

Prüfungsfragen

1. Modellieren Sie ein örtlich eindimensionales, instationäres Wärmeleitproblem und lösen Sie es numerisch mit dem Differenzenverfahren ! Was können Sie über Approximation, Stabilität und Konvergenz aussagen ?
2. Wie würden Sie das folgende örtlich eindimensionale Schwingungsproblem numerisch lösen ? Gesucht ist $u(x,t)$:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x,t) - \alpha \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,t) = f(x,t) \quad \forall (x,t) \in (0,1) \times (0,T] \quad (1)$$

unter den Randbedingungen

$$u(0,t) = u(1,t) = 0 \quad \forall t \in (0,T] \quad (2)$$

und den Anfangsbedingungen

$$u(x,0) = u_0(x) \text{ und } \frac{\partial u}{\partial t}(x,0) = u_1(x) \quad \forall x \in [0,1]. \quad (3)$$

3. Man löse die Zweipunkterandwertaufgabe

$$-u''(x) + a(x)u(x) = f(x) \quad \forall x \in (0,1), \quad u(0) = 1 \text{ und } u'(1) = 1 \quad (4)$$

mit der Methode der finiten Elemente ! Leiten Sie dazu zunächst die Variationsformulierung her und erklären Sie dann die Methode der finiten Elemente anhand des Beispiels (4) ! Leiten Sie das FE-Gleichungssystem $K\underline{u}_h = \underline{f}_h$ zur Bestimmung des Vektors $\underline{u}_h$ der Knotenparameter her !

4. In der Praxis werden Integrale der Form

$$\int_a^b g(x)dx$$

numerisch berechnet. Erklären Sie die Gauß-Formeln und leiten Sie eine Fehlerabschätzung für die Mittelpunktsregel (= Gauß 1 = einfachste Gauß-Formel) her ! Was verstehen Sie unter den verallgemeinerten (= zusammengesetzte) Gauß-Formeln ?

5. Was verstehen Sie unter einem Lagrangschen Interpolationspolynom und wie kann man es zur numerischen Integration nutzen ?
6. Wie würden Sie ein Gleichungssystem mit einer tridiagonalen Systemmatrix auflösen? Unter welchen Bedingungen können Sie die Durchführbarkeit und die Stabilität des Algorithmus garantieren ?

7. Geben Sie die Variationsformulierung des vom Prüfer ad hoc gegebenen 1D stationären Wärmeleitproblems an und lösen Sie es numerisch mit der Methode der finiten Elemente !
8. Erklären Sie die FEM-Technologie (elementweiser Aufbau der Steifigkeitsmatrix K_h und des Lastvektors $\underline{f}_h$ + Einbau der Randbedingungen) zur Generierung des FEM-Gleichungssystems $K_h \underline{u}_h = \underline{f}_h$ an Hand des Beispiels

$$-u''(x) = f(x), x \in (a, b), u(a) = g_a, -u'(b) = \alpha_b(u(b) - g_b) \quad (5)$$

aus der Vorlesung.

9. Zeigen Sie, dass das Variationsproblem

$$\text{Ges. } u \in V_g : a(u, v) = \langle F, v \rangle \forall v \in V_0 \quad (6)$$

äquivalent zum Energieminimierungsproblem

$$\text{Ges. } u \in V_g : J(u) = \min_{w \in V_g} J(w) := \frac{1}{2} a(w, w) - \langle F, w \rangle \quad (7)$$

ist, falls die Bilinearform $a(., .)$ symmetrisch und positiv ist. Was verstehen Sie unter dem Galerkin- und dem Ritz-Verfahren ?

