\zeta_{kl} = (\xi_{kl}, \eta_{kl}) \in I_{kl}$.

- Riemann-Summe:
$$S(f, Z, \zeta) = \sum_{k,l} f(\zeta_{kl})\, \Delta x_k\, \Delta y_l.$$

Definition 7.10. *Eine Funktion $f\colon I \to \mathbb{R}$ heißt genau dann Riemann-integrierbar (kurz R-integrierbar), wenn der Grenzwert*

$$\lim_{h\to 0} S(f, Z, \zeta) = \lim_{h\to 0} \sum_{k,l} f(\zeta_{kl})\, \Delta x_k\, \Delta y_l = \int_I f(x,y)\; d(x,y)$$

existiert.

- Völlig analog definiert man

$$\int_I f(x,y,z)\; d(x,y,z)$$

  und allgemein

$$\int_I f(x_1, x_2, \ldots, x_n)\; d(x_1, x_2, \ldots .x_n) \quad \text{oder kurz} \quad \int_I f(x)\; dx$$

- Erweiterung auf Funktionen $f\colon B \to \mathbb{R}$ für allgemeinere beschränkte Definitionsbereiche $B \subset \mathbb{R}^n$: Sei $I \subset \mathbb{R}^n$ ein Intervall mit $B \subset I$. Sei $f_B\colon I \to \mathbb{R}$ die triviale Erweiterung von f auf I:

$$f_B(x) = \begin{cases} f(x) & \text{für } x \in B, \\ 0 & \text{für } x \in I \setminus B. \end{cases}$$

  Falls f_B Riemann-integrierbar ist, definiert man:

$$\int_B f(x)\; dx = \int_I f_B(x)\; dx$$

  Das Integral $\int_B f(x)\; dx$ hängt nicht von der speziellen Wahl von I ab.

- Sei $B \subset \mathbb{R}^n$ beschränkt. Die charakteristische Funktion $i_B\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ ist durch

$$i_B(x) = \begin{cases} 1 & \text{für } x \in B, \\ 0 & \text{für } x \in \mathbb{R}^n \setminus B. \end{cases}$$

  gegeben. Falls i_B R-integrierbar ist, heißt B Jordan-messbar. Dann ist

$$|B| = \int_B i_B\; dx = \int_B 1\; dx$$

  wohldefiniert und heißt Jordan-Maß von B. Im Speziellen erhält man für $n = 2$ den Flächeninhalt von B und für $n = 3$ das Volumen von B.

- Erweiterung auf unbeschränkte Funktionen und/oder unbeschränkte Definitionsbereiche durch Grenzwert: uneigentliche Integrale

Die Sätze 3.4 und 3.5 gelten auch analog für Mehrfachintegrale.

7.2.1 Der Satz von Fubini

Satz 7.5 (Satz von Fubini)**.** *Seien $I, J \subset \mathbb{R}$ beschränkte abgeschlossene Intervalle und sei $f\colon I \times J \to \mathbb{R}$ R-integrierbar.*

1. *Falls $f(.,y)\colon I \to \mathbb{R}$, $x \mapsto f(x,y)$ für alle $y \in J$ R-integrierbar ist, dann ist die Abbildung $y \mapsto \int_I f(x,y)\,dx$ R-integrierbar und es gilt:*
$$\int_{I\times J} f(x,y)\,d(x,y) = \int_J \left(\int_I f(x,y)\,dx\right)\,dy.$$
2. *Falls $f(x,.)\colon J \to \mathbb{R}$, $y \mapsto f(x,y)$ für alle $x \in I$ R-integrierbar ist, dann ist die Abbildung $x \mapsto \int_J f(x,y)\,dy$ R-integrierbar und es gilt:*
$$\int_{I\times J} f(x,y)\,d(x,y) = \int_I \left(\int_J f(x,y)\,dy\right)\,dx.$$

Beweis. Es gilt
$$S(f,Z,\zeta) = \sum_{k,l} f(\zeta_{kl})\,\Delta x_k\,\Delta y_l = \sum_l \left(\sum_k f(\zeta_{kl})\,\Delta x_k\right)\,\Delta y_l = \sum_k \left(\sum_l f(\zeta_{kl})\,\Delta y_l\right)\,\Delta x_k.$$
Durch Grenzübergang folgt dann die Behauptung. □

- Die Integrale
$$\int_J \left(\int_I f(x,y)\,dx\right)\,dy \quad \text{und} \quad \int_I \left(\int_J f(x,y)\,dy\right)\,dx$$
heißen iterierte Integrale. Die Existenz der iterierten Integrale reicht nicht aus. Zusätzlich muss f R-integrierbar sein. Hinreichend: f ist stetig.

- Die Aussagen des Satzes von Fubini gelten analog für Jordan-messbare Integrationsbereiche X und sie lassen sich auf beliebige Mehrfachintegrale erweitern.

