KV “NUMERIK und OPTIMIERUNG” FÜR MECHATRONIKER
- ÜBUNGEN -

WS 2011/2012

AUSGABETERMIN: Mittwoch, d. 16.11.2011

ABGABETERMIN: **Mittwoch, d. 14.12.2011, 12:00 Uhr**

NAME (**N-Z**):

MATRIKELNUMMER:

Die Übungen sind grundsätzlich alleine zu machen ! Gruppenarbeit ist nicht erlaubt ! Die Ausarbeitung muss sorgfältig abgefasst werden. Wichtig ist, dass nicht nur die Lösung, sondern auch die Lösungsidee (der Weg zur Lösung) beschrieben wird. Programme sind in Form von gut dokumentierten Programmlisten beizulegen. Testresultate sind durch Beilage übersichtlich gestalteter Original-inputs und Original-outputs zu belegen. Das Abgabeformat ist DIN A4. Heften Sie alle Unterlagen zu einem Übungsblatt zusammen !
Die Tutoren **Peter Gangl** (E-Mail: peter_gangl@gmx.at) und **Christoph Preissl** (E-Mail: c_preissl@yahoo.de) stehen Ihnen am Donnerstag von 13:00 – 14:30 im Besprechungsraum 354 des Instituts für Numerische Mathematik (SP2, 3. Stock) für eventuell auftretende Fragen zur Verfügung.

---

2 Auflösung tridiagonaler Gleichungssysteme

2.1 Programmierbeispiel

Implementieren Sie das in der Vorlesung vorgestellte Verfahren zur Auflösung tridiagonaler Gleichungssysteme (GS) $K\underline{u} = \underline{f}$,

$$\begin{bmatrix} c_1 & b_1 & & & \\ a_2 & c_2 & b_2 & & \mathbf{O} \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ \mathbf{O} & & a_{n-1} & c_{n-1} & b_{n-1} \\ & & & a_n & c_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_{n-1} \\ u_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ \vdots \\ f_{n-1} \\ f_n \end{bmatrix}, \tag{1}$$

in einer von Ihnen gewählten Programmiersprache. Eingangsdaten (INPUT) sind die Dimension n und die Koeffizienten der Systemmatrix K und der rechten Seite $\underline{f}$. Ausgangsdaten (OUTPUT) sind die Komponenten des Lösungsvektors $\underline{u}$!

2.2 Testbeispiel

Analog zur Vorlesung (Abschnitt 2.2) betrachten wir jetzt das stationäre, eindimensionale Wärmeleitproblem

Gesucht ist $u \in C^2(0,1) \cap C^1(0,1] \cap C[0,1]$ so, dass die Differentialgleichung

$$-u''(x) = f(x) \quad \forall\, x \in (a,b) := (0,1) \tag{2}$$

und die Randbedingungen

$$u(0) = g_a \quad \text{und} \quad -\,u'(1) = g_b \tag{3}$$

erfüllt werden,

Die FE–Diskretisierung mit linearen Elementen auf gleichmäßigem Gitter mit der Schrittweite $h = 1/n$ führt auf das GS (überprüfen Sie das !)

$$\frac{1}{h}\begin{bmatrix} 2 & -1 & & \\ -1 & 2 & -1 & \mathbf{O} \\ & \ddots & \ddots & \ddots \\ \mathbf{O} & -1 & 2 & -1 \\ & & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_{n-1} \\ u_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \tilde{f}_1 + \frac{1}{h} g_a \\ \tilde{f}_2 \\ \vdots \\ \tilde{f}_{n-1} \\ \tilde{f}_n - g_b \end{bmatrix}. \tag{4}$$

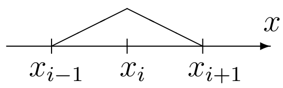
mit $g_a = 0$ und $g_b = 0$. Berechnen Sie die noch fehlenden Komponenten $\tilde{f}_i,\ i = 0, 1, \ldots, n$, analytisch oder mit Hilfe der Mittelpunktsregel (Gauß 1) für die rechte Seite (Wärmeintensitätsfunktion)

