

Explizite Runge-Kutta Methoden (RKM)

Quadraturformel mit s Stützstellen:

$$\int_t^{t+\tau} g(s) ds \approx \tau \sum_{i=1}^s b_i g(t + c_i \tau)$$

Gewichte b_i , Stützstellen $t + c_i \tau$, $b_i, c_i \in [0, 1]$

Übertragung auf Zeitschrittverfahren:

$$\int_t^{t+\tau} f(s, u(s)) ds \approx \tau \sum_{i=1}^s b_i f(t + c_i \tau, u(t + c_i \tau))$$

Konvention: $c_1 = 0$

Problem: $u(t + c_i \tau)$ unbekannt für $i > 1$

Lösung: Approximation durch Quadraturformel mit $i - 1$ Stützstellen:

$$\begin{aligned} u(t + c_i \tau) &= u(t) + \int_t^{t+c_i \tau} f(s, u(s)) ds \\ &\approx u(t) + \tau \sum_{k=1}^{i-1} a_{ik} f(t + c_k \tau, u(t + c_k \tau)) \end{aligned}$$

(für fixes i : Gewichte a_{ik} , Stützstellen $t + c_k \tau$, $k = 1, \dots, i - 1$)

Rekursive Approximation:

$$\begin{aligned} g_1 &= u_j \\ g_2 &= u_j + \tau_j a_{21} f(t_j, g_1) \\ g_3 &= u_j + \tau_j [a_{31} f(t_j, g_1) + a_{32} f(t_j + c_2 \tau_j, g_2)] \\ &\vdots \\ g_s &= u_j + \tau_j [a_{s,1} f(t_j, g_1) + \dots + a_{s,s-1} f(t_j + c_s \tau_j, g_s)] \\ u_{j+1} &= u_j + \tau_j [b_1 f(t_j, g_1) + \dots + b_s f(t_j + c_s \tau_j, g_s)] \end{aligned}$$

Ein Zeitschrittverfahren dieser Form heißt

***s*-stufige explizite Runge-Kutta Methode** (RKM)

und ist durch die Koeffizienten a_{ik} , b_i , c_i definiert.

Alle diese Methoden sind Einschrittverfahren (erkennt man durch Substitution der Hilfsgrößen g_i).

Zur besseren Übersicht ordnet man die Koeffizienten im sogenannten **Butcher Tableau** an:

$$\begin{array}{c|cccccc}
 0 & & & & & & \\
 c_2 & a_{21} & & & & & \\
 c_3 & a_{31} & a_{32} & & & & \\
 \vdots & \vdots & & \ddots & & & \\
 c_s & a_{s,1} & a_{s,2} & \cdots & a_{s,s-1} & & \\
 \hline
 & b_1 & b_2 & \cdots & b_{s-1} & b_s &
 \end{array}
 \qquad
 \begin{array}{c|c}
 c & A \\
 \hline
 & b^T
 \end{array}$$

Beispiele

1. Explizites Euler-Verfahren:

$$\begin{array}{c|c}
 0 & \\
 \hline
 & 1
 \end{array}
 \qquad
 \begin{array}{l}
 \text{explizite 1-stufige RKM} \\
 \text{Konsistenzordnung 1}
 \end{array}$$

2. Verbessertes Euler-Verfahren:

$$\begin{array}{c|cc}
 0 & & \\
 1/2 & 1/2 & \\
 \hline
 & 0 & 1
 \end{array}
 \qquad
 \begin{array}{l}
 \text{explizite 2-stufige RKM} \\
 \text{Konsistenzordnung 2}
 \end{array}$$

3. Klassische RKM der Ordnung 4:

$$\begin{array}{c|cccc}
 0 & & & & \\
 1/2 & 1/2 & & & \\
 1/2 & 0 & 1/2 & & \\
 1 & 0 & 0 & 1 & \\
 \hline
 & 1/6 & 1/3 & 1/3 & 1/6
 \end{array}
 \qquad
 \begin{array}{l}
 \text{explizite 4-stufige RKM} \\
 \text{Konsistenzordnung 4}
 \end{array}$$

Warnung:

Nicht jede explizite s -stufige RKM hat automatisch Konsistenzordnung s !
 Maximale Konsistenzordnung expliziter s -stufiger RKM ist meistens $< s$:

Stufe s	1	2	3	4	5	6	7	8	9	$s \geq 10$
max. Konsistenzordnung	1	2	3	4	4	5	6	6	7	$\leq s - 3$

Methoden höherer Konsistenzordnung (z.B. Ordnung 4) sind in der Praxis extrem wichtig.