- Beispiel: Flächeninhalt eines Kreises $B = \{(x,y)^T \in \mathbb{R}^2\colon x^2 + y^2 \le R^2\}$.
Die charakteristische Funktion von B ist fast überall stetig, daher ist sie R-integrierbar. Wegen $B = \{(x,y)^T \in \mathbb{R}^2\colon -R \le x \le R,\ -\sqrt{R^2-x^2} \le y \le \sqrt{R^2-x^2}\}$ folgt aus dem Satz von Fubini:
$$\begin{aligned}|B| &= \int_B 1\,d(x,y) = \int_{-R}^{R} \left(\int_{-\sqrt{R^2-x^2}}^{\sqrt{R^2-x^2}} 1\,dy\right)\,dx = \int_{-R}^{R} 2\sqrt{R^2-x^2}\,dx \\ &= 2R^2 \int_{-1}^{1} \sqrt{1-t^2}\,dt = R^2 \left(\arcsin t + t\sqrt{1-t^2}\right)\Big|_{-1}^{1} = R^2\pi\end{aligned}$$

- Beispiel: Volumen eines Kegels $B = \{(x,y,z)^T \in \mathbb{R}^3 \colon z \geq 0,\ \frac{z}{H} + \frac{\sqrt{x^2+y^2}}{R} \leq 1\}$.
  Es gilt: $B = \{(x,y,z)^T \in \mathbb{R}^3 \colon 0 \leq z \leq H,\ (x,y)^T \in B_z\}$ mit
  $$B_z = \left\{(x,y)^T \in \mathbb{R}^2 \colon x^2 + y^2 \leq R^2 \left(1 - \frac{z}{H}\right)^2\right\}$$
  Daher
  $$\begin{aligned} |B| &= \int_B 1\ d(x,y,z) = \int_0^H \left(\int_{B_z} 1\ d(x,y)\right)\ dz = \int_0^H R^2 \left(1 - \frac{z}{H}\right)^2 \pi\ dz \\ &= \pi R^2 \int_1^0 t^2(-H)\ dt = \frac{\pi}{3} R^2 H. \end{aligned}$$

7.2.2 Einfache Anwendungen von Mehrfachintegralen

Neben dem Flächeninhalt und dem Volumen gibt es weitere wichtige Größen, die durch Mehrfachintegrale dargestellt werden können:

Sei $B \subset \mathbb{R}^2$ oder $B \subset \mathbb{R}^3$ eine beschränkte und Jordan-messbare Menge. Sei $\rho(x)$ die (Massen-)Dichte an einer Stelle $x \in B$.

- Die Gesamtmasse M von B:
  $$M = \int_B \rho(x)\ dx.$$
- Schwerpunkt s von B:
  $$s = \frac{1}{M_B} \int_B x\, \rho(x)\ dx.$$
- Sei $B \subset \mathbb{R}^3$ eine beschränkte und Jordan-messbare Menge.
  Trägheitsmoment von B bei Drehung um eine vorgegebene Achse:
  $$J = \int_B r(x)^2\, \rho(x)\ dx,$$
  wobei $r(x)$ der Normalabstand von x zur Drehachse ist.
- Trägheitsmomente bei Drehung um die x_1-Achse, x_2-Achse und x_3-Achse:
  $$J_{11} = \int_B (x_2^2 + x_3^2)\, \rho(x)\ dx, \quad J_{22} = \int_B (x_1^2 + x_3^2)\, \rho(x)\ dx, \quad J_{33} = \int_B (x_1^2 + x_2^2)\, \rho(x)\ dx.$$
  Zusätzlich führt man für $i \neq j$ die folgenden Größen ein:
  $$J_{ij} = -\int_B x_i x_j\, \rho(x)\ dx$$

Die (symmetrische) 3×3 Matrix

$$J = \begin{pmatrix} J_{11} & J_{12} & J_{13} \\ J_{21} & J_{22} & J_{23} \\ J_{31} & J_{32} & J_{33} \end{pmatrix}$$

heißt Trägheitstensor.

7.2.3 Substitutionsregel

Zur Formulierung der Substitutionsregel benötigt man den Begriff der Determinante einer Matrix A. Wir beschränken uns auf den Fall $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ mit $n \in \{1, 2, 3\}$:

Definition 7.11. *1. Für $A = a_{11} \in \mathbb{R}$:*

$$\det A = a_{11}$$

2. Für $A = (a_{ij}) \in \mathbb{R}^{2\times 2}$:

$$\det A = a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}.$$

3. Für $A = (a_{ij}) \in \mathbb{R}^{3\times 3}$:

$$\det A = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{31}a_{22}a_{13} - a_{32}a_{23}a_{11} - a_{33}a_{21}a_{12}.$$

Wichtige Rechenregel:

$$\det(AB) = \det A \det B.$$

Geometrische Bedeutung:

1. Für $n = 2$: $|\det A|$ ist die Fläche des Parallelogramms, das durch die beiden Spaltenvektoren von A aufgespannt wird.

2. Für $n = 3$: $|\det A|$ ist das Volumen des Parallelepipeds, das durch die drei Spaltenvektoren von A aufgespannt wird.

