Skriptum zur Vorlesung Analysis für Physiker(innen) I

Walter Zulehner
Institut für Numerische Mathematik
Johannes Kepler Universität Linz

Sommersemester 2011

Inhaltsverzeichnis

Kapitel 1

Reelle Funktionen

1.1 Die Menge der reellen Zahlen: $\mathbb{R}$

- Operationen: $x, y \in \mathbb{R}$: $x + y$, $x \cdot y$, $x - y$, $\frac{x}{y}$, falls $y \neq 0$.
- Ordnungsrelationen: $x \leq y$, $x < y$, $x \geq y$, $x > y$.
- Betrag $|x|$ und Abstand $|x - y|$.

Wichtige Teilmengen:

- Die Menge der natürlichen Zahlen: $\mathbb{N} = \{1, 2, \ldots\}$, $\mathbb{N}_0 = \{0, 1, 2, \ldots\}$.
- Die Menge der ganzen Zahlen: $\mathbb{Z} = \{\ldots, -2, -1, 0, 1, 2, \ldots\}$
- Die Menge der rationalen Zahlen: $\mathbb{Q} = \{\frac{m}{n} : m \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N}\}$

1.2 Der mathematische Funktionsbegriff

Jedem Element $x \in A$ wird genau ein Element $y \in B$ zugeordnet. Schreibweise:

$$\begin{array}{rcl} f\colon A & \longrightarrow & B \\ x & \mapsto & f(x) \end{array}$$

oder in Form einer Funktionsgleichung

$$y = f(x).$$

A Definitionsbereich, B Wertebereich.

- $A, B \subset \mathbb{R}$: reelle Funktion. Meist ist A ein Intervall ((a, b), $[a, b)$, $(a, b]$, $[a, b]$, $(-\infty, b)$, $(-\infty, b]$, (a, ∞), $[a, \infty)$, $(-\infty, \infty)$) oder eine Vereinigung von Intervallen, und $B = \mathbb{R}$.
- Grafische Darstellung: Graph einer Funktion

1.3 Operationen für Funktionen

- $f\colon A \longrightarrow B$, $g\colon A \longrightarrow B$, $a \in \mathbb{R}$: $f+g$, $a\cdot f$, $f\cdot g$:

$$(f+g)(x) = f(x) + g(x),\ (a\cdot f)(x) = a\cdot f(x),\ (f\cdot g)(x) = f(x)\cdot g(x).$$

- Komposition, Hintereinanderausführung:
  $f\colon A \longrightarrow B$, $g\colon B \longrightarrow C$: $g\circ f\colon A \longrightarrow C$ mit $(g\circ f)(x) = g(f(x))$.

- $f\colon A \longrightarrow B$ heißt bijektiv, wenn jedes Element $y \in B$ Bild genau eines Elements $x \in A$ ist. Dann gibt es die Umkehrfunktion (inverse Funktion) $f^{-1}\colon B \longrightarrow A$ mit der Funktionsgleichung

$$x = f(y).$$

Es gilt:

$$(f^{-1}\circ f)(x) = x \quad \text{für alle } x \in A \quad \text{und} \quad (f\circ f^{-1})(x) = x \quad \text{für alle } x \in B$$

1.4 Beispiele einfacher Funktionen

- Potenzfunktionen mit ganzzahligen Exponenten:

Definition 1.1. *Sei $n \in \mathbb{N}$:*

  - $f(x) = \underbrace{x\cdot x\cdot \ldots \cdot x}_{n\ mal} = x^n$, $A = \mathbb{R}$
  - $f(x) = x^{-n} = \frac{1}{x^n}$, $A = \mathbb{R}\setminus\{0\}$.

Rechenregeln:

Satz 1.1. *Für $n \in \mathbb{Z}$, $n \neq 0$ gilt:*

$$\boxed{(x\cdot y)^n = x^n \cdot y^n} \tag{1.1}$$

Beweis. Für $n \in \mathbb{N}$ gilt:

$$\begin{aligned}(x\cdot y)^n &= \underbrace{(x\cdot y)\cdot(x\cdot y)\cdot\ldots\cdot(x\cdot y)}_{n \text{ mal}}\\ &= \underbrace{x\cdot x\cdot\ldots\cdot x}_{n \text{ mal}}\cdot\underbrace{y\cdot y\cdot\ldots\cdot y}_{n \text{ mal}} = x^n\cdot y^n.\end{aligned}$$

und

$$(x\cdot y)^{-n} = \frac{1}{(x\cdot y)^n} = \frac{1}{x^n\cdot y^n} = \frac{1}{x^n}\cdot\frac{1}{y^n} = x^{-n}\cdot y^{-n}.$$

□

Üblicherweise vereinbart man: $x^0 = 1$ für $x \neq 0$. Dann gilt (1.1) auch für $n = 0$, falls $x \neq 0$ und $y \neq 0$.

Analog lässt sich die folgende Rechenregel zeigen:

Satz 1.2.

$$\boxed{(x^m)^n = x^{m \cdot n}}$$

Warnung:

$$(x+y)^n \neq x^n + y^n \quad \text{im Allgemeinen,}$$

sondern

Satz 1.3 (Binomischer Lehrsatz)**.** *Für $n \in \mathbb{N}$ gilt*

$$\boxed{(x+y)^n = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} x^{n-i} y^i}$$

Dabei bezeichnet $\binom{n}{i}$ den Binomialkoeffizient:

$$\binom{n}{i} = \frac{\overbrace{n \cdot (n-1) \cdot \ldots \cdot (n-i+1)}^{i \text{ abnehmende Faktoren}}}{\underbrace{1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot i}_{i \text{ zunehmende Faktoren}}}$$

- Wurzelfunktion: Umkehrfunktionen von Potenzfunktionen:

  Definition 1.2.

  – *$f(x) = \sqrt{x}$ ist die Umkehrfunktion von $g\colon A \longrightarrow B$, $g(x) = x^2$, $A = B = [0, \infty)$.*

  – *Sei $n \in \mathbb{N}$. $f(x) = \sqrt[n]{x} = x^{\frac{1}{n}}$ ist die Umkehrfunktion von $g\colon A \longrightarrow B$, $g(x) = x^n$, $A = B = [0, \infty)$.*

  Man beachte:

  $$\sqrt[n]{x^n} = x \quad \text{und} \quad (\sqrt[n]{x})^n = x.$$

  Rechenregel:

  Satz 1.4.

  $$\boxed{(x \cdot y)^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{x \cdot y} = \sqrt[n]{x} \cdot \sqrt[n]{y} = x^{\frac{1}{n}} \cdot y^{\frac{1}{n}}}$$

  Beweis. Es gilt

  $$x = u^n \quad \text{mit } u = \sqrt[n]{x} \quad \text{und} \quad y = v^n \quad \text{mit } v = \sqrt[n]{y}$$

  Dann folgt

  $$\sqrt[n]{x \cdot y} = \sqrt[n]{u^n \cdot v^n} = \sqrt[n]{(u \cdot v)^n} = u \cdot v = \sqrt[n]{x} \cdot \sqrt[n]{y}.$$

  □

Analog lässt sich zeigen:

Satz 1.5.

$$\boxed{\left(x^{\frac{1}{m}}\right)^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{\sqrt[m]{x}} = \sqrt[m\cdot n]{x} = x^{\frac{1}{m\cdot n}} = x^{\frac{1}{m}\cdot\frac{1}{n}}}$$

- Potenzfunktionen mit rationalen und reellen Exponenten:

Definition 1.3. *Sei $q \in \mathbb{Q}$, also $q = \frac{m}{n}$ mit $m \in \mathbb{Z}$ und $n \in \mathbb{N}$.*

$$f(x) = x^q = \sqrt[n]{x^m} \quad \textit{für } x \in (0, \infty).$$

Aus den obigen Rechenregeln erhält man leicht:

Satz 1.6. *Für alle $p, q \in \mathbb{Q}$ gilt:*

$$\boxed{(x \cdot y)^q = x^q \cdot y^q \qquad \textit{und} \quad (x^p)^q = x^{p\cdot q}}$$

Beweis. Für $q = \frac{m}{n}$ mit $m \in \mathbb{Z}$ und $n \in \mathbb{N}$ gilt:

$$(x \cdot y)^q = \sqrt[n]{(x \cdot y)^m} = \sqrt[n]{x^m \cdot y^m} = \sqrt[n]{x^m} \cdot \sqrt[n]{y^m} = x^q \cdot y^q.$$

Analog zeigt man die zweite Formel. □

$r \in \mathbb{R}$ lässt sich beliebig genau durch rationale Zahlen annähern:

$$\lim_{q\to r,\ q\in\mathbb{Q}} q = r$$

Dann lässt sich für jeden Exponenten $r \in \mathbb{R}$ eine Potenzfunktion definieren:

Definition 1.4.

$$f(x) = \lim_{q\to r,\ q\in\mathbb{Q}} x^q = x^r$$

Es folgen leicht die Rechenregeln:

Satz 1.7. *Für alle $x, y \in (0, \infty)$ und alle $r, s \in \mathbb{R}$ gilt:*

$$\boxed{(x \cdot y)^r = x^r \cdot y^r} \quad \textit{und} \quad \boxed{(x^r)^s = x^{r\cdot s}}.$$

- Exponentialfunktion:

Definition 1.5. *$f(x) = a^x$ mit $a > 0$ (Basis) und $x \in \mathbb{R}$.*

Wichtige Spezialfälle:

$$a = 10, \quad a = e = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \approx 2,71828..., \quad a = 2.$$

Rechenregeln:

Satz 1.8.

$$\boxed{a^{x+y} = a^x \cdot a^y} \quad \textit{und} \quad \boxed{(a^x)^y = a^{x\cdot y}}$$

- Logarithmusfunktionen:

Definition 1.6. *$f(x) = \log_a x$ ($x > 0$) ist die Umkehrfunktion der Exponentialfunktion a^x.*

Spezialfälle: $\log_{10} x = \lg x$, $\log_2 x = \operatorname{ld} x$, $\log_e x = \ln x$.
Man beachte

$$a^{\log_a x} = x, \quad \log_a a^x = x.$$

Rechenregeln

Satz 1.9.

$$\boxed{\log_a(x\cdot y) = \log_a x + \log_a y} \quad \textit{und} \quad \boxed{\log_a(x^y) = y\cdot\log_a x}$$

Beweis. Es gilt

$$x = a^u \quad \text{mit } u = \log_a x \quad \text{und} \quad y = a^v \quad \text{mit } v = \log_a y.$$

Dann folgt

$$\log_a(x\cdot y) = \log_a(a^u \cdot a^v) = \log_a(a^{u+v}) = u + v = \log_a x + \log_a y.$$

Der Beweis der zweiten Rechenregel erfolgt analog. □

- Trigonometrische Funktionen (Winkelfunktionen):

Definition 1.7.

