KV "NUMERIK und OPTIMIERUNG" FÜR MECHATRONIKER
- ÜBUNGEN -

WS 2011/2012

AUSGABETERMIN: Mittwoch, d. 19.10.2011

ABGABETERMIN: **Mittwoch, d. 16.11.2011, 12:00 Uhr**

NAME (**A-M**):

MATRIKELNUMMER:

Die Übungen sind grundsätzlich alleine zu machen ! Gruppenarbeit ist nicht erlaubt ! Die Ausarbeitung muss sorgfältig abgefasst werden. Wichtig ist, dass nicht nur die Lösung, sondern auch die Lösungsidee (der Weg zur Lösung) beschrieben wird. Programme sind in Form von gut dokumentierten Programmlisten beizulegen. Testresultate sind durch Beilage übersichtlich gestalteter Original-inputs und Original-outputs zu belegen. Das Abgabeformat ist DIN A4. Heften Sie alle Unterlagen zu einem Übungsblatt zusammen !
Die Tutoren **Peter Gangl** (E-Mail: peter_gangl@gmx.at) und **Christoph Preissl** (E-Mail: c_preissl@yahoo.de) stehen Ihnen am Donnerstag von 13:00 – 14:30 im Besprechungsraum 354 des Instituts für Numerische Mathematik (SP2, 3. Stock) für eventuell auftretende Fragen zur Verfügung.

---

1 Simulation der instationären, örtlich eindimensionalen Wärmeleitgleichung auf der Basis einer Differenzenapproximation

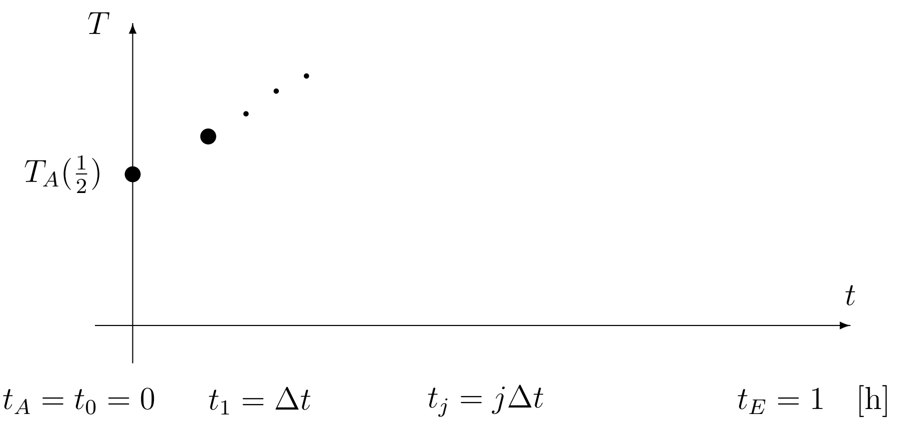
1.1 Programmierbeispiel

Für einen mantelisolierten Kupferstab $\left(\rho = 8960\,\frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{m}^3},\;\; c = 384\,\frac{\mathrm{J}}{\mathrm{kg}\cdot\mathrm{K}},\;\; \lambda = 394\,\frac{\mathrm{W}}{\mathrm{m\,K}}\right)$ der Länge $L = 1$ m, der wärmequellenfrei ($f = 0$) ist, an beiden Rändern mit dem gleichem Temperaturregime $T_a(t) = T_b(t) = g(t) := 60^\circ\mathrm{C}\,(1-t)$ gekühlt wird und für $t_A = 0$ die Temperaturverteilung