Satz 7.6 (Substitutionsregel)**.** *Sei $X \subset \mathbb{R}^n$ eine offene Menge. Sei $g\colon X \to \mathbb{R}^n$ injektiv, stetig differenzierbar und* $\det g'(x) \neq 0$ *für alle $x \in X$. Sei $f\colon Y \to \mathbb{R}$ mit $g(X) \subset Y \subset \mathbb{R}^n$ stetig. Dann gilt: f ist auf $g(X)$ R-integrierbar und es gilt:*

$$\int_{g(X)} f(y)\ dy = \int_X f(g(x))\,|\det g'(x)|\ dx.$$

Beweisskizze. 1. Für $n = 1$: Wir betrachten den Fall $X = I = (a, b)$.

Wegen $g'(x) \neq 0$ für alle $x \in (a, b)$ können nur zwei Fälle auftreten:

(a) $g'(x) > 0$ für alle $x \in (a,b)$. Dann ist g streng monoton wachsend und es gilt

$$\begin{aligned}\int_{g(X)} f(y)\ dy &= \int_{(g(a),g(b))} f(y)\ dy = \int_{g(a)}^{g(b)} f(y)\ dy \\ &= \int_a^b f(g(x))\, g'(x)\ dx = \int_X f(g(x))\, |\det g'(x)|\ dx.\end{aligned}$$

(b) $g'(x) < 0$ für alle $x \in (a,b)$. Dann ist g streng monoton fallend und es gilt

$$\begin{aligned}\int_{g(X)} f(y)\ dy &= \int_{(g(b),g(a))} f(y)\ dy = \int_{g(b)}^{g(a)} f(y)\ dy = -\int_{g(a)}^{g(b)} f(y)\ dy \\ &= -\int_a^b f(g(x))\, g'(x)\ dx = \int_X f(g(x))\, |\det g'(x)|\ dx.\end{aligned}$$

2. Für $n = 2$.

(a) Wir betrachten den Fall $X = I = (a,b) \times (c,d)$ und diskutieren den Spezialfall:

$$g(x) = \begin{pmatrix} g_1(x) \\ x_2 \end{pmatrix}.$$

Dann erhält man

$$g'(x) = \begin{pmatrix} \frac{\partial g_1}{\partial x_1}(x) & \frac{\partial g_1}{\partial x_2}(x) \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \det g'(x) = \frac{\partial g_1}{\partial x_1}(x).$$

Wir betrachten nur den Fall $\det g'(x) > 0$, also $g_1(x)$ ist streng monoton wachsend in x_1. Dann gilt (siehe $n = 1$):

$$\begin{aligned}\int_{g(X)} f(y)\ dy &= \int_c^d \int_{g_1(a,y_2)}^{g_1(b,y_2)} f(y_1,y_2)\ dy_1\ dy_2 \\ &= \int_c^d \int_a^b f(g_1(x_1,x_2),x_2) \frac{\partial g_1}{\partial x_1}(x)\ dx_1\ dx_2 \\ &= \int_c^d \int_a^b f(g(x))\, |\det g'(x)|\ dx_1\ dx_2 = \int_X f(g(x))\, |\det g'(x)|\ dx.\end{aligned}$$

Völlig analog diskutiert man den Spezialfall:

$$g(x) = \begin{pmatrix} x_1 \\ g_2(x) \end{pmatrix}.$$

(b) Allgemeiner Fall:

$$g(x) = \begin{pmatrix} g_1(x) \\ g_2(x) \end{pmatrix}.$$

Wir führen den Beweis nur für den Fall, dass die Abbildung

$$G(x) = \begin{pmatrix} g_1(x) \\ x_2 \end{pmatrix}$$

injektiv ist. Dann gilt

$$g(x) = H(G(x)) \quad \text{mit} \quad H(u) = \begin{pmatrix} u_1 \\ g_2(G^{-1}(u)) \end{pmatrix}$$

und daher (siehe (a)):

$$\begin{aligned}
\int_{g(X)} f(y)\, dy = \int_{H(G(X))} f(y)\, dy &= \int_{G(X)} f(H(u)) |\det H'(u)|\, du \\
&= \int_X f(H(G(x))) |\det H'(G(x))| |\det G'(x)|\, dx \\
&= \int_X f(\underbrace{H(G(x))}_{= g(x)}) |\det(\underbrace{H'(G(x))G'(x)}_{= g'(x)})|\, dx.
\end{aligned}$$

□

Wichtige Variablentransformationen

- Polarkoordinaten in $\mathbb{R}^2$: Jeder Punkt $(x,y)^T \in \mathbb{R}^2$ lässt sich in der Form

$$\begin{aligned} x &= r \cos\varphi \\ y &= r \sin\varphi \end{aligned}$$

mit $r \in [0,\infty)$, $\varphi \in (-\pi,\pi]$ darstellen.
Die Abbildung $g\colon [0,\infty) \times (-\pi,\pi] \to \mathbb{R}^2$ ist durch

$$\begin{pmatrix} r \\ \varphi \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} r \cos\varphi \\ r \sin\varphi \end{pmatrix}$$

gegeben. g ist auf $D = (0,\infty) \times (-\pi,\pi)$ injektiv mit $g(D) = \mathbb{R}^2 \setminus \{(x,0)^T\colon x \in (-\infty,0]\}$, stetig differenzierbar mit

