ÜBUNGEN ZU

ANALYSIS FÜR PHYSIKER(INNEN)

für den 12. 1. 2011

---

62. Berechnen Sie die partiellen Ableitungen $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y,z)$, $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y,z)$ und $\frac{\partial f}{\partial z}(x,y,z)$ von $f(x,y,z) = x^2 \sin(x\,z) + y^2$.

63. Berechnen Sie die Ableitung (totale Ableitung, Fréchet-Ableitung, Jacobi-Matrix) $f'(x,y)$ der Funktion

$$f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, \quad \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} e^x \cos y \\ e^x \sin y \end{pmatrix}.$$

64. Seien $c \in \mathbb{R}$ eine gegebene konstante Zahl und $\vec{c} \in \mathbb{R}^3$ ein gegebener konstanter Vektor. Die drei Funktionen $\vec{f}\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $g\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, $\vec{h}\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ sind durch

$$\vec{f}(\vec{x}) = c\,\vec{x}, \quad g(\vec{x}) = \vec{c}\cdot\vec{x}, \quad \vec{h}(\vec{x}) = \vec{c}\times\vec{x}$$

gegeben. Berechnen Sie direkt (d.h.: ohne Verwendung von Produktregeln aus dem Skriptum): $\vec{f}\,'(\vec{x})$, $\nabla\cdot\vec{f}(\vec{x})$, $\nabla\times\vec{f}(\vec{x})$, $g'(\vec{x})$, $\nabla g(\vec{x})$, $\vec{h}\,'(\vec{x})$, $\nabla\cdot\vec{h}(\vec{x})$ und $\nabla\times\vec{h}(\vec{x})$.

65. Zeigen Sie für die Funktionen $f_1\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ mit $f_1(x,y) = e^x \cos y$ und $f_2\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ mit $f_2(x,y) = e^x \sin y$:

$$\frac{\partial f_1}{\partial x}(x,y) = \frac{\partial f_2}{\partial y}(x,y), \quad \frac{\partial f_1}{\partial y}(x,y) = -\frac{\partial f_2}{\partial x}(x,y)$$

und

$$\Delta f_1(x,y) = 0, \quad \Delta f_2(x,y) = 0,$$

wobei Δ den Laplace-Operator bezeichnet.

66. Das Produkt zweier Funktionen $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ und $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ lässt sich auch als Hintereinanderausführung der Funktionen $F\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ und $h\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ mit

$$F(x) = \begin{pmatrix} f(x) \\ g(x) \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad h(y) = y_1 \cdot y_2 \quad \text{für} \quad y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$$

darstellen:

$$f(x)\cdot g(x) = h(F(x)).$$

Verwenden Sie die Kettenregel, um die Ableitung von $h(F(x))$ darzustellen und bestätigen Sie damit die Produktregel. Wie lässt sich auf ähnliche Weise die Quotientenregel mit Hilfe der Kettenregel bestätigen?

67. Sei $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ eine differenzierbare Funktion und sei $g\colon [0,\infty) \times (-\pi,\pi] \to \mathbb{R}$ durch

$$g(r,\varphi) = f(r\,\cos\varphi, r\,\sin\varphi)$$

gegeben. Zeigen Sie:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial g}{\partial r}(r,\varphi) &= \cos\varphi\,\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) + \sin\varphi\,\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)\\
\frac{\partial g}{\partial \varphi}(r,\varphi) &= -r\,\sin\varphi\,\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) + r\,\cos\varphi\,\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)
\end{aligned}$$

mit $x = r\,\cos\varphi$ und $y = r\,\sin\varphi$. Folgern Sie daraus für $r \neq 0$:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) &= \cos\varphi\,\frac{\partial g}{\partial r}(r,\varphi) - \frac{\sin\varphi}{r}\,\frac{\partial g}{\partial \varphi}(r,\varphi)\\
\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) &= \sin\varphi\,\frac{\partial g}{\partial r}(r,\varphi) + \frac{\cos\varphi}{r}\,\frac{\partial g}{\partial \varphi}(r,\varphi).
\end{aligned}$$

Hinweis: Kettenregel für $g = f \circ T$ mit

$$T\colon [0,\infty) \times (-\pi,\pi] \to \mathbb{R}^2, \qquad \begin{pmatrix} r \\ \varphi \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} r\cos\varphi \\ r\sin\varphi \end{pmatrix}.$$

68. Bestimmen Sie die Richtung des steilsten Anstiegs und die Hesse-Matrix der Funktion $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ mit $f(x,y) = (x+y)\,e^{-x^2-y^2}$ jeweils im Punkt $(x_0,y_0) = (1,1)$.

69. Bestimmen Sie mindestens ein lokales Maximum und ein lokales Minimum der Funktion $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ mit $f(x,y) = (x+y)\,e^{-x^2-y^2}$.

70. Bestimmen Sie für die Funktion $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ mit $f(x,y) = e^x \cos y$ das Taylor-Polynom vom Grad 2, also

$$T_2(x,y) = f(x_0,y_0) + \nabla f(x_0,y_0) \cdot \begin{pmatrix} x - x_0 \\ y - y_0 \end{pmatrix} + \frac{1}{2} \begin{pmatrix} x - x_0 \\ y - y_0 \end{pmatrix}^T H_f(x_0,y_0) \begin{pmatrix} x - x_0 \\ y - y_0 \end{pmatrix}$$

an der Stelle $(x_0,y_0) = (0,0)$.