  - $\sin x, \cos x$: *geometrische Definition mit Hilfe des Einheitskreises*
  - $\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$, $\cot x = \frac{1}{\tan x} = \frac{\cos x}{\sin x}$.

Wichtige Eigenschaften:

  - Graphische Darstellung
  - $\cos x = \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$, $\sin x = \cos\left(x - \frac{\pi}{2}\right)$.

- Periodische Funktionen:
  $\sin(x+2\pi) = \sin x$, $\cos(x+2\pi) = \cos x$
  $\tan(x+\pi) = \tan x$, $\cot(x+\pi) = \cot x$.
- Nullstellen von sin: $k \cdot \pi$ für $k \in \mathbb{Z}$.
  Nullstellen von cos: $\frac{\pi}{2} + k \cdot \pi$ für $k \in \mathbb{Z}$.
  Nullstellen von tan: $k \cdot \pi$ für $k \in \mathbb{Z}$.
  Pole von tan: $\frac{\pi}{2} + k \cdot \pi$ für $k \in \mathbb{Z}$.
  Nullstellen von cot: $\frac{\pi}{2} + k \cdot \pi$ für $k \in \mathbb{Z}$.
  Pole von cot: $k \cdot \pi$ für $k \in \mathbb{Z}$.

  Spezielle Werte:

$$\sin\frac{\pi}{6} = \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{1}}{2}, \quad \sin\frac{\pi}{4} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}, \quad \sin\frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Rechenregeln:

Satz 1.10.

$$\boxed{\sin^2 x + \cos^2 x = 1}$$

und (Additionstheoreme):

$$\boxed{\begin{aligned} \sin(x+y) &= \sin x \cdot \cos y + \cos x \cdot \sin y \\ \cos(x+y) &= \cos x \cdot \cos y - \sin x \cdot \sin y \end{aligned}}$$

geometrische Beweise.

- Arkusfunktionen: Umkehrfunktionen der trigonometrischen Funktion:

  Hauptwerte:

  Definition 1.8.

  - $\arcsin\colon [-1,1] \longrightarrow \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ *ist die Umkehrfunktion von* $\sin\colon \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \longrightarrow [-1,1]$.
  - $\arccos\colon [-1,1] \longrightarrow [0,\pi]$ *ist die Umkehrfunktion von* $\cos\colon [0,\pi] \longrightarrow [-1,1]$.
  - $\arctan\colon (-\infty,\infty) \longrightarrow \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ *ist die Umkehrfunktion von* $\tan\colon \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \longrightarrow (-\infty,\infty)$.
  - $\operatorname{arccot}\colon (-\infty,\infty) \longrightarrow (0,\pi)$ *ist die Umkehrfunktion von* $\cot\colon (0,\pi) \longrightarrow (-\infty,\infty)$.

- Hyperbelfunktionen: sinh, cosh, tanh, coth.

Definition 1.9.

$$\sinh x = \frac{1}{2}\left(e^x - e^{-x}\right), \quad \cosh x = \frac{1}{2}\left(e^x + e^{-x}\right),$$

$$\tanh x = \frac{\sinh x}{\cosh x}, \quad \coth x = \frac{\cosh x}{\sinh x} = \frac{1}{\tanh x}$$

Rechenregel:

Satz 1.11.

$$\boxed{\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1}.$$

- Areafunktionen: Umkehrfunktionen von Hyperbelfunktionen

  Definition 1.10.

  – $\operatorname{arsinh}\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ *ist die Umkehrfunktion von* $\sinh\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$.

  – $\operatorname{arcosh}\colon [1,\infty) \longrightarrow [0,\infty)$ *ist die Umkehrfunktion von* $\cosh\colon [0,\infty) \longrightarrow [1,\infty)$.

  – $\operatorname{artanh}\colon (-1,1) \longrightarrow \mathbb{R}$ *ist die Umkehrfunktion von* $\tanh\colon \mathbb{R} \longrightarrow (-1,1)$.

  – $\operatorname{arcoth}\colon (-\infty,-1)\cup(1,\infty) \longrightarrow \mathbb{R}$ *ist die Umkehrfunktion von* $\coth\colon \mathbb{R} \longrightarrow (-\infty,-1)\cup(1,\infty)$.

  Rechenregeln

  Satz 1.12.

  $$\boxed{\operatorname{arsinh} x = \ln\left(x + \sqrt{x^2+1}\right)} \quad \textit{und} \quad \boxed{\operatorname{arcosh} x = \ln\left(x + \sqrt{x^2-1}\right)}$$

  und

  $$\boxed{\operatorname{artanh} x = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)} \quad \textit{und} \quad \boxed{\operatorname{arcoth} x = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{x+1}{x-1}\right)}$$

  Beweis. Funktionsgleichung von sinh:

  $$y = \frac{1}{2}\left(e^x - e^{-x}\right)$$

  Funktionsgleichung der Umkehrfunktion:

  $$x = \frac{1}{2}\left(e^y - e^{-y}\right)$$

Also gilt:

$$(e^y)^2 - 2x\,(e^y) - 1 = 0$$

Daher folgt für die positive Lösung:

$$e^y = x + \sqrt{x^2 + 1}$$

Also

$$y = \ln\left(x + \sqrt{x^2 + 1}\right)$$

Ähnlich beweist man die anderen Rechenregeln. $\square$

1.5 Beispiele zusammengesetzter Funktionen

- Polynomfunktionen:

$$f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n = \sum_{k=0}^{n} a_k\, x^k$$

  $a_n \neq 0$: n Grad

- $$f(x) = A\cos(\omega x - \varphi).$$

- $$f(x) = x^x = \left(e^{\ln x}\right)^x = e^{x\cdot\ln(x)}.$$

1.6 Stetige Funktionen

Definition 1.11. *Sei $x_0 \in A$ ein nicht-isolierter Punkt. Dann heißt $f\colon A \longrightarrow B$ stetig im Punkt x_0, wenn*

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0).$$

$f\colon A \longrightarrow B$ heißt stetig in A, wenn f in jedem Punkt von A stetig ist.

Satz 1.13. *f, g stetig: $f+g$, $c\cdot f$, $f\cdot g$, $\frac{f}{g}$ (in Punkten mit $g(x)\neq 0$), $g\circ f$ stetig.*

Satz 1.14. *Die Potenzfunktionen, Exponentialfunktionen, Winkelfunktionen, Arkusfunktionen, Hyperbelfunktionen, Areafunktionen sind auf dem jeweils geeigneten Definitionsbereich stetig.*

Kapitel 2

Differentialrechnung in $\mathbb{R}$

2.1 Ableitung

Definition 2.1. *Sei $f\colon A \longrightarrow \mathbb{R}$ eine reelle Funktion und $x_0 \in A$ ein nicht-isolierter Punkt. Dann heißt f im Punkt x_0 differenzierbar, falls der Grenzwert*

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = f'(x_0)$$

existiert. $f'(x_0)$ heißt Ableitung von f in x_0.

$f\colon A \longrightarrow \mathbb{R}$ heißt differenzierbar in A, wenn f in jedem Punkt von A differenzierbar ist. Die reelle Funktion $f'\colon A \longrightarrow \mathbb{R}$, $x \mapsto f'(x)$ heißt Ableitung von f.

- Schreibweisen: $f'(x_0) = \frac{df}{dx}(x_0) = \dot{f}(x_0)$.
- Der Ausdruck $\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ heißt Differenzenquotient.
- Alternative Schreibweise: Mit $x = x_0 + h$ erhält man

$$\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} \quad \text{und} \quad f'(x_0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}.$$

- Für

$$r(h) = f(x_0+h) - f(x_0) - f'(x_0)\cdot h$$

gilt offensichtlich:

$$f(x_0+h) = f(x_0) + f'(x_0)\cdot h + r(h)$$

bzw.

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)\cdot(x-x_0) + r(x-x_0)$$

mit

$$r(h) = h\cdot\rho(h) \quad \text{und} \quad \lim_{h\to 0}\rho(h) = \lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} - f'(x_0) = 0$$

Mit der Setzung $\rho(0) = 0$ gilt die obige Darstellung auch für $h = 0$.

Die Gleichung

$$y = f(x_0) + f'(x_0) \cdot (x - x_0)$$

ist die Funktionsgleichung einer linearen Funktion, deren Graph die Tangente von f im Punkt x_0 ist.

- Physikalische Interpretation: Geschwindigkeit.

