ÜBUNGEN ZU

ANALYSIS FÜR PHYSIKER(INNEN)

für den 1. 12. 2010

---

46. Finden Sie eine Lösung der Differentialgleichung

$$y'(x) = y(x) \cdot (1 - y(x)),$$

die die Bedingung

$$y(0) = \frac{1}{2}$$

erfüllt.

47. Finden Sie die Lösungen der Differentialgleichung

$$y'(x) + x \cdot y(x) = 0$$

48. Finden Sie die Lösungen der Differentialgleichung

$$y'(x) - y(x) = e^x$$

49. Finden Sie die Lösungen der Differentialgleichung (harmonischer Oszillator mit Dämpfung):

$$mx''(t) = -k\,x(t) - b\,x'(t)$$

mit der Masse $m > 0$, dem Reibungskoeffizienten $b > 0$ und der Federkonstanten $k > 0$.

50. Die Lösungen

$$x(t) = c_1\,\cos(\omega_0 t) + c_2\,\sin(\omega_0 t)$$

der Differentialgleichung (ungedämpfter harmonischer Oszillator)

$$mx''(t) = -k\,x(t)$$

lassen sich auch in der Form

$$x(t) = A\,\cos(\omega_o t + \varphi)$$

mit geeigneten Werten $A \geq 0$ und φ. Bestimmen Sie A und φ in Abhängigkeit von c_1 und c_2.

Hinweis: Additionstheorem

51. Zeigen Sie für alle $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$:

$$|z_1 \cdot z_2| = |z_1| \cdot |z_2|$$

und, falls $z_2 \neq 0$:

$$\left|\frac{z_1}{z_2}\right| = \frac{|z_1|}{|z_2|}$$

52. Sei $c = a + i\,b \in \mathbb{C}$ mit $a, b \in \mathbb{R}$. Finden Sie alle Lösungen $z = x + i\,y \in \mathbb{C}$ mit $x, y \in \mathbb{R}$, sodass

$$z^2 = c$$

Hinweis: In der Vorlesung wurde der Spezialfall $c = -1$ diskutiert. Gehen Sie analog vor.

53. Zeigen Sie für alle $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$:

$$e^{z_1+z_2} = e^{z_1} \cdot e^{z_2}$$

54. Angenommen, die komplexen Zahlen $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ liegen in Polarform vor:

$$z_1 = r_1\, e^{i\,\varphi_1} \quad \text{und} \quad z_2 = r_2\, e^{i\,\varphi_2}.$$

Zeigen Sie die folgende Polarformen für das Produkt und den Quotienten der beiden Zahlen:

$$z_1 \cdot z_2 = r\, e^{i\,\varphi} \quad \text{mit} \quad r = r_1 \cdot r_2 \quad \text{und} \quad \varphi = \varphi_1 + \varphi_2$$

und, falls $z_2 \neq 0$:

$$\frac{z_1}{z_2} = r\, e^{i\,\varphi} \quad \text{mit} \quad r = \frac{r_1}{r_2} \quad \text{und} \quad \varphi = \varphi_1 - \varphi_2.$$