KV “NUMERIK und OPTIMIERUNG” FÜR MECHATRONIKER

- ÜBUNGEN -

WS 2011/2012

AUSGABETERMIN: Donnerstag, d. 19.1.2012

ABGABETERMIN: **Donnerstag, d. 16.2.2012, 12:00 Uhr**

NAME (**A-M**):

MATRIKELNUMMER:

Die Übungen sind grundsätzlich alleine zu machen ! Gruppenarbeit ist nicht erlaubt ! Die Ausarbeitung muss sorgfältig abgefasst werden. Wichtig ist, dass nicht nur die Lösung, sondern auch die Lösungsidee (der Weg zur Lösung) beschrieben wird. Programme sind in Form von gut dokumentierten Programmlisten beizulegen. Testresultate sind durch Beilage übersichtlich gestalteter Original-inputs und Original-outputs zu belegen. Das Abgabeformat ist DIN A4. Heften Sie alle Unterlagen zu einem Übungsblatt zusammen !
Die Tutor**Peter Gangl** (E-Mail: peter_gangl@gmx.at) und **Christoph Preissl** (E-Mail: c_preissl@yahoo.de) stehen Ihnen am Donnerstag von 13:00 – 14:30 im Besprechungsraum 354 des Instituts für Numerische Mathematik (SP2, 3. Stock) für eventuell auftretende Fragen zur Verfügung.

---

4 Numerische Lösung von linearen Gleichungssystemen und Optimierungsproblemen

4.1 Iterative Lösung von linearen Gleichungssystemen

Lösen Sie das lineare Gleichungssystem $K\underline{u} = \underline{f}$,

$$\frac{1}{h}\begin{bmatrix} 1+\alpha_a h & -1 & & & \\ -1 & 2 & -1 & & \mathbf{O} \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ \mathbf{O} & & -1 & 2 & -1 \\ & & & -1 & 1+\alpha_b h \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_0 \\ u_1 \\ \vdots \\ u_{n-1} \\ u_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \tilde{f}_0 + \alpha_a g_a \\ \tilde{f}_1 \\ \vdots \\ \tilde{f}_{n-1} \\ \tilde{f}_n + \alpha_b g_b \end{bmatrix}, \qquad (1)$$

n	Jacobi	Gauß-Seidel	SOR
10	$I(\varepsilon)$	$I(\varepsilon)$	$I(\varepsilon)$
100	$I(\varepsilon)$	$I(\varepsilon)$	$I(\varepsilon)$
1000	$I(\varepsilon)$	$I(\varepsilon)$	$I(\varepsilon)$

Tabelle 1: Iterationszahlen $I(\varepsilon)$

aus Übung 2 mit dem Jacobi-Verfahren, dem Gauß-Seidel-Verfahren und dem SOR-Verfahren (wählen Sie geeignete Überrelaxationsparameter ω) für $n = 10$, $n = 100$ und $n = 1000$, d.h. für $h = (b - a)/n = 1/n = 10^{-1}$, $h = 10^{-2}$ und $h = 10^{-3}$, wobei

$$\boxed{\alpha_a = 10^k \text{ und } \alpha_b = 10^{-k}}$$

mit $k =$ letzte Ziffer der Matrikelnummer $\in \{0, 1, \ldots, 9\}$. Berechnen Sie dabei die Komponenten $\tilde{f}_i,\ i = 0, 1, \ldots, n$, genauso wie in der Übung 2. Starten Sie die Iteration immer mit der Anfangsnäherung $\underline{u}^{(0)} = \underline{0}$. Stoppen Sie die Iteration, wenn der Defekttest

$$\|\underline{d}^{(m)}\| \leq \varepsilon\, \|\underline{d}^{(0)}\| \tag{2}$$

mit dem Defekt (Residuum) $\underline{d}^{(m)} = \underline{f} - K\underline{u}^{(m)}$ und der relativen Genauigkeit $\varepsilon = 10^{-6}$ erfüllt wird. Stellen Sie die Iterationszahlen $m = I(\varepsilon)$ in einer Tabelle der Form Tabelle 1 dar.

4.2 Ein restringiertes Optimierungsproblem

Lösen Sie das restrigierte, endlichdimensionale Optimierungsproblem:
Finde $x^* = (x_1^*, x_2^*, x_3^*) \in \mathbf{R}^3$:

$$f(x^*) = \min_{\substack{x \in \mathbf{R}^3 \\ \text{s.t. } c_1(x)=0 \text{ and } c_2(x)=0}} f(x), \tag{3}$$

wobei

$$\begin{aligned} f(x_1, x_2, x_3) &= x_1 - x_2 - x_3, && (4) \\ c_1(x_1, x_2, x_3) &= x_1^2 + 2x_2^2 - 1, && (5) \\ c_2(x_1, x_2, x_3) &= 3x_1 - 4x_3. && (6) \end{aligned}$$

Stellen Sie dazu die Lagrange-Funktion $L(x, \lambda)$ auf und leiten Sie daraus das Optimalitätssystem = KKT-System (= nichtlineares Gleichungssystem)

$$\nabla L(x, \lambda) = 0 \ \text{ in } \ \mathbf{R}^5 \tag{7}$$

her ! Lösen Sie das nichtlineare Gleichungssystem (7) mit dem Newton-Verfahren !

4.3 Ein Optimalsteuerproblem (50 Zusatzpunkte)

Wir betrachten das unendlichdimensionale Optimalsteuerproblem

$$\min_{\substack{y \in V_g \text{ and } u \in L_2(0,1) \\ \text{s.t. } \int_0^1 y'(x)v'(x)\,dx = \int_0^1 u(x)v(x)\,dx \ \forall v \in V_0}} \int_0^1 (y(x) - y_d(x))^2\,dx + \frac{\alpha}{2}\int_0^1 (u(x))^2\,dx \tag{8}$$

mit $V_g = V_0 := \{v \in V = H^1(0,1) : v(0) = v(1) = 0\} = H_0^1(0,1)$ und dem gegebenen Temperaturprofil $y_d \in L_2(0,1)$.

4.3.1 FEM - Diskretisierung (10 Zusatzpunkte)

Diskretisieren Sie das unendlichdimensionale Optimalsteuerproblem (8) mit linearen Finiten Elementen und geben Sie das diskretisierte (endlichdimensionale) Optimierungsproblem an !

4.3.2 KKT - System (10 Zusatzpunkte)

Schreiben Sie die Lagrange-Funktion und das KKT - System (= hier ein lineares Gleichungssystem !) auf !

4.3.3 Programm (20 Zusatzpunkte)

Schreiben Sie ein Programm zur Generierung und Lösung des KKT-Systems (Eingabedaten: $y_d(.)$, α, $h = 1/n$); Ausgabedaten: y_h und u_h) !

4.3.4 Test (10 Zusatzpunkte)

Testen Sie Ihr Programm für das gewünschte Temperaturprofil (desired state) $y_d(x) = 10$ für $x \in [0.4, 0.6]$ und $y_d(x) = 0$ sonst. Wählen Sie einen geeigneten (positiven) Regularisierungsparameter α (= Kostenparameter) ! Stellen Sie die berechnete optimale Steuerung $u_h(x)$ und den dazugehörigen Temperaturverlauf $y_h(x)$ sowie das gewünschte Temperaturprofil $y_d(x)$ in einer Abbildung grafisch dar !