2.2 Differentiationsregeln

Satz 2.1 (Summen-, Produkt- und Quotientenregel)**.** *Seien $f\colon A \longrightarrow \mathbb{R}$, $g\colon A \longrightarrow \mathbb{R}$ reelle Funktionen und $x_0 \in A$ ein nicht-isolierter Punkt. Angenommen, f und g sind in x_0 differenzierbar. Dann gilt: $f + g$ und $f \cdot g$ sind ebenfalls im Punkt x_0 differenzierbar und es gilt:*

$$(f + g)'(x_0) = f'(x_0) + g'(x_0)$$
$$(f \cdot g)'(x_0) = f'(x_0) \cdot g(x_0) + f(x_0) \cdot g'(x_0)$$

Falls zusätzlich $g(x_0) \neq 0$, dann gilt auch

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(x_0) = \frac{f'(x_0) \cdot g(x_0) - f(x_0) \cdot g'(x_0)}{g(x_0)^2}$$

Beweis. Produktregel:

$$\begin{aligned}
&\frac{(f \cdot g)(x_0 + h) - (f \cdot g)(x_0)}{h} \\
&\quad = \frac{f(x_0 + h) \cdot g(x_0 + h) - f(x_0) \cdot g(x_0)}{h} \\
&\quad = \frac{f(x_0 + h) \cdot g(x_0 + h) - f(x_0) \cdot g(x_0 + h) + f(x_0) \cdot g(x_0 + h) - f(x_0) \cdot g(x_0)}{h} \\
&\quad = \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} \cdot g(x_0 + h) + f(x_0) \cdot \frac{g(x_0 + h) - g(x_0)}{h}
\end{aligned}$$

Also

$$\begin{aligned}
(f \cdot g)'(x_0) &= \lim_{h \to 0} \frac{(f \cdot g)(x_0 + h) - (f \cdot g)(x_0)}{h} \\
&= \underbrace{\lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}}_{f'(x_0)} \cdot \underbrace{\lim_{h \to 0} g(x_0 + h)}_{g(x_0)} + f(x_0) \cdot \underbrace{\lim_{h \to 0} \frac{g(x_0 + h) - g(x_0)}{h}}_{g'(x_0)}
\end{aligned}$$

$\square$

Satz 2.2 (Kettenregel)**.** *Seien $f\colon A \longrightarrow \mathbb{R}$ und $g\colon B \longrightarrow \mathbb{R}$ reelle Funktionen mit $f(A) \subset B$. Sei $x_0 \in A$ und $f(x_0) \in B$ nicht-isolierte Punkte. Angenommen, f ist in x_0 und g ist in $f(x_0)$ differenzierbar. Dann gilt: $g \circ f$ ist im Punkt x_0 differenzierbar und es gilt:*

$$(g \circ f)'(x_0) = g'(f(x_0)) \cdot f'(x_0).$$

Beweis.

$$\begin{aligned}&\frac{(g\circ f)(x_0+h) - (g\circ f)(x_0)}{h}\\ &= \frac{g(f(x_0+h)) - g(f(x_0))}{h} = \frac{g(f(x_0)+k) - g(f(x_0))}{h}\end{aligned}$$

mit $k = f'(x_0) \cdot h + \rho_f(h) \cdot h$.

Es gilt

$$g(f(x_0)+k) = g(f(x_0)) + g'(f(x_0)) \cdot k + \rho_g(k) \cdot k.$$

Also

$$\begin{aligned}\frac{(g\circ f)(x_0+h) - (g\circ f)(x_0)}{h} &= \frac{g'(f(x_0)) \cdot k + \rho_g(k) \cdot k}{h}\\ = (g'(f(x_0)) + \rho_g(k)) \cdot \frac{k}{h} &= (g'(f(x_0)) + \rho_g(k)) \cdot (f'(x_0) + \rho_f(h))\end{aligned}$$

Daher folgt:

$$\begin{aligned}(g\circ f)'(x_0) &= \lim_{h\to 0} \frac{(g\circ f)(x_0+h) - (g\circ f)(x_0)}{h}\\ &= \lim_{h\to 0} (g'(f(x_0)) + \rho_g(k)) \cdot (f'(x_0) + \rho_f(h))\\ &= \lim_{h\to 0} (g'(f(x_0)) + \rho_g(k)) \cdot \lim_{h\to 0} (f'(x_0) + \rho_f(h)) = g'(f(x_0)) \cdot f'(x_0).\end{aligned}$$

□

Satz 2.3 (Ableitung der Umkehrfunktion)**.** *Sei $f\colon A \longrightarrow B$ eine bijektive reelle Funktion, $x_0 \in A$ ein nicht-isolierter Punkt. Angenommen, f ist in x_0 differenzierbar, $f'(x_0) \neq 0$ und f^{-1} ist im Punkt $y_0 = f(x_0)$ stetig. Dann folgt: f^{-1} ist im Punkt $y_0 = f(x_0)$ differenzierbar und es gilt:*

$$(f^{-1})'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)} = \frac{1}{f'(f^{-1}(y_0))} = \frac{1}{(f' \circ f^{-1})(y_0)}.$$

Beweis.

$$\frac{f^{-1}(y) - f^{-1}(y_0)}{y - y_0} = \frac{1}{\frac{y-y_0}{f^{-1}(y)-f^{-1}(y_0)}} = \frac{1}{\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}}$$

mit $y = f(x)$. Falls $y \to y_0$ folgt $x = f^{-1}(y) \to f^{-1}(y_0) = x_0$ wegen der Stetigkeit von f^{-1}. Daher gilt:

$$\lim_{y\to y_0} \frac{f^{-1}(y) - f^{-1}(y_0)}{y - y_0} = \frac{1}{\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}} = \frac{1}{f'(x_0)}$$

□

2.3 Höhere Ableitungen

- 2. Ableitung: Ableitung der Ableitung
- Schreibweise: $f''(x_0) = \frac{d^2 f}{dx^2}(x_0) = \ddot{f}(x_0)$,
- Interpretation: Krümmung, Beschleunigung
- 3. Ableitung: $f'''(x_0) = \frac{d^3 f}{dx^3}(x_0)$
- n-te Ableitung: $f^{(n)}(x_0) = \frac{d^n f}{dx^n}(x_0)$

2.4 Die Ableitung spezieller Funktionen

- Exponentialfunktionen: $f(x) = e^x$

$$\frac{e^{x+h} - e^x}{h} = e^x \cdot \frac{e^h - 1}{h}$$

Es gilt (Beweis später):

$$e^x \geq 1 + x \quad \text{für alle } x \in \mathbb{R}$$

Daraus folgt:

$$e^x \geq 1 + x \quad \text{und} \quad e^{-x} \geq 1 - x \quad \text{für alle } x > 0,$$

woraus man folgende Abschätzung erhält:

$$1 \leq \frac{e^x - 1}{x} \leq e^x \quad \text{für alle } x > 0.$$

Daraus folgt:

$$e^{-|h|} \leq \frac{e^h - 1}{h} \leq e^{|h|}$$

Somit gilt:

$$1 = \lim_{h \to 0} e^{-|h|} \leq \lim_{h \to 0} \frac{e^h - 1}{h} \leq \lim_{h \to 0} e^{|h|} = 1,$$

also

$$\frac{e^h - 1}{h} = 1,$$

Daher folgt:

$$\boxed{(e^x)'} = \lim_{h \to 0} e^x \cdot \frac{e^h - 1}{h} \boxed{= e^x}$$

Exponentialfunktionen: $f(x) = a^x = \left(e^{\ln a}\right)^x = e^{x \cdot \ln(a)}$.

Mit der Kettenregel folgt:

$$\boxed{(a^x)'} = e^{x \cdot \ln(a)} \cdot \ln(a) \boxed{= \ln a \cdot a^x}.$$

- Logarithmusfunktionen: $\log_a x = f^{-1}(x)$ mit $f(x) = a^x$.

  Daher folgt:
$$\boxed{(\log_a x)'} = \frac{1}{\ln a \cdot a^{\log_a x}} \boxed{= \frac{1}{\ln a \cdot x}}$$
  $a = e$:
$$(\ln x)' = \frac{1}{x}$$

- Potenzfunktionen: $x^r = e^{r \cdot \ln x}$
$$\boxed{(x^r)'} = e^{r \cdot \ln x} \cdot \frac{r}{x} \boxed{= r \cdot x^{r-1}}$$

- Winkelfunktionen
$$\begin{aligned}\frac{\sin(x_0+h)-\sin(x_0)}{h} &= \frac{\sin\left(x_0+\frac{h}{2}+\frac{h}{2}\right)-\sin\left(x_0+\frac{h}{2}-\frac{h}{2}\right)}{h}\\ &= \frac{2\cos\left(x_0+\frac{h}{2}\right)\cdot\sin\left(\frac{h}{2}\right)}{h}\\ &= \cos\left(x_0+\frac{h}{2}\right)\cdot\frac{\sin\left(\frac{h}{2}\right)}{\frac{h}{2}}\end{aligned}$$

  Es gilt (geometrischer Beweis) für $x \in [0, \frac{\pi}{2}]$:
$$\frac{1}{2}\sin x\cos x < \frac{x}{2} \le \frac{1}{2}\tan x$$
  Also
$$\cos x < \frac{\sin x}{x} < \frac{1}{\cos x}$$
  Daraus folgt:
$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{\sin|x|}{|x|} = 1.$$
  und daher
$$\boxed{(\sin x)' = \cos x}$$
  Weiters gilt:
$$\cos x = \sin\left(x+\frac{\pi}{2}\right)$$
  Daher
$$\boxed{(\cos x)'} = \left(\sin\left(x+\frac{\pi}{2}\right)\right)' = \cos\left(x+\frac{\pi}{2}\right)\boxed{= -\sin x}$$
  Wegen
$$\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$$

folgt aus der Quotientenregel:

$$\boxed{(\tan x)'} = \frac{\cos x \cdot \cos x - \sin x \cdot (-\sin x)}{\cos^2 x}$$

$$\boxed{= \frac{1}{\cos^2 x}} = \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} \boxed{= 1 + \tan^2 x}$$