$$g'(r,\varphi) = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -r \sin\varphi \\ \sin\varphi & r \cos\varphi \end{pmatrix}$$

und es gilt

$$\det g'(r,\varphi) = r\cos^2\varphi + r\sin^2\varphi = r > 0.$$

- Beispiel: Flächeninhalt eines Kreises $B = \{(x,y)^T \in \mathbb{R}^2 \colon x^2 + y^2 \leq R^2\}$.
  Es gilt
  $$|B| = \int_B 1 \; d(x,y) = \int_{g(A)} 1 \; d(x,y) = \int_A r \; d(r,\varphi)$$
  für $A = (0,R) \times (-\pi,\pi)$. Man beachte, dass sich B und $g(A)$ zwar unterscheiden, aber nur um eine Menge vom Jordan-Maß 0. Mit dem Satz von Fubini erhält man:
  $$|B| = \int_A r \; d(r,\varphi) = \int_{-\pi}^{\pi} \left(\int_0^R r dr \right) \; d\varphi = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{R^2}{2} \; d\varphi = R^2\pi.$$

- Beispiel: Berechnung von
  $$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} \; dx.$$
  Einerseits gilt:
  $$\int_{\mathbb{R}^2} e^{-(x^2+y^2)} \; d(x,y) = \int_{g(A)} e^{-(x^2+y^2)} \; d(x,y) = \int_A e^{-r^2} r \; d(r,\varphi)$$
  mit $A = (0,\infty) \times (-\pi,\pi)$.
  Mit dem Satz von Fubini erhält man:
  $$\int_A e^{-r^2} r \; d(r,\varphi) = \int_{-\pi}^{\pi} \left(\int_0^{\infty} e^{-r^2} r \; dr \right) \; d\varphi$$
  Es gilt
  $$\int_0^{\infty} e^{-r^2} r \; dr = \frac{1}{2} \int_0^{\infty} e^{-u} \; du = -\left. \frac{1}{2} e^{-u} \right|_0^{\infty} = \frac{1}{2}$$
  Also
  $$\int_{\mathbb{R}^2} e^{-(x^2+y^2)} \; d(x,y) = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{2} \; d\varphi = \pi$$
  Andererseits erhält man mit dem Satz von Fubini (ohne Koordinatentransformation):
  $$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^2} e^{-(x^2+y^2)} \; d(x,y) &= \int_{-\infty}^{\infty} \left(\int_{-\infty}^{\infty} e^{-(x^2+y^2)} \; dx \right) \; dy = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-y^2} \left(\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} \; dx \right) \; dy \\ &= \left(\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} \; dx \right) \left(\int_{-\infty}^{\infty} e^{-y^2} \; dy \right) = \left(\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} \; dx \right)^2 \end{aligned}$$
  Also folgt:
  $$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} \; dx = \sqrt{\pi}.$$

- Zylinderkoordination in $\mathbb{R}^3$: Jeder Punkt $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ lässt sich in der Form

$$\begin{aligned} x &= r\,\cos\varphi \\ y &= r\,\sin\varphi \\ z &= z \end{aligned}$$

  mit $r \in [0, \infty)$, $\varphi \in (-\pi, \pi]$, $z \in \mathbb{R}$ darstellen.
  Die Abbildung $g\colon [0, \infty) \times (-\pi, \pi] \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ ist durch

$$\begin{pmatrix} r \\ \varphi \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} r\,\cos\varphi \\ r\,\sin\varphi \\ z \end{pmatrix}$$

  gegeben. g ist auf $D = (0, \infty) \times (-\pi, \pi) \times \mathbb{R}$ injektiv mit $g(D) = \mathbb{R}^3 \setminus \{(x, 0, z)^T : x \in (-\infty, 0],\ z \in \mathbb{R}\}$, stetig differenzierbar mit

$$g'(r, \varphi, z) = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -r\,\sin\varphi & 0 \\ \sin\varphi & r\,\cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

  und es gilt

$$\det g'(r, \varphi, z) = r\cos^2\varphi + r\sin^2\varphi = r > 0.$$

  - Beispiel: Volumen des Kegels $B = \{(x, y, z)^T \in \mathbb{R}^3 : z \geq 0,\ \frac{z}{H} + \frac{\sqrt{x^2+y^2}}{R} \leq 1\}$.

$$|B| = \int_B 1\ d(x, y, z) = \int_{g(A)} 1\ d(x, y, z) = \int_A r\ d(r, \varphi, z)$$

    mit $A = \{(r, \varphi, z)^T : \varphi \in (-\pi, \pi),\ r > 0,\ z > 0,\ \frac{z}{H} + \frac{r}{R} < 1\}$. Mit dem Satz von Fubini erhält man:

$$\begin{aligned} \int_A r\ d(r, \varphi, z) &= \int_0^H \left(\int_{-\pi}^{\pi} \left(\int_0^{R(1-z/H)} r\ dr \right) d\varphi \right) dz \\ &= \int_0^H R^2 \left(1 - \frac{z}{H}\right)^2 \pi\ dz = \frac{\pi}{3} R^2 H. \end{aligned}$$