$$f(x) = \frac{k}{2}\, \exp(-k\,|x - 0.5|) \tag{5}$$

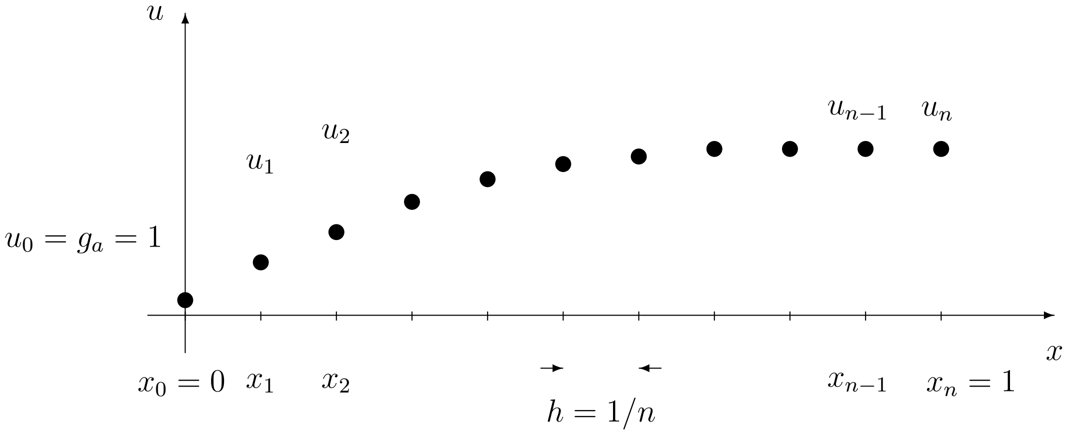
für $k \in \{1, 2, ..., 9\}$ bzw. $f(x) = \delta(x - 0.5)$ für $k = 0$, wobei k die letzte Ziffer der Matrikelnummer $\in \{0, 1, \ldots, 9\}$ ist.

Lösen Sie das GS (4) für $n = 100$ und $n = 1000$, d.h. für $h = (b-a)/n = 1/n = 10^{-2}$ und $h = 10^{-3}$. Stellen Sie die FE–Näherungslösung

$$u_h(x) = g_a \varphi_0(x) + \sum_{i=1}^{n} u_i \varphi_i(x)$$

mit $\varphi_i(x) =$ 

(stückweise lineare Ansatzfunktionen) grafisch dar, d.h.



2.3 Klassische Formulierung und Variationsformulierung

Leiten Sie die Variationsformulierung

$$\text{Ges. } u \in V_g : \; a(u,v) = \langle F, v\rangle \;\; \forall v \in V_0 \tag{6}$$

für das Testbeispiel (2)-(3) aus Abschnitt 2.2 her, d.h. geben Sie die Menge V_g der zulässigen Funktionen, den Testraum V_0, die Bilinearform $a(\cdot,\cdot) : V \times V \to R$ und die Linearform $\langle F, \cdot\rangle : V_0 \to R$ für unser Testbeispiel (2)-(3) an ! Zeigen Sie, dass eine hinreichend glatte Lösung $u \in C^2[a,b]$ des Variationsproblems (6) auch eine klassische Lösung ist, d.h. eine Lösung des Randwertproblems (2)-(3) ist.

2.4 Fakultative Zusatzaufgabe: Implizite Zeitintegrationsschemata (25 Zusatzpunkte)

Man löse die Schwingungsprobleme aus der Übung 1 mit dem rein impliziten Schema:

$$\left\{\begin{array}{l} \dfrac{u_i^{j+1} - 2u_i^j + u_i^{j-1}}{\Delta t^2} - a^2\,\dfrac{u_{i+1}^{j+1} - 2u_i^{j+1} + u_{i-1}^{j+1}}{\Delta x^2} = 0, \\ \qquad\qquad\qquad\qquad i = \overline{1, n-1},\; j = \overline{1, m-1}, \\ \underline{RB:}\; u_0^j = u(0,t_j) := 0,\; u_n^j = u(1,t_j) := 0,\; j = 1, \ldots, m, \\ \underline{AB:}\; u_i^0 = u_0(x_i),\; i = 0, 1, \ldots, n, \\ \qquad\;\; u_i^1 = u_i^0 + \Delta t\, u_1(x_i),\; i = 0, 1, \ldots, n, \end{array}\right. \tag{7}$$

Wählen Sie die Ortsschrittwerte Δx und die Zeitschrittwerte Δt geeignet (vgl. Übung 1). In (7) ist auf jedem Zeitschritt zur Bestimmung der $[u_i^{j+1}]_{i=\overline{1,n-1}}$ ein tridiagonales, lineares Gleichungssystem zu lösen. Benutzen Sie dazu das von Ihnen unter Punkt 2.1 programmierte Verfahren.