4. Übung WS 2011/12: Häufig gemachte Fehler

Iterative Lösung von linearen Gleichungssystemen

- In den verschiedenen Algorithmen ausnutzen, dass es sich um eine Tridiagonalmatrix handelt $\Rightarrow$ schnellere Rechenzeit
- Fehlerhafte Berechnung des Lastvektors (siehe 2. Übung WS 2011/12: Häufig gemachte Fehler)
- Bei zu langsamer Konvergenz, sollten verschiedene Werte für ω im SOR-Verfahren getestet werden
- Beim SOR-Verfahren lautet die Formel für die Berechnung der $(k+1)$-ten Iterierten:

$$\begin{aligned}
\tilde{x}_i^{(k+1)} &= \frac{1}{a_{i,i}} \left(b_i - \sum_{j=1}^{i-1} a_{i,j} x_j^{(k+1)} - \sum_{j=i+1}^{n} a_{i,j} x_j^{(k)} \right) \\
x_i^{(k+1)} &= x_i^{(k)} + \omega \left(\tilde{x}_i^{(k+1)} - x_i^{(k)} \right) \\
&\text{für } i = 1, \dots, n
\end{aligned}$$

UND NICHT:

$$\begin{aligned}
\tilde{x}_i^{(k+1)} &= \frac{1}{a_{i,i}} \left(b_i - \sum_{j=1}^{i-1} a_{i,j} \tilde{x}_j^{(k+1)} - \sum_{j=i+1}^{n} a_{i,j} x_j^{(k)} \right) \\
&\text{für } i = 1, \dots, n \\
x^{(k+1)} &= x^{(k)} + \omega \left(\tilde{x}^{(k+1)} - x^{(k)} \right)
\end{aligned}$$

- Im Algorithmus des CG-Verfahrens:

$$\beta^{(k+1)} = -\frac{(Aw^{(k+1)}, s^{(k)})}{(As^{(k)}, s^{(k)})} \text{ (auf das Minus nicht vergessen!)}$$

Ein restringiertes Optimierungsproblem

- Aufschreiben der Lagrange Funktion:

  $$L(x_1, x_2, x_3, \lambda_1, \lambda_2) = x_1 - x_2 - x_3 + \lambda_1(x_1^2 + 2x_2^2 - 1) + \lambda_2(3x_1 - 4x_3)$$

- Angabe des KKT-Systems:

  $$\begin{aligned}
  &\nabla_{x,\lambda} L(x, \lambda) = 0 \\
  &\qquad\qquad \Longleftrightarrow \\
  &\frac{\partial L}{\partial x_1}(x_1, x_2, x_3, \lambda_1, \lambda_2) = 1 + 2\lambda_1 x_1 + 3\lambda_2 = 0 \\
  &\frac{\partial L}{\partial x_2}(x_1, x_2, x_3, \lambda_1, \lambda_2) = -1 + 4\lambda_1 x_2 = 0 \\
  &\frac{\partial L}{\partial x_3}(x_1, x_2, x_3, \lambda_1, \lambda_2) = -1 - 4\lambda_2 = 0 \\
  &\frac{\partial L}{\partial \lambda_1}(x_1, x_2, x_3, \lambda_1, \lambda_2) = x_1^2 + 2x_2^2 - 1 = 0 \\
  &\frac{\partial L}{\partial \lambda_2}(x_1, x_2, x_3, \lambda_1, \lambda_2) = 3x_1 - 4x_3 = 0
  \end{aligned}$$

- Angabe der Hesse-Matrix für das Newton-Verfahren:

  $$H(x_1, x_2, x_3, \lambda_1, \lambda_2) = \begin{pmatrix} 2\lambda_1 & 0 & 0 & 2x_1 & 3 \\ 0 & 4\lambda_1 & 0 & 4x_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -4 \\ 2x_1 & 4x_2 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & -4 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

