ÜBUNGEN ZU

ANALYSIS FÜR PHYSIKER(INNEN)

für den 3. 11. 2010

---

10. Berechnen Sie die Ableitung der Funktion $f\colon (0,\infty) \to \mathbb{R}$ mit
$$f(x) = \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x.$$

11. Bestimmen Sie alle lokalen Extrema der Funktionen $f\colon [-2,2] \to \mathbb{R}$ und $g\colon [-2,2] \to \mathbb{R}$ mit
$$f(x) = x^3 - x \quad \text{und} \quad g(x) = x^3.$$

12. Seien μ und σ zwei gegebene reelle Zahlen mit $\sigma > 0$. Bestimmen Sie alle lokalen Extrema der Funktion $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit
$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\, e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2}.$$

13. Zeigen Sie: Sei $I \subset \mathbb{R}$ ein Intervall, $f\colon I \to \mathbb{R}$ sei 4-mal stetig differenzierbar. Sei x_0 ein innerer Punkt von I mit
$$f'(x_0) = f''(x_0) = f'''(x_0) = 0 \quad \text{und} \quad f''''(x_0) > 0.$$
Dann ist x_0 ein lokales Minimum.

14. Zeigen Sie: Sei $I \subset \mathbb{R}$ ein Intervall, $f\colon I \to \mathbb{R}$ sei 3-mal stetig differenzierbar. Sei x_0 ein innerer Punkt von I mit
$$f'(x_0) = f''(x_0) = 0 \quad \text{und} \quad f'''(x_0) \neq 0.$$
Dann ist x_0 kein lokales Extremum.

15. Zeigen Sie:
$$e^x \geq 1 + x \quad \text{für alle } x \in \mathbb{R}.$$
Hinweis: Verwenden Sie die Taylor-Formel für die Exponentialfunktion und $n = 1$ und untersuchen Sie das Restglied.

16. Bestimmen Sie für die Funktion $\sin x$ das Taylor-Polynom $T_4(x)$ an der Stelle $x_0 = 0$ und zeigen Sie
$$|\sin x - T_4(x)| \leq \frac{|x|^5}{5!}.$$

17. Bestimmen Sie die Taylor-Reihen für die Funktionen $\sinh x$ und $\cosh x$ an der Stelle $x_0 = 0$.

18. Sei α eine positive reelle Zahl. Bestimmen Sie die Taylor-Reihe für die Funktion $f\colon (-1,\infty) \to \mathbb{R}$ mit $f(x) = (1+x)^\alpha$ an der Stelle $x_0 = 0$.