

ÜBUNGEN ZU
ANALYSIS FÜR PHYSIKER(INNEN)

für den 27. 10. 2010

1. Seien $r, s \in \mathbb{R}$. Zeigen Sie:

$$(x^r)^s = x^{r \cdot s} \quad \text{für alle } x \in \mathbb{R}, x > 0.$$

Hinweis: Zeigen Sie die Behauptung der Reihe nach zunächst für Exponenten aus $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$ und $\mathbb{Q}$.

2. Sei $a \in \mathbb{R}$ mit $a > 0$. Zeigen Sie:

$$a^{x+y} = a^x \cdot a^y \quad \text{für alle } x, y \in \mathbb{R}.$$

Hinweis: Zeigen Sie die Behauptung der Reihe nach zunächst für Exponenten aus $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$ und $\mathbb{Q}$.

3. Zeigen Sie für alle $x \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned}\sin(2x) &= 2 \sin(x) \cos(x) \\ \sin(3x) &= 3 \sin(x) - 4 \sin^3(x)\end{aligned}$$

4. Zeigen Sie für alle $x, y \in \mathbb{R}$:

$$\sin(x+y) - \sin(x-y) = 2 \cos(x) \sin(y)$$

5. Stellen Sie die Funktion $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, die durch die Funktionsgleichung

$$y = x^2 + x + 1$$

gegeben ist, grafisch dar. Bestimmen Sie einen geeigneten Definitionsbereich $A \subset \mathbb{R}$ und einen geeigneten Wertebereich $B \subset \mathbb{R}$, sodass $f: A \rightarrow B$ bijektiv ist und bestimmen Sie die Umkehrfunktion.

6. Zeigen Sie:

$$\operatorname{artanh}(x) = \frac{1}{2} \ln \left(\frac{1+x}{1-x} \right) \quad \text{für alle } x \in \mathbb{R}, |x| < 1.$$

7. Zeigen Sie die Summenregel: Seien $f: A \rightarrow \mathbb{R}$, $g: A \rightarrow \mathbb{R}$ reelle Funktionen und $x_0 \in A$ ein nicht-isolierter Punkt. Angenommen, f und g sind in x_0 differenzierbar. Dann gilt: $f+g$ ist ebenfalls im Punkt x_0 differenzierbar und es gilt:

$$(f+g)'(x_0) = f'(x_0) + g'(x_0).$$

8. Sei $g: A \longrightarrow \mathbb{R}$ eine reelle Funktion und $x_0 \in A$ ein nicht-isolierter Punkt. Angenommen, g ist in x_0 differenzierbar und $g(x_0) \neq 0$. Zeigen Sie, dass die Funktion $\frac{1}{g}$ ebenfalls im Punkt x_0 differenzierbar und es gilt:

$$\left(\frac{1}{g}\right)'(x_0) = -\frac{g'(x_0)}{g(x_0)^2}.$$

Hinweis: $\frac{1}{g} = h \circ g$ mit der reellen Funktion $h: \mathbb{R} - \{0\} \longrightarrow \mathbb{R}$, $h(x) = \frac{1}{x}$.

9. Bestimmen Sie die Ableitungen der folgenden Funktionen:

- (a) $f(x) = \operatorname{arccoth}(x)$.
- (b) $f(x) = x^x$ mit $x > 0$
- (c) $f(x) = x^2 \cdot \cot(2x) + \ln|x|$