ÜBUNGEN ZU

ANALYSIS FÜR PHYSIKER(INNEN)

für den 15. 12. 2010

---

53. Zeigen Sie für alle $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$:
$$e^{z_1+z_2} = e^{z_1} \cdot e^{z_2}$$

54. Angenommen, die komplexen Zahlen $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ liegen in Polarform vor:
$$z_1 = r_1\, e^{i\,\varphi_1} \quad \text{und} \quad z_2 = r_2\, e^{i\,\varphi_2}.$$
Zeigen Sie die folgende Polarformen für das Produkt und den Quotienten der beiden Zahlen:
$$z_1 \cdot z_2 = r\, e^{i\,\varphi} \quad \text{mit} \quad r = r_1 \cdot r_2 \quad \text{und} \quad \varphi = \varphi_1 + \varphi_2$$
und, falls $z_2 \neq 0$:
$$\frac{z_1}{z_2} = r\, e^{i\,\varphi} \quad \text{mit} \quad r = \frac{r_1}{r_2} \quad \text{und} \quad \varphi = \varphi_1 - \varphi_2.$$

55. Bestimmen Sie (mit Hilfe der Rechenregeln in $\mathbb{C}$) für die beiden komplexen Zahlen
$$z_1 = \frac{(2+3i)^2 - (-7+9i)}{(1-i)\cdot(3+i)} \quad \text{und} \quad z_2 = \left(\frac{1-i}{1+i}\right)^3 + \frac{3-i}{1+3i}$$
jeweils den Realteil und den Imaginärteil.

56. Mit Hilfe der komplexen Exponentialfunktion lassen sich die Sinus- und die Kosinusfunktion auch für komlexe Zahlen $z \in \mathbb{C}$ definieren:
$$\sin z = \frac{1}{2i}\left(e^{i\,z} - e^{-i\,z}\right), \quad \cos z = \frac{1}{2}\left(e^{i\,z} + e^{-i\,z}\right)$$
Überprüfen Sie, ob die Identität
$$\sin^2 z + \cos^2 z = 1$$
auch für alle $z \in \mathbb{C}$ gültig bleibt.

57. Zeigen Sie für alle $n \in \mathbb{N}$ und $x \in \mathbb{R}$:
$$(\cos x + i \sin x)^n = \cos(n\,x) + i\ \sin(n\,x)$$
Verwenden Sie anschließend diese Identität, um $\sin(3x)$ als einen (polynomialen) Ausdruck von $\sin x$ und $\cos x$ darzustellen.

    Hinweis: Formulieren Sie die Identität mit Hilfe der komplexen Exponentialfunktion.

58. Finden Sie die Lösungen der Differentialgleichung

$$(x+1)\, y'(x) = x\, y(x)^2.$$

59. Die Differentialgleichung für den radioaktiven Zerfall lautet

$$N'(t) = -\lambda\, N(t).$$

Dabei beschreibt $N(t)$ die Menge der zur Zeit t noch nicht zerfallenen Kerne und λ ist eine positive Konstante (die Zerfallskonstante). Finden Sie die Lösung dieser Differentialgleichung.

60. Der Strom $I(t)$ in einem elektrischen Schwingkreis, bestehend aus einer Spule und einem Kondensator, erfüllt die Differentialgleichung

$$L\, I''(t) + \frac{1}{C}\, I(t) = 0.$$

Dabei ist $L > 0$ die (konstante) Induktivität der Spule und $C > 0$ die (konstante) Kapazität des Kondensators. Bestimmen Sie die Lösungen mit Hilfe eines Exponentialansatzes $I(t) = e^{\lambda t}$ mit $\lambda \in \mathbb{C}$.

61. Finden Sie jene Lösung $x(t)$ der Differentialgleichung

$$m\, x''(t) = -m\, g - k\, x(t),$$

die die Anfangsbedingungen

$$x(0) = 0 \quad \text{und} \quad x'(0) = 0$$

erfüllt. Dabei sind m, g und k gegebene positive Konstante.