  - Beispiel: Schwerpunkt des Kegels $B = \{(x, y, z)^T \in \mathbb{R}^3 : z \geq 0,\ \frac{z}{H} + \frac{\sqrt{x^2+y^2}}{R} \leq 1\}$ mit konstanter Massendichte ρ.
    Offensichtlich gilt: $s_x = s_y = 0$. $M = \rho\,|B|$.

$$s_z = \frac{1}{M} \int_B z\rho\ d(x, y, z) = \frac{1}{|B|} \int_B z\ d(x, y, z)$$

Wir benötigen also das Integral

$$\int_B z\ d(x,y,z) = \int_{g(A)} z\ d(x,y,z) = \int_A zr\ d(r,\varphi,z).$$

Mit dem Satz von Fubini erhält man:

$$\begin{aligned}\int_A zr\ d(r,\varphi,z) &= \int_0^H \left(\int_{-\pi}^{\pi}\left(\int_0^{R(1-z/H)} zr\ dr\right)\ d\varphi\right)\ dz \\ &= R^2\pi \int_0^H z\left(1-\frac{z}{H}\right)^2\ dz = R^2\pi\left(\frac{z^2}{2}-\frac{2z^3}{3H}+\frac{z^4}{4H^2}\right)\Bigg|_0^H = \frac{1}{4}H.\end{aligned}$$

- Kugelkoordinaten in $\mathbb{R}^3$: Jeder Punkt $(x,y,z)\in\mathbb{R}^3$ lässt sich in der Form

$$\begin{aligned} x &= r\ \sin\theta\cos\varphi \\ y &= r\ \sin\theta\sin\varphi \\ z &= r\cos\theta \end{aligned}$$

mit $r\in[0,\infty)$, $\theta\in[0,\pi]$, $\varphi\in(-\pi,\pi]$ darstellen.
Die Abbildung $g\colon (0,\infty)\times(0,\pi)\times(-\pi,\pi)\to\mathbb{R}^3\setminus\{(x,0,z)^T\colon x\in(-\infty,0],\ z\in\mathbb{R}\}$, gegeben durch

$$\begin{pmatrix} r\\ \varphi\\ z\end{pmatrix}\mapsto\begin{pmatrix} r\ \sin\theta\cos\varphi\\ r\ \sin\theta\sin\varphi\\ r\cos\theta\end{pmatrix},$$

ist injektiv, stetig differenzierbar mit

$$g'(r,\theta,\varphi) = \begin{pmatrix} \sin\theta\cos\varphi & r\cos\theta\cos\varphi & -r\sin\theta\sin\varphi\\ \sin\theta\sin\varphi & r\cos\theta\sin\varphi & r\sin\theta\cos\varphi\\ \cos\theta & -r\sin\theta & 0\end{pmatrix}$$

und es gilt

$$\begin{aligned}\det g'(r,\theta,\varphi) &= r^2\cos^2\theta\sin\theta\cos^2\varphi + r^2\sin^3\theta\sin^2\varphi \\ &\quad + r^2\cos^2\theta\sin\theta\sin^2\varphi + r^2\sin^3\theta\cos^2\varphi = r^2\sin\theta > 0.\end{aligned}$$

  – Beispiel: Volumen der Kugel $B=\{(x,y,z)^T\in\mathbb{R}^3\colon x^2+y^2+z^2\le R^2\}$.

$$|B| = \int_B 1\ d(x,y,z) = \int_{g(A)} 1\ d(x,y,z) = \int_A r^2\sin\theta\ d(r,\theta,\varphi)$$

mit $A = (0,R) \times (0,\pi) \times (-\pi,\pi)$. Mit dem Satz von Fubini erhält man:

$$\begin{aligned}|B| &= \int_0^\pi \left(\int_{-\pi}^\pi \left(\int_0^R r^2 \sin\theta \; dr \right) \; d\varphi \right) \; d\theta \\ &= \frac{R^3}{3} \int_0^\pi \left(\int_{-\pi}^\pi \sin\theta \;\; d\varphi \right) \; d\theta = \frac{2\pi R^3}{3} \int_0^\pi \sin\theta \; d\theta = \frac{4\pi R^3}{3}.\end{aligned}$$

– Beispiel: Trägheitsmoment der Kugel $B = \{(x,y,z)^T \in \mathbb{R}^3 \colon x^2+y^2+z^2 \leq R^2\}$ mit konstanter Massendichte ρ bei Drehung um die z-Achse.

$$J_z = \int_B (x^2+y^2)\rho \; d(x,y,z) = \int_{g(A)} (x^2+y^2)\rho \; d(x,y,z) = \rho \int_A r^4 \sin^3\theta \; d(r,\theta,\varphi).$$