Analog erhält man

$$\boxed{(\cot x)' = -\frac{1}{\sin^2 x} = -1 - \cot^2 x}$$

- Arkusfunktionen: $\arcsin x$ ist die Umkehrfunktion von $\sin x$. Also:

$$(\arcsin x)' = \frac{1}{\cos(\arcsin x)}$$

Nun gilt für $y = \arcsin x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$

$$\cos y = \sqrt{1 - \sin^2 y} = \sqrt{1 - x^2}$$

Also

$$\boxed{(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}}$$

Analog zeigt man:

$$\boxed{(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}}, \quad \boxed{(\arctan x)' = \frac{1}{1 + x^2}}, \quad \boxed{(\text{arccot}\, x)' = -\frac{1}{1 + x^2}},$$

- Hyperbelfunktionen: $\sinh x = \frac{1}{2}\left(e^x - e^{-x}\right)$

Also

$$\boxed{(\sinh x)'} = \frac{1}{2}\left(e^x + e^{-x}\right) = \boxed{\cosh x}$$

Analog zeigt man:

$$\boxed{(\cosh x)' = \sinh x}, \quad \boxed{(\tanh x)' = \frac{1}{\cosh^2 x} = 1 - \tanh^2 x}$$

und

$$\boxed{(\coth x)' = -\frac{1}{\sinh^2 x} = 1 - \coth^2 x}$$

- Areafunktionen: $\operatorname{arsinh}(x)$ ist die Umkehrfunktion von $\sinh(x)$. Also

$$(\operatorname{arsinh} x)' = \frac{1}{\cosh(\operatorname{arsinh} x)}$$

Nun gilt für $y = \operatorname{arsinh} x$

$$\cosh y = \sqrt{1 + \sinh^2 y} = \sqrt{1 + x^2}$$

Also

$$\boxed{(\operatorname{arsinh} x)' = \frac{1}{\sqrt{1 + x^2}}}$$

Analog zeigt man

$$\boxed{(\operatorname{arcosh} x)' = \frac{1}{\sqrt{x^2 - 1}} \quad \text{für } x > 1}$$

und

$$\boxed{(\operatorname{artanh} x)' = \frac{1}{1 - x^2} \quad \text{für } |x| < 1} \quad \text{und} \quad \boxed{(\operatorname{arcoth} x)' = \frac{1}{1 - x^2} \quad \text{für } |x| > 1}$$

2.5 Minima und Maxima

Sei $I \subset \mathbb{R}$ ein Intervall und $f\colon I \longrightarrow \mathbb{R}$.

Definition 2.2. *Ein Punkt $x_0 \in I$ heißt ein lokales Maximum von f, wenn*

$$f(x_0) \geq f(x) \quad \text{für alle } x \in I \text{ in einer Umgebung von } x_0.$$

Ein Punkt $x_0 \in I$ heißt ein lokales Minimum von f, wenn

$$f(x_0) \leq f(x) \quad \text{für alle } x \in I \text{ in einer Umgebung von } x_0.$$

Unter einem lokalen Extremum versteht man ein lokales Minimum oder ein lokales Maximum.

Satz 2.4. *Sei $I \subset \mathbb{R}$ ein Intervall und $f\colon I \longrightarrow \mathbb{R}$. Sei x_0 ein innerer Punkt von I und f ist in diesem Punkt differenzierbar. Dann gilt: Falls x_0 ein lokales Extremum ist, folgt*

$$f'(x_0) = 0.$$

Beweis. Beweis für den Fall, dass x_0 ein lokales Maximum ist. Für hinreichend kleine Werte $h > 0$ gilt:

$$f(x_0 - h) \leq f(x_0) \quad \text{und} \quad f(x_0) \geq f(x_0 + h).$$

Daher folgt:

$$f'(x_0) = \lim_{h \to 0+} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} \leq 0$$

und

$$f'(x_0) = \lim_{h \to 0+} \frac{f(x_0 - h) - f(x_0)}{-h} \geq 0$$

Also: $f'(x_0) = 0$. □

2.6 Taylor-Polynom, Taylor-Reihe

Sei $I \subset \mathbb{R}$ ein Intervall, $x_0 \in I$ sei ein innerer Punkt von I, und sei $f\colon I \longrightarrow \mathbb{R}$ eine reelle Funktion, die im Punkt x_0 differenzierbar ist. Dann gilt

$$f(x) = \underbrace{f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)}_{T_1(x)} + r(x - x_0)$$

Offensichtlich gilt:

$$T_1(x_0) = f(x_0) \quad \text{und} \quad T_1'(x_0) = f'(x_0).$$

Das Polynom $T_1(x)$ vom Grad 1 besitzt also an der Stelle x_0 den gleichen Funktionswert und die gleiche Ableitung wie $f(x)$.

Sei f 2-mal differenzierbar. Wir bestimmen nun jenes Polynom $T_2(x)$ vom Grad 2, also

$$T_2(x) = a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)^2,$$

das zusätzlich an der Stelle x_0 auch die gleiche zweite Ableitung wie $f(x)$ besitzt. Es gilt:

$$T_2(x_0) = a_0, \quad T_2'(x_0) = a_1, \quad T_2''(x_0) = 2a_2.$$

Also muss gelten:

$$a_0 = f(x_0), \quad a_1 = f'(x_0), \quad 2a_2 = f''(x_0)$$

und wir erhalten

$$T_2(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2}(x - x_0)^2.$$

Sei f 3-mal differenzierbar. Wir bestimmen nun jenes Polynom $T_3(x)$ vom Grad 3, also

$$T_3(x) = a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)^2 + a_3(x - x_0)^3,$$

das zusätzlich an der Stelle x_0 auch die gleiche dritte Ableitung wie $f(x)$ besitzt. Es gilt:

$$T_3(x_0) = a_0, \quad T_3'(x_0) = a_1, \quad T_3''(x_0) = 2a_2, \quad T_3'''(x_0) = 2 \cdot 3 \cdot a_3.$$

Die Bedingungen an a_0, a_1 und a_2 sind unverändert. Zusätzlich muss gelten:

$$2 \cdot 3 \cdot a_3 = f'''(x_0)$$

und wir erhalten

$$T_3(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2}(x - x_0)^2 + \frac{f'''(x_0)}{2 \cdot 3}(x - x_0)^3.$$

Setzt man diese Überlegungen fort, so erhält man für jenes Polynom $T_n(x)$ vom Grad n, das an der Stelle x_0 den gleichen Funktionswert und die gleichen Ableitungen bis zur Ordnung n wie $f(x)$ besitzt:

$$\begin{aligned} T_n(x) &= f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2 + \frac{f'''(x_0)}{3!}(x-x_0)^3 \\ &\quad + \frac{f^{(4)}(x_0)}{4!}(x-x_0)^4 + \cdots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n = \sum_{i=0}^{n} \frac{f^{(i)}(x_0)}{i!}(x-x_0)^i, \end{aligned}$$

wobei ! die Faktorielle bezeichnet, also

$$0! = 1 \quad \text{und} \quad k! = 1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot k \quad \text{für } k \geq 1.$$

$T_n(x)$ heißt das n-te Taylor-Polynom.

Satz 2.5 (Taylor-Formel)**.** *Seien $I \subset \mathbb{R}$ ein Intervall, $x_0 \in I$ ein innerer Punkt von I und $f\colon I \longrightarrow \mathbb{R}$ $(n+1)$-mal stetig differenzierbar in I. Dann gibt es zu jedem $x \in I$ eine Zahl $\theta \in (0,1)$, sodass:*

$$f(x) = \underbrace{\sum_{i=0}^{n} \frac{f^{(i)}(x_0)}{i!}(x-x_0)^i}_{T_n(x)} + \underbrace{\frac{f^{(n+1)}(x_0+\theta(x-x_0))}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}}_{R_n(x)}.$$

Beweis. $n = 0$:

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0 + \theta(x-x_0))(x-x_0)$$

Wir betrachten

$$F(t) = [f(x) - f(t)] - \frac{x-t}{x-x_0}\,[f(x) - f(x_0)]$$

Es gilt: $F(x_0) = F(x) = 0$. F ist eine stetige Funktion. Sie besitzt daher ein lokales Extremum an einer Stelle $\xi = x_0 + \theta(x-x_0)$ zwischen x_0 und x. F ist in ξ differenzierbar. Daher

$$F'(\xi) = 0.$$

Nun gilt:

$$F'(t) = -f'(t) + \frac{1}{x-x_0}\,[f(x) - f(x_0)]\,.$$

Also

$$-f'(\xi) + \frac{1}{x-x_0}\,[f(x) - f(x_0)] = 0$$

Daraus folgt:

$$f(x) - f(x_0) = f'(\xi)(x-x_0).$$

Im allgemeinen Fall geht man ähnlich vor: Wir betrachten

$$F(t) = \left[f(x) - \sum_{i=0}^{n} \frac{f^{(i)}(t)}{i!}(x-t)^i\right] - \frac{(x-t)^{n+1}}{(x-x_0)^{n+1}} \left[f(x) - \sum_{i=0}^{n} \frac{f^{(i)}(x_0)}{i!}(x-x_0)^i\right]$$

Es gilt: $F(x_0) = F(x) = 0$. F ist eine stetige Funktion. Sie besitzt daher ein lokales Extremum an einer Stelle $\xi = x_0 + \theta(x - x_0)$ zwischen x_0 und x. F ist in ξ differenzierbar. Daher

$$F'(\xi) = 0.$$

Nun gilt:

$$\begin{aligned}F'(t) = -f'(t) - \sum_{i=1}^{n} \left[\frac{f^{(i+1)}(t)}{i!}(x-t)^i - \frac{f^{(i)}(t)}{i!} i(x-t)^{i-1} \right] \\ + \frac{(n+1)(x-t)^n}{(x-x_0)^{n+1}} \left[f(x) - \sum_{i=0}^{n} \frac{f^{(i)}(x_0)}{i!}(x-x_0)^i \right]\end{aligned}$$