10. Was verstehen Sie unter einer Triangularisierung eines Rechengebietes Ω ? Welche Informationen zur Representation eines Netzes werden durch einen Netzgenerator generiert ?
11. Erklären Sie die FEM-Technologie (elementweiser Aufbau der Steifigkeitsmatrix K_h und des Lastvektors $\underline{f}_h$ + Einbau der Randbedingungen) zur Generierung des FEM-Gleichungssystems $K_h \underline{u}_h = \underline{f}_h$ an Hand des 2D Beispiels

$$-\frac{\partial}{\partial x_1}(\lambda_1(x) \frac{\partial u}{\partial x_1}(x)) - \frac{\partial}{\partial x_2}(\lambda_2(x) \frac{\partial u}{\partial x_2}(x)) + a(x)u(x) = f(x), x = (x_1, x_2) \in \Omega \quad (8)$$

mit Randbedingungen 1., 2. und 3. Art auf den Randstücken Γ_1, Γ_2 und Γ_3 von $\Gamma = \partial\Omega = \Gamma_1 \cup \Gamma_2 \cup \Gamma_3$ aus der Vorlesung.

12. Geben Sie die Variationsformulierung des vom Prüfer ad hoc gegebenen 2D stationären Wärmeleitproblems an und lösen Sie es numerisch mit der Methode der finiten Elemente !
13. Bei der Diskretisierung von elliptischen Randwertaufgaben zweiter Ordnung durch die FEM entstehen Gleichungssysteme der Art $K_h \underline{u}_h = \underline{f}_h$ zur Bestimmung des Vektors der Knotenwerte $\underline{u}_h$, wobei K_h die Steifigkeitsmatrix und $\underline{f}_h$ den Lastvektor bezeichnen. Welche Eigenschaften haben diese Gleichungssysteme ? Wie würden Sie diese Gleichungssysteme auflösen ?
14. Wie würden Sie zeitabhängige Probleme, d.h. Anfangsrandwertaufgaben für parabolische und hyperbolische partielle Differentialgleichungen diskretisieren, wenn Sie zur Ortsdiskretisierung die FEM verwenden wollen ?

15. Erklären Sie das Gaußsche Eliminationsverfahren ! Zeigen Sie, dass das Gaußsche Eliminationsverfahren zur LU -Zerlegung äquivalent ist ! Wieviele arithmetische Operationen benötigt das Gaußsche Eliminationsverfahren für eine vollbesetzte Matrix und wieviele arithmetische Operationen für eine Bandmatrix mit der Bandweite m ?
16. Welche Iterationsverfahren zur Lösung linearer Gleichungssysteme der Form $Ax = b$ kennen Sie ? Erklären Sie diese Iterationsverfahren !
17. Erklären Sie das (vorkonditionierte) Richardson-Verfahren ? Wie können Sie die klassischen Iterationsverfahren als vorkonditionierte Richardson-Verfahren interpretieren ? Was wissen Sie über die Konvergenz des Richardson-Verfahrens ?
18. Erklären Sie das Gradientenverfahren und das konjugierte Gradientenverfahren ! Was verstehen Sie unter einer Vorkonditionierung ?
19. Klassifizieren Sie die Optimierungsprobleme und erläutern Sie die theoretischen Grundlagen zu den freien Optimierungsproblemen !
20. Erklären Sie Abstiegsverfahren, Newton-Verfahren und Quasi-Newtonverfahren zur Lösung freier Optimierungsprobleme der Form: Gesucht ist $x^* \in R^n$:

$$f(x^*) = \min_{x \in R^n} f(x) ! \quad (9)$$

21. Was wissen Sie über die Konvergenz und die Konvergenzgeschwindigkeit des Newton-Verfahrens zur Lösung nichtlinearer Gleichungssysteme der Form: Gesucht ist $x^* \in R^n$: $F(x^*) = 0$ in R^n ?
22. Klassifizieren Sie die Optimierungsprobleme und erläutern Sie die theoretischen Grundlagen zu den restringierten Optimierungsproblemen !
23. Wie würden Sie ein restringierten Optimierungsproblem der Form

$$\min_{x \in R^n} f(x) \quad (10)$$

$$\text{s.t. } c_i(x) = 0, \quad i = 1, 2, \dots, m \quad (11)$$

mit Nebenbedingungen in Gleichungsform lösen ?

24. Wie würden Sie ein allgemeines restringierten Optimierungsproblem mit Nebenbedingungen in Gleichungs- und Ungleichungsform lösen ?