Mit dem Satz von Fubini erhält man:

$$\begin{aligned}\int_A r^4 \sin^3\theta \; d(r,\theta,\varphi) &= \int_0^\pi \left(\int_{-\pi}^\pi \left(\int_0^R r^4 \sin^3\theta \; dr \right) \; d\varphi \right) \; d\theta \\ &= \frac{R^5}{5} \int_0^\pi \left(\int_{-\pi}^\pi \sin^3\theta \; d\varphi \right) \; d\theta = \frac{2\pi R^5}{5} \int_0^\pi \sin^3\theta \; d\theta\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\int_0^\pi \sin^3\theta \; d\theta &= \int_0^\pi (1-\cos^2\theta)\sin\theta \; d\theta = -\cos\theta\Big|_0^\pi + \int_0^\pi \cos^2\theta(-\sin\theta) \; d\theta \\ &= 2 + \int_1^{-1} u^2 \; du = 2 + \frac{u^3}{3}\Big|_1^{-1} = 2 - \frac{2}{3} = \frac{4}{3}.\end{aligned}$$

Also

$$J_z = \rho \frac{4}{3}\frac{2\pi R^5}{5} = \rho \frac{4\pi R^3}{3}\frac{2}{5}R^2 = \frac{2}{5}MR^2$$

7.3 Der Greensche Integralsatz

Wir nehmen zunächst an, dass sich eine Menge $B \subset \mathbb{R}^2$ folgendermaßen darstellen lässt:

$$B = \{(x_1,x_2)^T \in \mathbb{R}^2 \colon x_1 \in [a,b],\ \varphi_1(x_1) \leq x_2 \leq \varphi_2(x_1)\},$$

wobei $\varphi_1 \colon [a,b] \to \mathbb{R}$ und $\varphi_2 \colon [a,b] \to \mathbb{R}$ stückweise stetig differenzierbare Funktionen sind. Man nennt B einen Normalbereich (bezüglich der x-Achse).

Der Rand ∂B der Menge B lässt sich als Bildmenge einer Kurve $C = C_1 + C_2 + (-C_3) + (-C_4)$ darstellen. Dabei sind

- C_1 die Summe von stetig differenzierbaren Kurven $C_{1,i}$ mit Parameterdarstellungen

  $$\gamma^{(1,i)}\colon [t_{i-1}, t_i] \to \mathbb{R}^2, \quad t \mapsto (t, \varphi_1(t))^T$$

  für $i = 1, \ldots, M$ und $a = t_0 < t_1 < \ldots < t_M = b$ ist,

- C_2 durch

  $$\gamma^{(2)}\colon [0,1] \to \mathbb{R}^2, \quad t \mapsto \big(b, \varphi_1(b) + t(\varphi_2(b) - \varphi_1(b))\big)^T$$

  gegeben ist,

- C_3 die Summe von stetig differenzierbaren Kurven $C_{3,i}$ mit Parameterdarstellungen

  $$\gamma^{(3,i)}\colon [\tilde{t}_{i-1}, \tilde{t}_i] \to \mathbb{R}^2, \quad t \mapsto (t, \varphi_2(t))^T$$

  für $i = 1, \ldots, N$ und $a = \tilde{t}_0 < \tilde{t}_1 < \ldots < \tilde{t}_N = b$ ist und

- C_4 durch

  $$\gamma^{(4)}\colon [0,1] \to \mathbb{R}^2, \quad t \mapsto \big(a, \varphi_1(a) + t(\varphi_2(a) - \varphi_1(a))\big)^T$$

  gegeben.

C ist offensichtlich eine geschlossene Kurve. Man beachte, dass der Rand ∂B durch diese Parametrisierungen im Gegenuhrzeigersinn durchlaufen wird. Bewegt man sich entlang der Kurve C entsprechend dem Durchlaufsinn, so befinden sich die Punkte von B immer links von der Randkurve. Man spricht von einer positiv orientierten Randkurve.

Sei $f\colon X \to \mathbb{R}$ eine stetig differenzierbare Funktion mit $B \subset X$. Dann folgt mit dem Satz von Fubini:

$$\begin{aligned}
&\int_B \frac{\partial f}{\partial x_2}(x)\ d(x_1, x_2) = \int_a^b \left(\int_{\varphi_1(x_1)}^{\varphi_2(x_1)} \frac{\partial f}{\partial x_2}(x)\ dx_2 \right)\ dx_1 \\
&= \int_a^b [f(x_1, \varphi_2(x_1)) - f(x_1, \varphi_1(x_1))]\ dx_1 = \int_a^b f(t, \varphi_2(t))\ dt - \int_a^b f(t, \varphi_1(t))\ dt \\
&= \sum_{i=1}^N \int_{\tilde{t}_{i-1}}^{\tilde{t}_i} f(t, \varphi_2(t))\ dt - \sum_{i=1}^M \int_{t_{i-1}}^{t_i} f(t, \varphi_1(t))\ dt \\
&= \sum_{i=1}^N \int_{\tilde{t}_{i-1}}^{\tilde{t}_i} \begin{pmatrix} f(t, \varphi_2(t)) \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ \varphi_2'(t) \end{pmatrix}\ dt - \sum_{i=1}^M \int_{t_{i-1}}^{t_i} \begin{pmatrix} f(t, \varphi_1(t)) \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ \varphi_1'(t) \end{pmatrix}\ dt \\
&= \sum_{i=1}^N \int_{C_{3,i}} \begin{pmatrix} f(x) \\ 0 \end{pmatrix} \cdot\ dx - \sum_{i=1}^M \int_{C_{1,i}} \begin{pmatrix} f(x) \\ 0 \end{pmatrix} \cdot\ dx \\
&= \int_{C_3} \begin{pmatrix} f(x) \\ 0 \end{pmatrix} \cdot\ dx - \int_{C_1} \begin{pmatrix} f(x) \\ 0 \end{pmatrix} \cdot\ dx = -\int_{C_1} \begin{pmatrix} f(x) \\ 0 \end{pmatrix} \cdot\ dx - \int_{-C_3} \begin{pmatrix} f(x) \\ 0 \end{pmatrix} \cdot\ dx.
\end{aligned}$$

