## Lineare DGl. mit konstanten Koeffizienten

Sei $\boldsymbol{J} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ konstante Matrix.

$$
(18) \qquad \begin{aligned} \boldsymbol{u}'(t) &= \boldsymbol{J}\,\boldsymbol{u}(t) + \boldsymbol{f}(t) \qquad \forall t \in (0, T) \\ \boldsymbol{u}(0) &= \boldsymbol{u}_0 \end{aligned}
$$

**Lemma 2.33.** Problem (18) ist genau dann dissipativ, wenn

$$
(\boldsymbol{J}\,\boldsymbol{v}, \boldsymbol{v}) \leq 0 \quad \forall \boldsymbol{v} \in \mathbb{R}^n
$$

*Beweis:* mms

**Definition 2.34.** Eine Matrix $\boldsymbol{M} \in \mathbb{C}^{n\times n}$ heißt ***normal*** (bezüglich eines Skalarprodukts in $\mathbb{C}^n$) falls sie eine orthonormale Basis von Eigenvektoren (in $\mathbb{C}^n$) besitzt.

**Lemma 2.35.** Eine selbstadjungierte Matrix ist normal.

**Annahme:** $\boldsymbol{J}$ in (18) ist normal.
Seien $(\boldsymbol{\lambda}_i, \boldsymbol{e}_i) \in \mathbb{C} \times \mathbb{C}^n$, $i = 1, \ldots, n$ die Eigenpaare. Dann gilt:

$$
\boldsymbol{J} = \boldsymbol{X}^{-1}\boldsymbol{D}\,\boldsymbol{X}
$$

wobei $\boldsymbol{X} = [\boldsymbol{e}_1|\boldsymbol{e}_2|\cdots|\boldsymbol{e}_n]$, $\boldsymbol{D} = \mathrm{diag}(\boldsymbol{\lambda}_i)_{i=1}^n$

**Transformation und Homogenisierung der DGl. (18):** Für

$$
(19) \qquad \begin{aligned} \widehat{\boldsymbol{u}}'(t) &= \boldsymbol{D}\,\widehat{\boldsymbol{u}}(t) \\ \widehat{\boldsymbol{u}}(t) &= \boldsymbol{X}\boldsymbol{u}_0 \end{aligned} \qquad\qquad (20) \qquad \begin{aligned} \boldsymbol{v}'(t) &= \boldsymbol{f}(t) \\ \boldsymbol{v}(0) &= \boldsymbol{0} \end{aligned}
$$

gilt: $\boldsymbol{u}(t) = \boldsymbol{v}(t) + \boldsymbol{X}^{-1}\widehat{\boldsymbol{u}}(t)$ löst (18).

**Beobachtung:**

- System (20) hat Lipschitz-Konstante $\boldsymbol{L} = \boldsymbol{0} \implies$ jedes Zeitschrittverfahren dafür ist stabil!
- System (19) zerfällt in $\boldsymbol{n}$ ***entkoppelte*** DGl. der Form

$$
(21) \qquad \begin{aligned} \widehat{\boldsymbol{u}}_i'(t) &= \boldsymbol{\lambda}_i\,\widehat{\boldsymbol{u}}_i(t) \\ \widehat{\boldsymbol{u}}_i(0) &= (\boldsymbol{X}\boldsymbol{u}_0)_i \end{aligned}
$$

- Eine Runge-Kutta Methode für (18) besteht im Wesentlichen aus
  - einer entsprechenden (stabilen) RKM für (20) und
  - $\boldsymbol{n}$ entsprechenden RKM für (21).