Einschrittverfahren

Definition 2.25 ($\tau_{\max}$ ... fixe maximale Zeitschrittweite)

- Ein Zeitschrittverfahren für (10) der Form

$$\boldsymbol{u_0} \quad \text{gegeben}$$
$$\boldsymbol{u_{j+1}} = \boldsymbol{u_j + \tau_j\,\phi(t_j,\, u_j,\, \tau_j)}$$

mit $\phi : [0, T] \times \mathbb{R}^n \times [0, \tau_{\max}] \to \mathbb{R}^n$ heißt ***Einschrittverfahren***.

- ***Globaler Fehler:*** $\boldsymbol{e_\tau(t_j) \;=\; u(t_j) - u_j}$
- ***Lokaler Fehler:*** $\boldsymbol{d_\tau(t_{j+1}) \;=\; u(t_{j+1}) - \big[u(t_j) + \tau_j\,\phi(t_j,\, u(t_j),\, \tau_j)\big]}$
- ***Konsistenzfehler:*** $\boldsymbol{\psi_0 \;=\; u(t_0) - u_0 \;=\; 0}$

$$\boldsymbol{\psi_{j+1} \;=\; \psi_\tau(u)(t_{j+1}) \;=\; \tfrac{1}{\tau_j} d_\tau(t_{j+1})}$$

"Störungs-Eigenschaft":

$$\boldsymbol{u(t_{j+1}) \;=\; u(t_j) + \tau_j\big[\phi(t_j,\, u(t_j),\, \tau_j) + \psi_{j+1}\big]}$$

- Ein Einschrittverfahren heißt ***konsistent*** mit (10) falls

$$\boldsymbol{\|\psi_\tau(u)\|_{Y_\tau} \longrightarrow 0} \quad \text{für} \quad \boldsymbol{\tau \longrightarrow 0}$$

- Ein Einschrittverfahren heißt ***stabil*** falls für jede Störung $\boldsymbol{y_\tau \in X_\tau}$:

$$\boldsymbol{\|u_\tau - v_\tau\|_{X_\tau} \;\le\; C\,\|y_\tau\|_{Y_\tau}}$$

(Stabilitätskonst. $\boldsymbol{C}$ unabh. von $\boldsymbol{\tau}$) wobei $\boldsymbol{u_\tau,\, v_\tau \in X_\tau}$ definiert durch

$$\begin{array}{ll} \boldsymbol{u_0} \ \text{gegeben} & \boldsymbol{u_{j+1} = u_j + \tau_j\,\phi(t_j,\, u_j,\, \tau_j)} \\ \boldsymbol{v_0 \;=\; u_0 + y_0} & \boldsymbol{v_{j+1} = v_j + \tau_j\big[\phi(t_j,\, u_j,\, \tau_j) + y_{j+1}\big]} \end{array}$$

- Ein Einschrittverfahren heißt ***konvergent*** falls

$$\boldsymbol{\|e_\tau(u)\|_{X_\tau} \longrightarrow 0} \quad \text{für} \quad \boldsymbol{\tau \longrightarrow 0}$$

Offensichtlich gilt wieder: **Stabilität + Konsistenz $\Longrightarrow$ Konvergenz**

Lemma 2.26. Für ein Einschrittverfahren sei die Bedingung

(17) $$\boldsymbol{\exists \Lambda > 0 : \quad \|\phi(t,\, v,\, \tau) - \phi(t,\, w,\, \tau)\| \le \Lambda\,\|v - w\|}$$
$$\boldsymbol{\forall t \in [0, T] \;\; \forall v, w \in \mathbb{R}^n \;\; \forall \tau \in [0, \tau_{\max}]}$$

erfüllt. Dann gilt für $j = 1, \ldots, m$:

$$\boldsymbol{\|u_j - v_j\| \;\le\; e^{(t_j - t_0)\Lambda}\,\big[\|y_0\| + \tau_0\|y_1\| + \cdots + \tau_{j-1}\|y_j\|\big]}$$

Insbesondere ist das Einschrittverfahren stabil mit Stabilitätskonstante $\boldsymbol{e^{T\Lambda}}$.

Beweis: analog zu Lemma 2.19 □