Wegen

$$\int_{C_2} \begin{pmatrix} f(x) \\ 0 \end{pmatrix} \cdot\ dx = \int_0^1 \begin{pmatrix} f(\gamma^{(2)}(t)) \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ \varphi_2(b) - \varphi_1(b) \end{pmatrix}\ dt = 0$$

und

$$\int_{C_4} \begin{pmatrix} f(x) \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \ dx = \int_0^1 \begin{pmatrix} f(\gamma^{(4)}(t)) \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ \varphi_2(a) - \varphi_1(a) \end{pmatrix} \ dt = 0$$

erhält man schließlich:

$$\int_B \frac{\partial f}{\partial x_2}(x) \ dx = -\int_C \begin{pmatrix} f(x) \\ 0 \end{pmatrix} \cdot dx.$$

Wir nehmen nun an, dass sich B folgendermaßen darstellen lässt:

$$B = \{(x,y)^T \in \mathbb{R}^2 \colon y \in [c,d],\ \psi_1(y) \leq x \leq \psi_2(y)\},$$

wobei $\psi_1 \colon [c,d] \to \mathbb{R}$ und $\psi_2 \colon [c,d] \to \mathbb{R}$ stückweise stetig differenzierbare Funktionen sind. Man nennt B einen Normalbereich (bezüglich der y-Achse).

Dann erhält man völlig analog:

$$\int_B \frac{\partial f}{\partial x_1}(x) \ d(x_1,x_2) = -\int_{-C} \begin{pmatrix} 0 \\ f(x) \end{pmatrix} \cdot dx = \int_C \begin{pmatrix} 0 \\ f(x) \end{pmatrix} \cdot dx.$$

Satz 7.7 (Greenscher Integralsatz)**.** *Sei B ein Normalbereich sowohl bezüglich der x-Achse also auch bezüglich der y-Achse und sei $f \colon X \to \mathbb{R}^2$ eine stetig differenzierbare Funktion mit $B \subset X$. Dann gilt:*

$$\boxed{\int_B \left(\frac{\partial f_2}{\partial x_1}(x) - \frac{\partial f_1}{\partial x_2}(x) \right) \ d(x_1,x_2) = \int_C f(x) \cdot dx.}$$

Beweis.

$$\int_B \left(\frac{\partial f_2}{\partial x_1}(x) - \frac{\partial f_1}{\partial x_2}(x) \right) \ d(x_1,x_2) = \int_B \frac{\partial f_2}{\partial x_1}(x) \ d(x_1,x_2) - \int_B \frac{\partial f_1}{\partial x_2}(x) \ d(x_1,x_2)$$
$$= \int_C \begin{pmatrix} f_1(x) \\ 0 \end{pmatrix} \cdot dx + \int_C \begin{pmatrix} 0 \\ f_2(x) \end{pmatrix} \cdot dx = \int_C \begin{pmatrix} f_1(x) \\ f_2(x) \end{pmatrix} \cdot dx = \int_C f(x) \cdot dx.$$

□

Folgerung

Ersetzt man f_1 durch $-f_2$ und f_2 durch f_1 erhält man:

$$\int_B \left(\frac{\partial f_1}{\partial x_1}(x) + \frac{\partial f_2}{\partial x_2}(x) \right) \ d(x_1,x_2) = \int_C \begin{pmatrix} -f_2(x) \\ f_1(x) \end{pmatrix} \cdot dx.$$

C lässt sich als endliche Summe von stetig differenzierbaren Kurven $C^{(i)}$ mit der Parametrisierung $\gamma^{(i)}\colon [0,1] \to \mathbb{R}^2$ darstellen. Also

$$\begin{aligned}
&\int_C \begin{pmatrix} -f_2(x) \\ f_1(x) \end{pmatrix} \cdot dx = \sum_i \int_{C^{(i)}} \begin{pmatrix} -f_2(x) \\ f_1(x) \end{pmatrix} \cdot dx \\
&\quad = \sum_i \int_0^1 \begin{pmatrix} -f_2(\gamma^{(i)}(t)) \\ f_1(\gamma^{(i)}(t)) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} (\gamma_1^{(i)})'(t) \\ (\gamma_2^{(i)})'(t) \end{pmatrix} \, dt = \sum_i \int_0^1 \begin{pmatrix} f_1(\gamma^{(i)}(t)) \\ f_2(\gamma^{(i)}(t)) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} (\gamma_2^{(i)})'(t) \\ -(\gamma_1^{(i)})'(t) \end{pmatrix} \, dt \\
&= \sum_i \int_0^1 f(\gamma^{(i)}(t)) \cdot n(\gamma^{(i)}(t)) \, \|(\gamma^{(i)})'(t)\| \, dt = \sum_i \int_{C^{(i)}} f(x) \cdot n(x) \, ds \\
&= \int_C f(x) \cdot n(x) \, ds
\end{aligned}$$

mit

$$n(\gamma^{(i)}(t)) = \frac{1}{\|(\gamma^{(i)})'(t)\|} \begin{pmatrix} (\gamma_2^{(i)})'(t) \\ -(\gamma_1^{(i)})'(t) \end{pmatrix}.$$