Es gilt

$$\begin{aligned}& - f'(t) - \sum_{i=1}^{n} \left[\frac{f^{(i+1)}(t)}{i!}(x-t)^i - \frac{f^{(i)}(t)}{(i-1)!}(x-t)^{i-1} \right] \\ &= -f'(t) - \left[\frac{f''}{1!}(x-t) - f'(t) \right] - \left[\frac{f'''(t)}{2!}(x-t)^2 - \frac{f''(t)}{1!}(x-t) \right] \\ &\quad - \ldots - \left[\frac{f^{(n+1)}(t)}{n!}(x-t)^n - \frac{f^{(n)}(t)}{(n-1)!}(x-t)^{n-1} \right] \\ &= -\frac{f^{(n+1)}(t)}{n!}(x-t)^n.\end{aligned}$$

Also

$$F'(t) = -\frac{f^{(n+1)}(t)}{n!}(x-t)^n + \frac{(n+1)(x-t)^n}{(x-x_0)^{n+1}} \left[f(x) - \sum_{i=0}^{n} \frac{f^{(i)}(x_0)}{i!}(x-x_0)^i \right]$$

Aus $F'(\xi) = 0$ folgt

$$\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{n!}(x-\xi)^n = \frac{(n+1)(x-\xi)^n}{(x-x_0)^{n+1}} \left[f(x) - \sum_{i=0}^{n} \frac{f^{(i)}(x_0)}{i!}(x-x_0)^i \right]$$

und daraus sofort die Behauptung. $\square$

Der Ausdruck

$$\frac{f^{(n+1)}(x_0 + \theta(x-x_0))}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}$$

heißt die Lagrangesche Form des Restgliedes.

Monotonie von Funktionen

Definition 2.3. *Seien $A, B \subset \mathbb{R}$ und $f\colon A \to B$.*
f heißt monoton wachsend $\iff$ Für alle $x, y \in A$ mit $x < y$ gilt: $f(x) \leq f(y)$.
f heißt monoton fallend $\iff$ Für alle $x, y \in A$ mit $x < y$ gilt: $f(x) \geq f(y)$.
f heißt streng monoton wachsend $\iff$ Für alle $x, y \in A$ mit $x < y$ gilt: $f(x) < f(y)$.
f heißt streng monoton fallend $\iff$ Für alle $x, y \in A$ mit $x < y$ gilt: $f(x) > f(y)$.

Satz 2.6. *Sei $f\colon (a, b) \to \mathbb{R}$ stetig differenzierbar. Dann gilt*

- *f ist genau dann monoton wachsend (fallend), wenn $f'(x) \geq 0$ ($f'(x) \leq 0$) für alle $x \in (a, b)$.*
- *Falls $f'(x) > 0$ ($f'(x) < 0$) für alle $x \in (a, b)$, dann ist f streng monoton wachsend (fallend).*

Beweis. Angenommen f ist monoton wachsend. Dann gilt für $h > 0$:

$$f(x + h) \geq f(x).$$

Also

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x + h) - f(x)}{h} \geq 0.$$

Angenommen, $f'(x) \geq 0$. Für $x \leq y$ folgt dann:

$$f(y) = f(x) + \underbrace{f'(x + \theta(y - x))}_{\geq 0} \underbrace{(y - x)}_{\geq 0} \geq 0.$$

Also ist f monoton wachsend. Falls $f'(x) > 0$, folgt mit dem selben Argument, dass f streng monoton wachsend ist. □

Lokale Extrema

Satz 2.7. *Sei $I \subset \mathbb{R}$ ein Intervall, $f\colon I \longrightarrow \mathbb{R}$ sei 2 mal stetig differenzierbar. Sei x_0 ein innerer Punkt von I mit*

$$f'(x_0) = 0 \quad \text{und} \quad f''(x_0) > 0 (< 0).$$

Dann ist x_0 ein lokales Minimum (Maximum).

Beweis. Da f'' stetig ist und $f''(x_0) > 0$, gibt es ein Intervall um x_0, in dem f'' positiv ist. Sei x ein Punkt aus dieser Umgebung von x_0. Dann gilt:

$$f(x) = f(x_0) + \underbrace{f'(x_0)}_{= 0}(x - x_0) + \underbrace{\frac{f''(x_0 + \theta(x - x_0))}{2!}(x - x_0)^2}_{\geq 0} \geq f(x_0).$$

□

Approximation einer Funktion durch Taylor-Polynome

Beispiele:

- Das Taylor-Polynom $T_2(x)$ von $f(x) = \sin x$ an der Stelle $x_0 = 0$:

$$T_2(x) = \sin 0 + \cos 0 \cdot x + \frac{-\sin 0}{2!} \cdot x^2 = x$$

  Also

$$\sin x = x + R_2(x)$$

  mit dem Restglied

$$R_2(x) = -\frac{\cos(\theta x)}{3!} \cdot x^3.$$

  Abschätzung des Restgliedes:

$$|R_2(x)| \leq \frac{1}{6} \cdot |x|^3.$$

- Das Taylor-Polynom $T_3(x)$ von $f(x) = \cos x$ an der Stelle $x_0 = 0$:

$$T_3(x) = \cos 0 - \sin 0 \cdot x + \frac{-\cos 0}{2!} \cdot x^2 + \frac{\sin 0}{3!} \cdot x^3 = 1 - \frac{x^2}{2}$$

  Also

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + R_3(x)$$

  mit dem Restglied

$$R_3(x) = \frac{\cos(\theta x)}{4!} \cdot x^4.$$

  Abschätzung des Restgliedes:

$$|R_3(x)| \leq \frac{1}{24} \cdot x^4.$$

- Das Taylor-Polynom $T_1(x)$ von $f(x) = \sqrt{x}$ an der Stelle $x_0 = 1$:

$$f'(x) = \frac{1}{2} x^{-\frac{1}{2}}, \quad f''(x) = \left(-\frac{1}{2}\right) \frac{1}{2} x^{-\frac{3}{2}} = -\frac{1}{4} \frac{1}{x\sqrt{x}}$$

  Also

$$\sqrt{x} = \underbrace{1 + \frac{1}{2}(x-1)}_{T_1(x)} \underbrace{- \frac{1}{8} \frac{1}{\xi\sqrt{\xi}} (x-1)^2}_{R_1(x)} \quad \text{mit } \xi = 1 + \theta(x-1).$$

  Abschätzung des Restgliedes:

$$|R_1(x)| \leq \begin{cases} \frac{1}{8}(x-1)^2 & \text{für } x > 1 \\ \frac{1}{8x\sqrt{x}}(x-1)^2 & \text{für } x < 1 \end{cases}$$

Taylor-Reihen

Die Folge der Taylor-Polynome nennt man Taylor-Reihe. Schreibweise:

$$\left(\sum_{i=0}^{n} \frac{f^{(i)}(x_0)}{i!}(x-x_0)^i\right)_{n\in\mathbb{N}_0} = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{f^{(i)}(x_0)}{i!}(x-x_0)^i$$

Falls $\lim_{n\to\infty} R_n(x) = 0$, dann folgt

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} T_n(x) = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=0}^{n} \frac{f^{(i)}(x_0)}{i!}(x-x_0)^i.$$

Schreibweise für den Grenzwert:

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{i=0}^{n} \frac{f^{(i)}(x_0)}{i!}(x-x_0)^i = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{f^{(i)}(x_0)}{i!}(x-x_0)^i.$$

In diesem Sinne:

$$f(x) = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{f^{(i)}(x_0)}{i!}(x-x_0)^i$$

Beispiele von Taylor-Reihen:

- $f(x) = e^x$, $x_0 = 0$: $f^{(i)}(x) = e^x$.

  Taylor-Reihe:

  $$\sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{i!}x^i = 1 + x + \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{3!}x^3 + \dots$$

  Restglied:

  $$R_n(x) = \frac{e^{\theta\cdot x}}{(n+1)!}x^{n+1} \to 0 \quad \text{für } n\to\infty.$$

  folgt leicht aus der Ungleichung:

  $$n! \geq n^{\frac{n}{2}}.$$

  Also:

  $$e^x = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{i!}x^i = 1 + x + \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{3!}x^3 + \dots$$

- $f(x) = \sin(x)$, $x_0 = 0$.

  $$\sin^{(i)}(x) = \begin{cases} \sin x & \text{für } i = 4j \\ \cos x & \text{für } i = 4j+1 \\ -\sin x & \text{für } i = 4j+2 \\ -\cos x & \text{für } i = 4j+3 \end{cases}$$

Taylor-Reihe:

$$x - \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{5!}x^5 - \frac{1}{7!}x^7 + \cdots = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{(-1)^i}{(2i+1)!} x^{2i+1}$$

Restglied:

$$R_n(x) = \frac{\sin^{(n)}(\theta \cdot x)}{(n+1)!} x^{n+1} \to 0 \quad \text{für } n \to \infty.$$

Also

$$\sin x = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{(-1)^i}{(2i+1)!} x^{2i+1} = x - \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{5!}x^5 - \frac{1}{7!}x^7 + \cdots$$

Analog zeigt man:

$$\cos x = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{(-1)^i}{(2i)!} x^{2i} = 1 - \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{4!}x^4 - \frac{1}{6!}x^6 + \cdots$$

- $f(x) = \frac{1}{1-x}$, $x_0 = 0$. Für $i \geq 1$ gilt:

$$f^{(i)}(x) = i!(1-x)^{-(i+1)}.$$

Taylor-Reihe:

$$\sum_{i=0}^{\infty} \frac{f^{(i)}(0)}{i!} x^i = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{i!}{i!} x^i = \sum_{i=0}^{\infty} x^i = 1 + x + x^2 + x^3 + \ldots$$