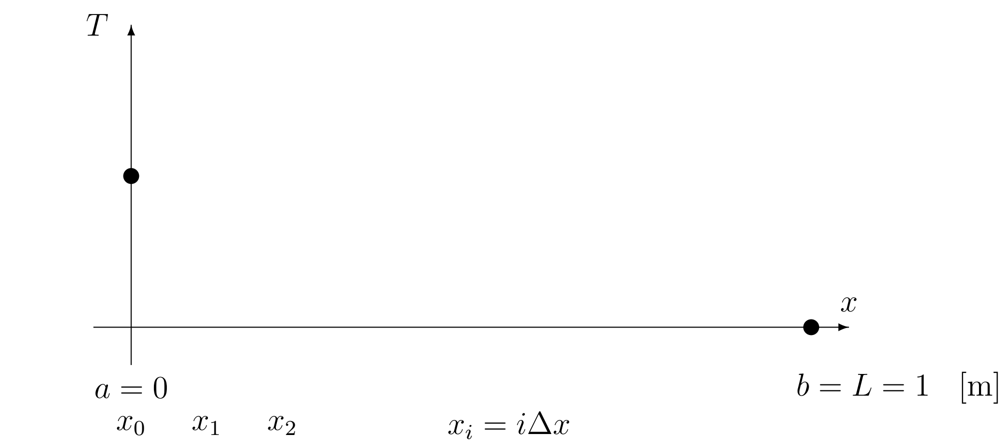
$$T_A(x) = 60^\circ + 20^\circ \sin\left(\frac{(k+1)\pi x}{L}\right),\; k = \text{letzte Ziffer der Matrikelnummer},$$

besitzt, soll

a) der Temperaturverlauf im Stabmittelpunkt



b) und die Temperatur nach einer Stunde $t_E = 1$ h



ermittelt werden. Zu welchen Zeitpunkt $t = t_* > 0$ ist die Temperatur T im gesamten Stab erstmals kleiner oder höchstens gleich $40°$ C. Beachten Sie die Masseinheiten !

Wählen Sie zur Orts– und Zeitdiskretisierung das in der Vorlesung (Kapitel 1) angegebene explizite Differenzenschema (6), und implementieren Sie den angegebenen Algorithmus in der von Ihnen gewählten Programmiersprache ! Führen Sie die Computersimulation mit der Ortsschrittweite $\Delta x = 1$ cm und mit zwei von Ihnen gewählten Zeitschrittweiten $\Delta t \leq 1$ min $\equiv 60''$ durch ! Interpretieren Sie die erhaltenen Ergebnisse.

1.2 Approximationsuntersuchung

Untersuchen Sie die Genauigkeit der Approximationen

a) $$\frac{1}{\Delta x^2}\left(T(x_{i-1},t) - 2T(x_i,t) + T(x_{i+1},t)\right) \approx \frac{\partial^2 T}{\partial x^2}(x_i,t), \text{ d.h.}$$

$$\left|\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}(x_i,t) - \frac{T(x_{i-1},t) - 2T(x_i,t) + T(x_{i+1},t)}{\Delta x^2}\right| \leq ?$$

$(i \in \{1, 2, \ldots, n-1\})$

b) $$\frac{T_i(t_{j+1}) - T_i(t_{j-1})}{2\Delta t} = \frac{T_i(t_j + \Delta t) - T_i(t_j - \Delta t)}{2\Delta t} \approx \frac{d\,T_i(t_j)}{dt}, \text{ d.h.}$$

$$\left|\frac{d\,T_i(t_j)}{dt} - \frac{T_i(t_j + \Delta t) - T_i(t_j - \Delta t)}{2\Delta t}\right| \leq ?$$

$(j \in \{1, 2, \ldots, m-1\})$

c) $$\frac{T(x_i, t_j + \Delta t) - T(x_i, t_j)}{\Delta t} - \kappa\,\frac{T(x_i - \Delta x, t_j) - 2T(x_i, t_j) + T(x_i + \Delta x, t_j)}{\Delta x^2}$$
$$\approx \frac{\partial\,T(x_i, t_j)}{\partial t} - \kappa\,\frac{\partial^2\,T}{\partial x^2}(x_i, t_j), \text{ d.h.}$$

$$\left|\frac{\partial\,T(x_i, t_j)}{\partial t} - \kappa\,\frac{\partial^2\,T}{\partial x^2}(x_i, t_j) - \left[\tfrac{T(x_i, t_j + \Delta t) - T(x_i, t_j)}{\Delta t} - \kappa\,\tfrac{T(x_i - \Delta x, t_j) - 2T(x_i, t_j) + T(x_i + \Delta x, t_j)}{\Delta x^2}\right]\right| \leq ?$$

$(i \in \{1, 2, \ldots, n-1\},\ j \in \{1, 2, \ldots, m-1\})$

der Ableitungen durch Differenzenquotienten mittels Taylorreihenentwicklung !