ÜBUNGEN ZU

ANALYSIS FÜR PHYSIKER(INNEN)

für den 21. 1. 2011

---

71. Bestimmen Sie die Bogenlänge der Kurve C, gegeben durch die Parametrisierung $\gamma\colon [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^3$ mit $\gamma(t) = (\cos t, \sin t, t)^T$.

72. Berechnen Sie für das Vektorfeld $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, gegeben durch
$$f(x_1, x_2) = \begin{pmatrix} x_1^2 - x_2^2 \\ -2x_1x_2 \end{pmatrix},$$
die Jacobi-Matrix $f'(x)$ und untersuchen Sie, ob $f'(x)$ symmetrisch ist.

73. Berechnen Sie für das Vektorfeld $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ aus der Übungsaufgabe 72 ein Skalarfeld $\phi\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ mit $\operatorname{grad} \phi(x) = f(x)$.

74. Bestimmen Sie für das Vektorfeld $f\colon A \to \mathbb{R}^2$ mit $A = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)^T\}$, gegeben durch
$$f(x_1, x_2) = \frac{1}{r^2} \begin{pmatrix} -x_2 \\ x_1 \end{pmatrix} \quad \text{mit} \quad r = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}$$
das Kurvenintegral $\int_C f(x) \cdot dx$ entlang des Kreises C mit der Parametrisierung $\gamma\colon [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^2$, $\gamma(t) = (\cos t, \sin t)^T$.

75. Berechnen Sie für das Vektorfeld f aus dem Übungsbeispiel 74 die Jacobi-Matrix $f'(x)$ und untersuchen Sie, ob $f'(x)$ symmetrisch ist.

76. Ist das Vektorfeld f aus Übungsaufgabe 74 (als Funktion auf dem Definitionsbereich $A = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)^T\}$) konservativ? Ist das Vektorfeld f aus Übungsaufgabe 74 als Funktion auf dem kleineren Definitionsbereich
$$\tilde{A} = \mathbb{R}^2 \setminus \{(x_1, 0)^T : x_1 \leq 0\}$$
konservativ?

    Hinweis: Beachten Sie für die erste Frage das Ergebnis der Übungsaufgabe 74. Untersuchen Sie für die zweite Frage, ob $\tilde{A}$ sternförmig ist.

77. Sei $x = (x_1, x_2)^T$ ein beliebiger Punkt in $A = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)^T\}$. Dieser Punkt besitzt eine eindeutige Darstellung in Polarkoordinaten: $x_1 = r \cos\varphi$ und $x_2 = r \sin\varphi$ mit $r \in (0, \infty)$ und $\varphi \in (-\pi, \pi]$. Die Kurve C_1 ist durch $\gamma_1\colon [0, 1] \to \mathbb{R}^2$ mit $\gamma_1(t) = (\cos(t\varphi), \sin(t\varphi))^T$ gegeben. Die Kurve C_2 ist durch $\gamma_2\colon [0, 1] \to \mathbb{R}^2$ mit $\gamma_2(t) = ((1 + t(r - 1)) \cos\varphi, (1 + t(r - 1)) \sin\varphi)^T$ gegeben. Die Kurve $C_x = C_1 + C_2$ verbindet den Anfangspunkt $(1, 0)^T$ mit dem Endpunkt $x = (x_1, x_2)^T$. Stellen Sie diese Kurve grafisch dar.

78. Berechnen Sie für das Vektorfeld f aus Übungsaufgabe 74 das Kurvenintegral

$$\int_{C_x} f(y) \cdot dy$$

entlang der Kurve C_x, die in Übungsaufgabe 77 definiert wurde.

79. Es gelten die Bezeichnungen aus Übungsaufgabe 78. Durch

$$\phi(x) = \int_{C_x} f(y) \cdot dy$$

ist ein Skalarfeld $\phi\colon A \to \mathbb{R}$ auf der Definitionsmenge $A = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)^T\}$ gegeben. Warum gilt $\operatorname{grad} \phi(x) = f(x)$ für alle $x \in \tilde{A} = \mathbb{R}^2 \setminus \{(x_1, 0)^T \colon x_1 \leq 0\}$?

Hinweis: Nicht nachrechnen sondern nachdenken (Satz 7.3).