- Argumentation, warum der Punkt $(-\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, -\frac{1}{4})$ ein Minimum ist (mit Hilfe von Satz 4.19)

- Angabe des Satzes 4.16 und Prüfung der Voraussetzungen:

  - f und c sind stetig differenzierbar
  - $m = 2 < 3 = n$
  - $c'(x_1, x_2, x_3) = \begin{pmatrix} 2x_1 & 4x_2 & 0 \\ 3 & 0 & -4 \end{pmatrix}$
    Der Rang dieser Matrix, für $x \neq 0 \vee y \neq 0$, ist $2 = m$
    $(x, y) = (0, 0)$ erfüllt die NB nicht

Ein Optimalsteuerproblem

Im folgenden sind grob die Antworten auf die einzelnen Teilaufgaben gegeben. Für Gruppe N-Z muss man zuerst die Variationsformulierung der Nebenbedingung aufstellen:

$$\int_0^1 y'(x)v'(x)dx = \int_0^1 u(x)v(x)dx \quad \forall v \in V_0 = V_g := \{v \in H^1(0,1) : v(0) = 0\}$$

FEM - Diskretisierung

Für das diskretisierte Optimalsteuerproblem erhält man:

$$\min_{(\underline{y},\underline{u})\in\mathbb{R}^{n_s\times(n_c+1)}} (M_S\underline{y},\underline{y}) - 2(\underline{y},\underline{y_d}) + \frac{\alpha}{2}(M_C\underline{u},\underline{u})$$

$$\text{mit NB: } K\underline{y} = M_{SC}\underline{u}$$

- $M_S = \Big[(\varphi_i,\varphi_j)_{L_2(0,1)}\Big]_{i,j=1\dots,n_s}$
- $M_C = \Big[(\varphi_i,\varphi_j)_{L_2(0,1)}\Big]_{i,j=0\dots,n_c}$
- $M_{SC} = \Big[(\varphi_i,\varphi_j)_{L_2(0,1)}\Big]_{i=1\dots,n_s,\ j=0\dots,n_c}$
- $K = \Big[\Big(\varphi_i',\varphi_j'\Big)_{L_2(0,1)}\Big]_{i,j=1\dots,n_s}$

KKT - System

Lagrange Funktion:

$$L(\underline{y},\underline{u},\underline{\lambda}) = (M_S\underline{y},\underline{y}) - 2(\underline{y},\underline{y_d}) + \frac{\alpha}{2}(M_C\underline{u},\underline{u}) + (\underline{\lambda}, M_{SC}\underline{u} - K\underline{y})$$

KKT-System:

$$\begin{aligned}
&\nabla_{\underline{y},\underline{u},\underline{\lambda}} L(\underline{y},\underline{u},\underline{\lambda}) = 0 \qquad \Longleftrightarrow \\
&\nabla_{\underline{y}} L(\underline{y},\underline{u},\underline{\lambda}) = 2M_S\underline{y} - 2\underline{y_d} - K\underline{\lambda} = 0 \\
&\nabla_{\underline{u}} L(\underline{y},\underline{u},\underline{\lambda}) = \alpha M_C\underline{u} + M_{SC}^T\underline{\lambda} = 0 \\
&\nabla_{\underline{\lambda}} L(\underline{y},\underline{u},\underline{\lambda}) = M_{SC}\underline{u} - K\underline{y} = 0
\end{aligned}$$

Zur Bestimung von $(\underline{y},\underline{u},\underline{\lambda})$, ist also das folgende lineare Gleichungssystem zu lösen:

$$\begin{pmatrix} \alpha M_C & 0 & M_{SC}^T \\ 0 & 2M_S & -K \\ M_{SC} & -K & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \underline{u} \\ \underline{y} \\ \underline{\lambda} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2\underline{y_d} \\ 0 \end{pmatrix}$$

Ein mögliches Verfahren zur Lösung dieses indefiniten Systems, ist das Präkonditionierte MINRES (Minimal Residual) Verfahren