Es gilt (endliche geometrische Reihe) für $x \neq 1$:

$$\sum_{i=0}^{n} x^i = \frac{1 - x^{n+1}}{1 - x}$$

und daher

$$R_n(x) = \frac{1}{1-x} - \sum_{i=0}^{n} x^i = \frac{1}{1-x} - \frac{1 - x^{n+1}}{1-x} = \frac{x^{n+1}}{1-x} \to 0 \quad \text{falls } |x| < 1.$$

Also gilt für $|x| < 1$ (geometrische Reihe):

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{i=0}^{\infty} x^i = 1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + \ldots$$

- $f(x) = \ln(1+x)$, $x_0 = 0$. Für $i \geq 1$ gilt:

$$f^{(i)}(x) = (-1)^{i-1}\,(i-1)!(1+x)^{-i}.$$

Taylor-Reihe:

$$\begin{aligned}\sum_{i=0}^{\infty} \frac{f^{(i)}(0)}{i!} x^i = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{(-1)^{i-1}\,(i-1)!}{i!} x^i &= \sum_{i=1}^{\infty} \frac{(-1)^{i-1}}{i} x^i \\ &= x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{4}x^4 + \dots\end{aligned}$$

Es lässt sich für $x \in (-1, 1]$ zeigen:

$$\ln(1+x) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{(-1)^{i-1}}{i} x^i = x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{4}x^4 + \dots$$

Kapitel 3

Integralrechnung in $\mathbb{R}$

3.1 Stammfunktion

Definition 3.1. *Sei $I \subset \mathbb{R}$ ein Intervall und seien $f\colon I \to \mathbb{R}$ und $F\colon I \to \mathbb{R}$ reelle Funktionen. F heißt Stammfunktion (unbestimmtes Integral) von $f \iff F$ ist differenzierbar und $F' = f$.*

- Falls F eine Stammfunktion von f ist, dann ist $F + C$ mit einer Konstanten $C \in \mathbb{R}$ ebenfalls eine Stammfunktion. C nennt man Integrationskonstante.
- Schreibweise: $\int f(x)\ dx = F(x) + C$.
- Mit dieser Schreibweise gilt:

  $$\left(\int f(x)\ dx\right)' = f(x).$$

  Falls f differenzierbar ist, gilt offensichtlich, dass f Stammfunktion von f' ist:

  $$\int f'(x)\ dx = f(x) + C.$$

3.2 Stammfunktionen spezieller Funktionen

- Potenzfunktionen: es gilt $(x^r)' = r \cdot x^{r-1}$, also $\left(\frac{x^r}{r}\right)' = x^{r-1}$ für $r \neq 0$. Mit der Setzung $\alpha = r - 1$ erhalten wir also für $\alpha \neq -1$:

  $$\boxed{\int x^\alpha\ dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C}$$

  Spezialfall $\alpha = 0$: $\int 1\ dx = x + C$.

Spezialfall $\alpha = -1$: es gilt $(\ln|x|)' = \frac{1}{x}$. Also:

$$\boxed{\int \frac{1}{x}\ dx = \ln|x| + C}$$

- Exponentialfunktionen: es gilt $(a^x)' = \ln a \cdot a^x$, also $\left(\frac{a^x}{\ln a}\right)' = a^x$. Für $a \neq 1$ erhalten wir also:

  $$\boxed{\int a^x\ dx = \frac{a^x}{\ln a} + C}$$

  Spezialfall: $a = e$: $\int e^x\ dx = e^x + C$.

- Logarithmusfunktionen: es gilt $(x \cdot \ln|x| - x)' = \ln|x|$. Also

  $$\boxed{\int \ln|x|\ dx = x \cdot \ln|x| - x + C}$$

  Wegen $e^{\ln|x|} = |x| = a^{\log_a|x|} = \left(e^{\ln a}\right)^{\log_a|x|} = e^{\ln a \cdot \log_a|x|}$ folgt: $\log_a x = \frac{\ln x}{\ln a}$ und daher:

  $$\boxed{\int \log_a|x|\ dx = \frac{1}{\ln a}(x \cdot \ln|x| - x) + C}$$

- Winkelfunktionen: Es gilt $(\sin x)' = \cos x$ und $(\cos x)' = -\sin x$, also $(-\cos x)' = \sin x$. Daher:

  $$\boxed{\int \sin x\ dx = -\cos x + C} \quad \text{und} \quad \boxed{\int \cos x\ dx = \sin x + C}$$

  Es gilt: $(\ln|\cos x|)' = \frac{1}{\cos x} \cdot (-\sin x) = -\tan x$. Also

  $$\boxed{\int \tan x\ dx = -\ln|\cos x| + C}$$

  Analog folgt:

  $$\boxed{\int \cot x\ dx = \ln|\sin x| + C}$$

  Es gilt: $(\tan x)' = \frac{1}{\cos^2 x}$ und $(\cot x)' = -\frac{1}{\sin^2 x}$. Also

  $$\boxed{\int \frac{1}{\cos^2 x}\ dx = \tan x + C} \quad \text{und} \quad \boxed{\int \frac{1}{\sin^2 x}\ dx = -\cot x + C}$$

- Hyperbelfunktionen: Analog zu den Winkelfunktionen erhält man:

$$\boxed{\int \sinh x \; dx = \cosh x + C} \quad \text{und} \quad \boxed{\int \cosh x \; dx = \sinh x + C}$$

und

$$\boxed{\int \tanh x \; dx = \ln|\cosh x| + C} \quad \text{und} \quad \boxed{\int \coth x \; dx = \ln|\sinh x| + C}$$

und

$$\boxed{\int \frac{1}{\cosh^2 x} \; dx = \tanh x + C} \quad \text{und} \quad \boxed{\int \frac{1}{\sinh^2 x} \; dx = -\coth x + C}$$

- Aus den Differentiationsregeln für die Arkusfunktionen folgt sofort:

$$\boxed{\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \; dx = \arcsin x + C_1 = -\arccos x + C_2 \quad \text{für } |x| < 1}$$

mit $C_2 = C_1 + \frac{\pi}{2}$ und

$$\boxed{\int \frac{1}{1+x^2} \; dx = \arctan x + C_1 = -\operatorname{arccot} x + C_2}$$

mit $C_2 = C_1 + \frac{\pi}{2}$.

- Aus den Differentiationsregeln für die Areafunktionen folgt sofort:

$$\boxed{\int \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} \; dx = \operatorname{arsinh} x + C = \ln\left(x + \sqrt{x^2+1}\right) + C}$$

und

$$\boxed{\int \frac{1}{\sqrt{x^2-1}} \; dx = \operatorname{arcosh} x + C = \ln\left(x + \sqrt{x^2-1}\right) + C \quad \text{für } x > 1}$$

und

$$\boxed{\int \frac{1}{1-x^2} \; dx = \operatorname{artanh} x + C = \frac{1}{2} \ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right) + C \quad \text{für } |x| < 1}$$

und

$$\boxed{\int \frac{1}{x^2-1} \; dx = -\operatorname{arcoth} x + C = -\frac{1}{2} \ln\left(\frac{x+1}{x-1}\right) + C \quad \text{für } |x| > 1}$$

3.3 Integrationsregeln

Satz 3.1. *Sei $I \subset \mathbb{R}$ ein Intervall.*

1. *Seien $f\colon I \to \mathbb{R}$ und $g\colon I \to \mathbb{R}$ reelle Funktionen mit Stammfunktionen F und G. Dann ist $F + G$ eine Stammfunktion von $f + g$:*

$$\int \big[f(x) + g(x)\big]\ dx = \int f(x)\ dx + \int g(x)\ dx.$$

2. *Sei $c \in \mathbb{R}$. Dann ist $c \cdot F$ eine Stammfunktion von $c \cdot f$:*

$$\int \big[c \cdot f(x)\big]\ dx = c \cdot \int f(x)\ dx.$$

Beweis.

$$(F + G)'(x) = F'(x) + G'(x) = f(x) + g(x).$$
$$(c \cdot F)'(x) = c \cdot F'(x) = c \cdot f(x).$$

□

Satz 3.2 (Partielle Integration)**.** *Seien $f\colon I \to \mathbb{R}$ und $g\colon I \to \mathbb{R}$ differenzierbare reelle Funktionen und $\varphi = f \cdot g'$ besitze eine Stammfunktion Φ. Dann ist $f \cdot g - \Phi$ eine Stammfunktion von $f' \cdot g$:*

$$\int f'(x) \cdot g(x)\ dx = f(x) \cdot g(x) - \int f(x) \cdot g'(x)\ dx.$$

Beweis.

$$\begin{aligned}(f \cdot g - \Phi)'(x) &= f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x) - \Phi'(x) \\ &= f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x) - f(x) \cdot g'(x) = f'(x) \cdot g(x)\end{aligned}$$

□

Satz 3.3 (Substitutionsregel)**.** *Seien $I, J \subset \mathbb{R}$ Intervalle. Seien $f\colon J \to \mathbb{R}$ eine reelle Funktion mit Stammfunktion F, $g\colon I \to \mathbb{R}$ eine differenzierbare Funktion mit $g(I) \subset J$. Dann ist $F \circ g$ eine Stammfunktion von $(f \circ g) \cdot g'$.*

$$\int f(x)\ dx = \int f(g(t)) \cdot g'(t)\ dt \quad \text{mit} \quad x = g(t)$$

Beweis. Mit der Kettenregel gilt:

$$(F \circ g)'(t) = F'(g(t)) \cdot g'(t) = f(g(t)) \cdot g'(t).$$

□

Zwei weitere einfache Integrationsregeln (Spezialfälle der Substitutionsregel):

- Seien $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a \neq 0$. Sei $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine reelle Funktion mit Stammfunktion $F\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Dann ist $G\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $G(x) = \frac{1}{a} \cdot F(a \cdot x + b)$ eine Stammfunktion der Funktion $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $g(x) = f(a \cdot x + b)$.

