A-Stabilität impliziter RKM

Die Begriffe ***Stabilitätsfunktion, Stabilitätsbereich, A-Stabilität*** können völlig analog für implizite RKM eingeführt werden. Es gilt wieder:

$$\begin{aligned} R(z) &= b^\top [I - zA]^{-1} e \\ S &= \{z \in \mathbb{C} : |R(z)| \leq 1\} \end{aligned}$$

Unterschied zum expliziten Fall: A ist nicht strikte Dreiecksmatrix!
Die Matrix $I - zA$ ist invertierbar für alle $z \in \mathbb{C} \setminus \{1/\mu : \mu \in \sigma(A)\}$.

Form der Stabilitätsfunktion für eine s-stufige implizite RKM:

$$R(z) = \frac{P(z)}{Q(z)}$$

wobei P, Q Polynome vom Grad $\leq s$ und $P(0) = Q(0) = 1$.
(kann gezeigt werden)

Die **Aussage von Satz 2.40** gilt auch für den impliziten Fall. Für eine dissipative Gleichung der Form (18) gilt also:

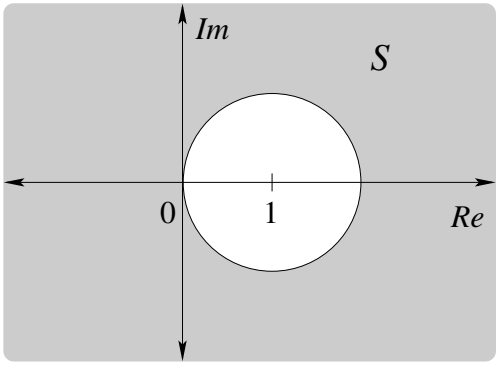
A-Stabilität $\Longrightarrow$ Kontraktivität $\Longrightarrow$ Stabilität mit Stabilitätskonstante 1

Beispiel 2.50

1. **Impliziter Euler**
   Für Gleichung (22):

$$\begin{aligned} & u_{j+1} = u_j + \tau_j \lambda u_{j+1} \\ \Longrightarrow \quad & u_{j+1} = \frac{1}{1 - \tau_j \lambda} u_j = R(\tau_j \lambda) u_j \quad \Longrightarrow \quad R(z) = \frac{1}{1 - z} \end{aligned}$$

   Stabilitätsbereich $S = \{z \in \mathbb{C} : \frac{1}{|1-z|} \leq 1\} = \{z \in \mathbb{C} : |z - 1| \geq 1\}$



   $\mathbb{C}^- \subset S \quad \Longrightarrow \quad$ A-stabil !

2. **Implizite Mittelpunkgsregel**

$$
\begin{aligned}
g_1 &= u_j + \tfrac{\tau_j}{2}\lambda g_1 \quad \Longrightarrow \quad g_1 = \frac{1}{1-\frac{\tau_j\lambda}{2}}u_j \\
u_{j+1} &= u_j + \tau_j\lambda g_1 \\
\Longrightarrow \quad u_{j+1} &= \left(1+\frac{\tau_j\lambda}{1-\frac{\tau_j\lambda}{2}}\right)u_j = \underbrace{\left(\frac{1+\frac{\tau_j\lambda}{2}}{1-\frac{\tau_j\lambda}{2}}\right)}_{=R(\tau_j\lambda)}u_j \\
\Longrightarrow \quad R(z) &= \frac{1+\frac{z}{2}}{1-\frac{z}{2}}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
S &= \{z\in\mathbb{C} : |1+\tfrac{z}{2}| \le |1-\tfrac{z}{2}|\} \\
&= \{\alpha+i\beta : (1+\tfrac{\alpha}{2})^2+\beta^2 \le (1-\tfrac{\alpha}{2})^2+\beta^2\} = \mathbb{C}^-
\end{aligned}
$$

$\Longrightarrow$ A-stabil

3. **θ-Methode**

Es kann gezeigt werden dass

- $R(z) = \dfrac{1+(1-\theta)z}{1-\theta z}$
- $|R(z)| \le 1 \quad \Longleftrightarrow \quad (1-2\theta)\,|z|^2 + 2\,\mathrm{Re}(z) \le 0$

$\Longrightarrow$ nur A-stabil ist falls $\theta \ge 1/2$!