Lösbarkeit und Auflösung bei impliziten RKM

Die Gleichungen für $\boldsymbol{g} = (\boldsymbol{g}_1, \ldots, \boldsymbol{g}_s)$ einer $\boldsymbol{s}$-stufigen impliziten RKM haben folgende Form:

$$\boldsymbol{g} \;=\; \boldsymbol{G}(\boldsymbol{g},\, \boldsymbol{t}_j,\, \boldsymbol{u}_h,\, \boldsymbol{\tau}_j) \tag{23}$$

Lösbarkeit:

- Falls $\boldsymbol{f}$ stetig und Lipschitz-Bedingung (15) erfüllt, folgt (aus Banach'schem Fixpunksatz) dass (23) eindeutige Lösung besitzt – allerdings nur für hinreichend kleine Zeitschrittweite $\boldsymbol{\tau}_j$; siehe Übungsbsp. 63.
- Falls System zusätzlich dissipativ, gilt eindeutige Lösbarkeit von (23) sogar für beliebige Zeitschrittweite; siehe Übungsbsp. 64.

Implizite RKM als Einschrittverfahren:
Im Falle der eindeutigen Lösbarkeit kann man die Lösung $\boldsymbol{g}$ als Funktion von dein "Eingangsdaten" im aktuellen Zeitschritt darstellen:

$$\boldsymbol{g} \;=\; \boldsymbol{\gamma}(\boldsymbol{t}_j,\, \boldsymbol{u}_j,\, \boldsymbol{\tau}_j)$$

Substitution in die Vorschrift für den nächsten Zeitschritt ergibt:

$$\boldsymbol{u}_{j+1} \;=\; \boldsymbol{u}_j + \boldsymbol{\tau}_j \underbrace{\sum_{k=1}^{s} \boldsymbol{b}_k\, \boldsymbol{f}(\boldsymbol{t}_j + \boldsymbol{c}_k \boldsymbol{\tau}_j,\, \boldsymbol{\gamma}_k(\boldsymbol{t}_j,\, \boldsymbol{u}_j,\, \boldsymbol{\tau}_j))}_{=:\phi(t_j, u_j, \tau_j)}$$

$\Longrightarrow$ jede s-stufige RKM ist ein Einschrittverfahren!

Auflösung von (23) in der Praxis:

(a) $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{t},\, \boldsymbol{u})$ hängt ***linear*** von $\boldsymbol{u}$ ab
$\Longrightarrow$ pro Schritt ist ein ***lineares*** Gleichungssystem zu lösen

(b) $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{t},\, \boldsymbol{u})$ hängt ***nichtlinear*** von $\boldsymbol{u}$ ab
$\Longrightarrow$ pro Schritt ist ein ***nichtlineares*** Gleichungssystem zu lösen.
Es bietet sich das Fixpunktverfahren (aus dem Beweis des Banach'schen Fixpunktsatzes) an. Oft gewinnt man einen guten Startwert aus einer expliziten RKM. Für steife Differentialgleichungen ist oft das Newton-Verfahren eine bessere Alternative zum Fixpunktverfahren.