Geometrische Bedeutung: $n(x)$ ist jener Einheitsvektor, der im Punkt $x \in \partial B$ normal zur Tangentenrichtung der Randkurve liegt und nach außen zeigt.

Es gilt also (Gaußscher Integralsatz in $\mathbb{R}^2$):

$$\boxed{\int_B \left(\frac{\partial f_1}{\partial x_1}(x) + \frac{\partial f_2}{\partial x_2}(x) \right) \, d(x_1, x_2) = \int_C f(x) \cdot n(x) \, ds.}$$

Übliche Schreibweise der Integralsätze mit $\int_{\partial B}$ anstelle von $\int_C$.

Erweiterung auf allgemeinere Gebiete

- Der Greensche Satz gilt auch für Gebiete, die durch Drehung eines Normalbereiches entstehen. (Beweis mit Hilfe einer Koordinatentransformation und der Substitutionsregel)
- Der Greensche Satz gilt auch für Gebiete, die sich aus (gedrehten oder ungedrehten) Normalbereichen zusammensetzen lassen: Randkurven im Inneren werden entgegengesetzt durchlaufen und liefern daher keinen Beitrag.

Anwendungen

Aus dem Greenschen bzw. dem Gaußschen Integralsatz erhält man:

- Flächenformel:

$$|B| = \frac{1}{2} \int_{\partial B} \begin{pmatrix} -x_2 \\ x_1 \end{pmatrix} \cdot dx = \frac{1}{2} \int_{\partial B} (-x_2 \, dx_1 + x_1 \, dx_2)$$

– Beispiel: Flächeninhalt der Ellipse $B = \{x \in \mathbb{R}^2 \colon \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \leq 1\}$
Parameterdarstellung der Randkurve: $\gamma\colon [0, 2\pi) \to \mathbb{R}^2$, $\gamma(t) = (a\cos t, b\sin t)^T$.

$$|B| = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} \begin{pmatrix} -b\sin t \\ a\cos t \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -a\sin t \\ b\cos t \end{pmatrix} dt = ab\,\pi.$$

- Partielle Integration:

$$\int_B \frac{\partial f}{\partial x_i}(x)\, g(x)\; dx = \int_{\partial B} f(x)\, g(x)\, n_i(x)\; ds - \int_B f(x)\, \frac{\partial g}{\partial x_i}(x)\; dx$$

- 1. Greensche Identität:

$$\int_B \Big(g(x)\, \Delta f(x) + \nabla f(x) \cdot \nabla g(x)\Big)\; dx = \int_{\partial B} g(x)\, \frac{\partial f}{\partial n}(x)\; ds$$

mit $(\partial f/\partial n)(x) = n(x) \cdot \nabla f(x)$

- 2. Greensche Identität:

$$\int_B \Big(g(x)\, \Delta f(x) - f(x)\, \Delta g(x))\Big) dx = \int_{\partial B} \left(g(x)\, \frac{\partial f}{\partial n}(x) - f(x)\, \frac{\partial g}{\partial n}(x)\right) ds$$

7.4 Oberflächenintegrale

Formulierung des Greenschen Integralsatzes in $\mathbb{R}^3$: Mit

- der Fläche $S = B \times \{0\} \subset \mathbb{R}^3$ und dem Einheitsnormalvektor $n(x) = (0, 0, 1)^T$ auf S,
- der positiv orientierten Randkurve ∂S von S in $\mathbb{R}^3$ und
- dem Vektorfeld $f\colon X \to \mathbb{R}^3$, X offen und $S \subset X \subset \mathbb{R}^3$, gegeben durch

$$f(x_1, x_2, x_3) = \begin{pmatrix} f_1(x_1, x_2) \\ f_2(x_1, x_2) \\ 0 \end{pmatrix}$$

erhält der Greensche Satz folgendes Aussehen:

$$\boxed{\int_S \operatorname{rot} f(x) \cdot n(x)\; d\sigma = \int_{\partial S} f(x) \cdot dx.}$$

mit dem Oberflächenintegral, gegeben durch

$$\int_S \operatorname{rot} f(x) \cdot n(x)\; d\sigma = \int_B \operatorname{rot} f(x) \cdot n(x)\; d(x_1, x_2).$$

Wir werden nun den Integralsatz für allgemeinere Flächen formulieren. Dazu brauchen wir zunächst die Definition des Oberflächenintegrals.