  Beispiel:
$$\int \frac{1}{2x+1}\ dx = \frac{1}{2}\ \ln|2x+1| + C$$

- Es gilt
$$\int \frac{g'(t)}{g(t)}\ dt = \int f(g(t))g'(t)\ dt \quad \text{mit } f(x) = \frac{1}{x}.$$
  Aus der Substitutionsregel folgt:
$$\int f(g(t))g'(t)\ dt = \int f(x)\ dx = \ln|x| + C \quad \text{mit } x = g(t).$$
  Also
$$\int \frac{g'(t)}{g(t)}\ dt = \ln|g(t)| + C.$$
  Beispiel: $f(x) = \cos x$:
$$\int \frac{\sin x}{\cos x}\ dx = -\int \frac{f'(x)}{f(x)}\ dx = -\ln|f(x)| + C = -\ln|\cos x| + C$$

3.4 Beispiele

- Partielle Integration:
$$\int x \cdot e^x\ dx = \int (e^x)' \cdot x\ dx = x \cdot e^x - \int e^x\ dx = x \cdot e^x - e^x + C$$

- Partielle Integration:
$$\begin{aligned}\int \sin^2 x\ dx = \int (-\cos x)' \cdot \sin x\ dx &= -\cos x \cdot \sin x - \int (-\cos x)\cos x\ dx \\ &= -\cos x \cdot \sin x + \int \cos^2 x\ dx \\ &= -\cos x \cdot \sin x + \int (1 - \sin^2 x)\ dx \\ &= -\cos x \cdot \sin x + x - \int \sin^2 x\ dx\end{aligned}$$
  Also
$$2\int \sin^2 x\ dx = x - \sin x \cdot \cos x$$

und somit
$$\int \sin^2 x \; dx = \frac{1}{2}(x - \sin x \cdot \cos x) + C$$

- Partielle Integration: Für $j \geq 1$ gilt:

$$\begin{aligned}\int \frac{1}{(t^2+1)^j} \; dt &= \frac{t}{(t^2+1)^j} - (-j) \int \frac{2t^2}{(t^2+1)^{j+1}} \; dt \\ &= \frac{t}{(t^2+1)^j} + 2j \int \frac{t^2}{(t^2+1)^{j+1}} \; dt \\ &= \frac{t}{(t^2+1)^j} + 2j \int \frac{t^2+1-1}{(t^2+1)^{j+1}} \; dt \\ &= \frac{t}{(t^2+1)^j} + 2j \int \frac{1}{(t^2+1)^j} \; dt - 2j \int \frac{1}{(t^2+1)^{j+1}} \; dt\end{aligned}$$

Also
$$2j \int \frac{1}{(t^2+1)^{j+1}} \; dt = \frac{t}{(t^2+1)^j} + (2j-1) \int \frac{1}{(t^2+1)^j} \; dt$$

Somit
$$\int \frac{1}{(t^2+1)^{j+1}} \; dt = \frac{t}{2j(t^2+1)^j} + \frac{2j-1}{2j} \int \frac{1}{(t^2+1)^j} \; dt$$

$j \to j-1$: Für $j \geq 2$ gilt:

$$\int \frac{1}{(t^2+1)^j} \; dt = \frac{t}{2(j-1)(t^2+1)^{j-1}} + \frac{2j-3}{2(j-1)} \int \frac{1}{(t^2+1)^{j-1}} \; dt$$

Spezialfall $j = 1$:
$$\int \frac{1}{t^2+1} \; dt = \arctan t + C$$

Spezialfall $j = 2$;

$$\int \frac{1}{(t^2+1)^2} \; dt = \frac{t}{2(t^2+1)} + \frac{1}{2} \int \frac{1}{t^2+1} \; dt = \frac{t}{2(t^2+1)} + \frac{1}{2} \arctan t + C$$

- Substitutionsregel:
$$\int \sqrt{1-x^2} \; dx \quad \text{für } |x| \leq 1$$

Mit $x = \sin t = g(t)$ für $t \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ folgt:

$$\begin{aligned}\int \sqrt{1-x^2} \; dx = \int \sqrt{1-\sin^2 t} \cos t \; dt = \int \cos^2 t \; dt = \frac{1}{2}(t + \sin t \cdot \cos t) + C \\ = \frac{1}{2}\left(\arcsin x + x \cdot \sqrt{1-x^2}\right) + C\end{aligned}$$

- Substitutionsregel:
$$\int \sqrt{1+x^2}\ dx$$
Mit $x = \sinh t = g(t)$ für $t \in \mathbb{R}$ folgt:
$$\begin{aligned}\int \sqrt{1+x^2}\ dx &= \int \sqrt{1+\sinh^2 t}\cosh t\ dt = \int \cosh^2 t\ dt = \frac{1}{2}(t+\sinh t\cdot\cosh t)+C\\ &= \frac{1}{2}\left(\operatorname{arsinh} x + x\cdot\sqrt{1+x^2}\right)+C\end{aligned}$$

- Stammfunktionen von rationalen Funktionen:
$$f(x) = \frac{p(x)}{q(x)} \quad \text{mit Polynomen } p(x),\ q(x).$$
Polynomdivision:
$$p(x) = s(x)\cdot q(x) + r(x) \quad \text{mit Polynomen } r(x),\ s(x),\ \deg r(x) < \deg q(x)$$
Faktorisierung von $q(x)$:
$$\begin{aligned}q(x) = c\,&(x-x_1)^{r_1}\cdot(x-x_2)^{r_2}\cdot\ldots\cdot(x-x_m)^{r_m}\\ &\cdot(x^2+p_1x+q_1)^{s_1}\cdot(x^2+p_2x+q_2)^{s_2}\cdot\ldots\cdot(x^2+p_nx+q_n)^{s_n}\end{aligned}$$
mit $r_i, s_i \in \mathbb{N}$ und $x_i, p_i, q_i \in \mathbb{R}$, $p_i^2 < 4q_i$.
Partialbruchzerlegung:
$$f(x) = s(x) + \frac{r(x)}{q(x)} = s(x) + \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{r_i}\frac{a_{ij}}{(x-x_i)^j} + \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{s_i}\frac{b_{ij}x+c_{ij}}{(x^2+p_ix+q_i)^j}$$
Die Zahlen a_{ij}, b_{ij} und c_{ij} lassen sich durch Koeffizientenvergleich bestimmen.
$$\begin{aligned}\int f(x)\ dx = \int s(x)\ dx &+ \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{r_i} a_{ij}\int\frac{1}{(x-x_i)^j}\ dx\\ &+\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{s_i}\left[b_{ij}\int\frac{x}{(x^2+p_ix+q_i)^j}\ dx + c_{ij}\int\frac{1}{(x^2+p_ix+q_i)^j}\ dx\right]\end{aligned}$$

- $$\int\frac{1}{(x-x_i)^j}\ dx = \int (x-x_i)^{-j}\ dx = \begin{cases}\ln|x-x_i| & \text{für } j=1\\ -\frac{1}{j-1}\frac{1}{(x-x_i)^{j-1}} & \text{für } j>1\end{cases}$$

- $$\frac{x}{(x^2+p_ix+q_i)^j} = \frac{1}{2}\cdot\frac{2x+p_i}{(x^2+p_ix+q_i)^j} - \frac{p_i}{2}\cdot\frac{1}{(x^2+p_ix+q_i)^j}$$

- $$\int \frac{2x+p_i}{(x^2+p_ix+q_i)^j}\,dx = \int \frac{g'(x)}{g(x)^j}\,dx = \begin{cases} \ln|g(x)| & \text{für } j=1 \\ -\frac{1}{j-1}\frac{1}{g(x)^{j-1}} & \text{für } j>1 \end{cases}$$

  mit $g(x) = x^2 + p_ix + q_i$. Also

  $$\int \frac{2x+p_i}{(x^2+p_ix+q_i)^j}\,dx = \begin{cases} \ln|x^2+p_ix+q_i| & \text{für } j=1 \\ -\frac{1}{j-1}\frac{1}{(x^2+p_ix+q_i)^{j-1}} & \text{für } j>1 \end{cases}$$

- $$x^2+p_ix+q_i = \left(x+\frac{p_i}{2}\right)^2 + d_i^2 \quad \text{mit } d_i = \sqrt{q_i - \frac{p_i^2}{4}}$$

  Also

  $$\frac{1}{x^2+p_ix+q_i} = \frac{1}{\left(x+\frac{p_i}{2}\right)^2+d_i^2} = \frac{1}{d_i^2}\cdot\frac{1}{\left(\frac{1}{d_i}x+\frac{p_i}{2d_i}\right)^2+1}$$

  Daher

  $$\int \frac{1}{(x^2+p_ix+q_i)^j}\,dx = \frac{1}{d_i^{2j}}\cdot\int \frac{1}{\left[\left(\frac{1}{d_i}x+\frac{p_i}{2d_i}\right)^2+1\right]^j}\,dx$$

  Mit

  $$t = \frac{1}{d_i}x + \frac{p_i}{2d_i} \quad \text{also } x = d_i\cdot t - \frac{p_i}{2} = g(t)$$

  folgt mit der Substitutionsregel

  $$\int \frac{1}{(x^2+p_ix+q_i)^j}\,dx = \frac{1}{d_i^{2j}}\cdot\int \frac{1}{\left[\left(\frac{1}{d_i}x+\frac{p_i}{2d_i}\right)^2+1\right]^j}\,dx = \frac{1}{d_i^{2j}}\cdot\int\frac{d_i}{(t^2+1)^j}\,dt$$

