

ÜBUNGEN ZU
ANALYSIS FÜR PHYSIKER(INNEN)

für den 17. 11. 2010

28. Berechnen Sie:

$$\int \frac{x^3 + x^2 - x + 1}{(x-1)^2(x^2+1)} dx.$$

29. Zeigen Sie für $g(t) = 2 \arctan t$:

$$\sin x = \frac{2t}{1+t^2}, \quad \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2} \quad \text{mit} \quad x = g(t).$$

Hinweis: Zeigen und verwenden Sie die Formeln

$$\sin(2y) = \frac{2 \tan y}{1 + \tan^2 y} \quad \text{und} \quad \cos(2y) = \frac{1 - \tan^2 y}{1 + \tan^2 y}$$

für $y = \frac{x}{2}$.

30. Berechnen Sie

$$\int \frac{1 + \sin x}{1 + \cos x} dx$$

Hinweis: Verwenden Sie die Substitutionsregel mit $x = 2 \arctan t$.

31. Berechnen Sie

$$\int \frac{e^x}{1 + e^{2x}} dx$$

32. Sei $n \in \mathbb{N}_0$ und bezeichne $T_n(x)$ das Taylor-Polynom der Exponentialfunktion e^x an der Stelle $x_0 = 0$ vom Grad n . Bestimmen Sie jene Stammfunktion von $T_n(x)$, die an der Stelle $x = 0$ den Wert 1 besitzt.

33. Zeigen Sie für $n \in \mathbb{Z}$:

$$\int t^n e^{-t} dt = -t^n e^{-t} + n \int t^{n-1} e^{-t} dt.$$

34. Zeigen Sie für $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq 2$:

$$\int \sin^n x dx = \frac{n-1}{n} \int \sin^{n-2} x dx - \frac{1}{n} \cos x \sin^{n-1} x$$

Hinweise: Gehen Sie ähnlich wie in der Vorlesung im Spezialfall $n = 2$ vor.

35. Leiten Sie analog zu Beispiel 34 eine ähnliche Formel für die entsprechenden bestimmten Integrale über dem Intervall $[0, 2\pi]$ her.

36. Berechnen Sie für $n \in \mathbb{N}$:

$$\int_0^{2\pi} \sin^n x dx$$