ÜBUNGEN ZU

ANALYSIS FÜR PHYSIKER(INNEN)

für den 24. 11. 2010

---

37. Sei $\alpha \in \mathbb{R}$. Die Funktion $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ist durch

$$f(x) = \begin{cases} |x|^\alpha & \text{für } x > 0 \\ -|x|^\alpha & \text{für } x < 0 \end{cases}$$

gegeben. (Der unwichtige Wert $f(0)$ ist 0 für $\alpha \neq 0$ bzw. 1 für $\alpha = 0$). Berechnen Sie das unbestimmte Integral

$$\int f(x)\, dx.$$

38. Berechnen Sie für die Funktion $f(x)$ aus Beispiel 37 das bestimmte Integral

$$\int_{-1}^{1} f(x)\, dx.$$

39. Berechnen Sie für die Funktion $f(x)$ aus Beispiel 37 das uneigentliche Integral

$$\int_{1}^{\infty} f(x)\, dx.$$

40. Bestimmen Sie das unbestimmte Integral

$$\int x \cdot e^{-\frac{x^2}{2}}\, dx$$

und damit das bestimmte Integral

$$\int_a^b x \cdot e^{-\frac{x^2}{2}}\, dx.$$

Welchen Wert besitzt das (uneigentliche) Integral für $a = -\infty$ und $b = \infty$?

41. In der Vorlesung wurde gezeigt, dass

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{x^2}{2}}\, dx = \sqrt{2} \cdot \Gamma\left(\frac{1}{2}\right).$$

Stellen Sie auf ähnliche Weise das uneigentliche Integral

$$\int_{-\infty}^{\infty} x^2 \cdot e^{-\frac{x^2}{2}}\, dx$$

mit Hilfe der Gammafunktion dar.

42. Zeigen Sie:

$$\int_{-\infty}^{\infty} x^2 \cdot e^{-\frac{x^2}{2}}\, dx = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{x^2}{2}}\, dx$$

43. Seien μ und σ zwei gegebene reelle Zahlen mit $\sigma > 0$. Die Funktion $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ist durch

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\, e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2}$$

gegeben. Zeigen Sie:

$$\int_{-\infty}^{\infty} x f(x)\, dx = \mu$$

Sie dürfen ohne Beweis verwenden, dass $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$.

44. Zeigen Sie für die Funktion $f(x)$ aus Beispiel 43:

$$\int_{-\infty}^{\infty} (x-\mu)^2 f(x)\, dx = \sigma^2.$$

45. Finden Sie die Lösungen der Differentialgleichung

$$y'(x) = y(x) \cdot (1 - y(x))$$