

**ÜBUNGEN ZU  
ANALYSIS FÜR PHYSIKER(INNEN)**

für den 17. 11. 2010

---

28. Berechnen Sie:

$$\int \frac{x^3 + x^2 - x + 1}{(x-1)^2(x^2+1)} dx.$$

29. Zeigen Sie für  $g(t) = 2 \arctan t$ :

$$\sin x = \frac{2t}{1+t^2}, \quad \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2} \quad \text{mit} \quad x = g(t).$$

Hinweis: Zeigen und verwenden Sie die Formeln

$$\sin(2y) = \frac{2 \tan y}{1 + \tan^2 y} \quad \text{und} \quad \cos(2y) = \frac{1 - \tan^2 y}{1 + \tan^2 y}$$

für  $y = \frac{x}{2}$ .

30. Berechnen Sie

$$\int \frac{1 + \sin x}{1 + \cos x} dx$$

Hinweis: Verwenden Sie die Substitutionsregel mit  $x = 2 \arctan t$ .

31. Berechnen Sie

$$\int \frac{e^x}{1 + e^{2x}} dx$$

32. Sei  $n \in \mathbb{N}_0$  und bezeichne  $T_n(x)$  das Taylor-Polynom der Exponentialfunktion  $e^x$  an der Stelle  $x_0 = 0$  vom Grad  $n$ . Bestimmen Sie jene Stammfunktion von  $T_n(x)$ , die an der Stelle  $x = 0$  den Wert 1 besitzt.

33. Zeigen Sie für  $n \in \mathbb{Z}$ :

$$\int t^n e^{-t} dt = -t^n e^{-t} + n \int t^{n-1} e^{-t} dt.$$

34. Zeigen Sie für  $n \in \mathbb{N}$  mit  $n \geq 2$ :

$$\int \sin^n x dx = \frac{n-1}{n} \int \sin^{n-2} x dx - \frac{1}{n} \cos x \sin^{n-1} x$$

Hinweise: Gehen Sie ähnlich wie in der Vorlesung im Spezialfall  $n = 2$  vor.

35. Leiten Sie analog zu Beispiel 34 eine ähnliche Formel für die entsprechenden bestimmten Integrale über dem Intervall  $[0, 2\pi]$  her.

36. Berechnen Sie für  $n \in \mathbb{N}$ :

$$\int_0^{2\pi} \sin^n x dx$$