1. Beispiel:

   $$f(x) = \frac{x^3+2}{x^2-1}$$

   Polynomdivision

   $$x^3+2 = x\cdot(x^2-1)+x+2 \quad \text{also } f(x) = x + \frac{x+2}{x^2-1}$$

   Faktorisierung

   $$x^2-1 = (x+1)\cdot(x-1)$$

   Partialbruchzerlegung:

   $$\frac{x+2}{x^2-1} = \frac{a_1}{x+1} + \frac{a_2}{x-1}$$

Multiplikation mit $x^2 - 1$:

$$x + 2 = a_1 \cdot (x - 1) + a_2 \cdot (x + 1) = (a_1 + a_2) \cdot x - a_1 + a_2$$

Koeffizientenvergleich

$$a_1 + a_2 = 1 \quad \text{und} \quad -a_1 + a_2 = 2 \quad \Longrightarrow a_1 = -\frac{1}{2},\ a_2 = \frac{3}{2}$$

Daher

$$f(x) = x - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{x+1} + \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{x-1}$$

Stammfunktion

$$\begin{aligned} \int \frac{x^3+1}{x^2-1}\, dx &= \int x\, dx - \frac{1}{2} \cdot \int \frac{1}{x+1}\, dx + \frac{3}{2} \cdot \int \frac{1}{x-1}\, dx \\ &= \frac{x^2}{2} - \frac{1}{2} \ln|x+1| + \frac{3}{2} \ln|x-1| \end{aligned}$$

2. Beispiel:

$$f(x) = \frac{1}{x^2(x^2+1)}$$

Partialbruchzerlegung:

$$\frac{1}{x^2(x^2+1)} = \frac{a_1}{x} + \frac{a_2}{x^2} + \frac{bx+c}{x^2+1}$$

Multiplikation mit $x^2(x^2+1)$:

$$\begin{aligned} 1 &= a_1 \cdot x(x^2+1) + a_2 \cdot (x^2+1) + (bx+c) \cdot x^2 \\ &= (a_1 + b) \cdot x^3 + (a_2 + c) \cdot x^2 + a_1 \cdot x + a_2. \end{aligned}$$

Koeffizientenvergleich:

$$a_2 = 1, \quad a_1 = 0, \quad c = -a_2 = -1, \quad b = -a_1 = 0.$$

Daher

$$f(x) = \frac{1}{x^2} - \frac{1}{x^2+1}$$

Stammfunktion

$$\begin{aligned} \int \frac{1}{x^2(x^2+1)}\, dx &= \int \frac{1}{x^2}\, dx - \int \frac{1}{x^2+1}\, dx \\ &= -\frac{1}{x} - \arctan x + C \end{aligned}$$

3.5 Das Riemann-Integral

Sei $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ eine reelle Funktion. Wir zerlegen das Intervall in n Teilintervalle

$$a = x_0 < x_1 < \ldots < x_{n-1} < x_n = b.$$

- Zerlegung $Z = \{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$.
- Länge des Teilintervalls $[x_{k-1}, x_k]$: $\Delta x_k = x_k - x_{k-1}$.
- Feinheit der Zerlegung $h = \max\{\Delta x_k\colon k = 1, 2, \ldots, n\}$.
- Zwischenpunkte: $\xi = (\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n)$ mit $\xi_k \in [x_{k-1}, x_k]$.

Riemann-Summe

$$S(f, Z, \xi) = \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k) \cdot \Delta x_k$$

Definition 3.2. *Eine Funktion $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ heißt genau dann Riemann-integrierbar (kurz R-integrierbar), wenn der Grenzwert*

$$\lim_{h \to 0} S(f, Z, \xi) = \lim_{h \to 0} \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k) \cdot \Delta x_k = \int_a^b f(x)\ dx$$

existiert. Wir definieren zusätzlich

$$\int_b^a f(x)\ dx = -\int_a^b f(x)\ dx.$$

Man nennt $\int_a^b f(x)dx$ ein bestimmtes Integral. Alternative Schreibweise für $a < b$:

$$\int_a^b f(x)\ dx = \int_{[a,b]} f(x)\ dx.$$

Es gilt (ohne Beweis):

Satz 3.4. *Wenn $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig ist, dann ist f R-integrierbar.*

Das so genannte Lebesguesche Integrabilitätskriterium gibt genaue Auskunft, unter welchen Bedingungen eine Funktion R-integrierbar ist: $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ ist genau dann R-integrierbar ist, wenn f beschränkt ist und wenn f fast überall stetig ist.

Es gelten folgende wichtigen Aussagen für das bestimmte Integral:

Satz 3.5. *Seien $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ und $g\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ R-integrierbar und $c \in \mathbb{R}$. Dann gilt:*

1. *$f+g$ und $c \cdot f$ sind R-integrierbar mit*

$$\int_a^b [f(x)+g(x)]\ dx = \int_a^b f(x)\ dx + \int_a^b g(x)\ dx,$$
$$\int_a^b [c \cdot f(x)]\ dx = c \cdot \int_a^b f(x)\ dx.$$

2. *Für alle $c \in (a,b)$ sind $f\big|_{[a,c]}$ und $f\big|_{[c,b]}$ R-integrierbar und es gilt:*

$$\int_a^c f(x)\ dx + \int_c^b f(x)\ dx = \int_a^b f(x)\ dx$$

3. *Falls $f(x) \le g(x)$ für alle $x \in [a,b]$, dann*

$$\int_a^b f(x)\ dx \le \int_a^b g(x)\ dx.$$

4. *$|f|$ ist R-integrierbar und es gilt*

$$\left|\int_a^b f(x)\ dx\right| \le \int_a^b |f(x)|\ dx \le (b-a) \cdot \sup\{|f(x)| \colon x \in [a,b]\}.$$

5. *f^2, g^2 und $f \cdot g$ sind R-integrierbar und es gilt (Cauchy-Schwarz-Ungleichung):*

$$\left|\int_a^b f(x)g(x)\ dx\right| \le \sqrt{\int_a^b f(x)^2\ dx} \cdot \sqrt{\int_a^b g(x)^2\ dx}.$$

Beweis. Die Existenz der Integrale folgt für stetige Funktionen aus dem obigen Satz, im allgemeinen Fall mit Hilfe des Lebesgueschen Integrabilitätskriteriums. Die behaupteten Identitäten oder Ungleichungen zeigt man zuerst für Riemann-Summen und führt anschließend den Grenzwertübergang durch, z.B.:

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^n [f(\xi_k)+g(\xi_k)] \cdot \Delta x_k &= \sum_{k=1}^n f(\xi_k) \cdot \Delta x_k + \sum_{k=1}^n g(\xi_k) \cdot \Delta x_k \\ &\to \int_a^b f(x)\ dx + \int_a^b g(x)\ dx.\end{aligned}$$

□

3.6 Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung

Satz 3.6. *Seien $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a < b$. Dann gilt:*

1. *Sei $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig. Dann ist $F\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ mit*

$$F(x) = \int_a^x f(t)\ dt$$

differenzierbar und es gilt $F' = f$:

$$\left(\int_a^x f(t)\ dt\right)' = f(x).$$

F ist also eine Stammfunktion.

2. *Sei $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig differenzierbar. Dann gilt:*

$$\int_a^b f'(x)\ dx = f(b) - f(a).$$

Beweis. Zu 1.: Für $x_0, x \in [a,b]$ mit $x > x_0$ gilt:

$$\begin{aligned}\frac{F(x) - F(x_0)}{x - x_0} &= \frac{1}{x - x_0}\left[\int_a^x f(t)\ dt - \int_a^{x_0} f(t)\ dt\right]\\ &= \frac{1}{x - x_0}\left[\int_a^{x_0} f(t)\ dt + \int_{x_0}^x f(t)\ dt - \int_a^{x_0} f(t)\ dt\right] = \frac{1}{x - x_0}\int_{x_0}^x f(t)\ dt\end{aligned}$$

Also

$$\frac{F(x) - F(x_0)}{x - x_0} - f(x_0) = \frac{1}{x - x_0}\int_{x_0}^x \left[f(t) - f(x_0)\right]\ dt$$

und daher

$$\left|\frac{F(x) - F(x_0)}{x - x_0} - f(x_0)\right| \leq \sup\{|f(t) - f(x_0)| : t \in [x_0, x]\} \to 0 \quad \text{für} \quad x \to x_0.$$

Der Beweis für $x < x_0$ verläuft völlig analog.

Zu 2.: Sowohl $f(x)$ also auch $\int_a^x f'(t)dt$ sind Stammfunktionen von $f'(x)$. Also gibt es eine Konstante C mit

$$f(x) = \int_a^x f'(t)dt + C.$$

Für $x = a$ folgt daher: $f(a) = C$, also

$$f(x) = f(a) + \int_a^x f'(t)dt.$$

Daraus erhält man die Behauptung für $x = b$. □

Ähnlich wie den zweiten Teil des Hauptsatzes der Differential- und Integralrechnung zeigt man die folgenden beiden Sätze:

Satz 3.7 (Partielle Integration)**.** *Seien $f\colon I \to \mathbb{R}$ und $g\colon I \to \mathbb{R}$ stetig differenzierbare reelle Funktionen. Dann gilt*

$$\int_a^b f'(x) \cdot g(x)\ dx = \underbrace{f(b) \cdot g(b) - f(a) \cdot g(a)}_{f(x) \cdot g(x)\big|_a^b} - \int_a^b f(x) \cdot g'(x)\ dx.$$

Beweis. Aus dem entsprechenden Satz für unbestimmte Integrale (Stammfunktionen) und dem Hauptsatz folgt sofort, dass es eine Konstante C gibt, sodass:

$$\int_a^x f'(t) \cdot g(t)\ dt = f(x) \cdot g(x) - \int_a^x f(t) \cdot g'(t)\ dt + C.$$

Für $x = a$ folgt: $0 = f(a) \cdot g(a) + C$, also

$$\int_a^x f'(t) \cdot g(t)\ dt = f(x) \cdot g(x) - f(a) \cdot g(a) - \int_a^x f(t) \cdot g'(t)\ dt.$$

Daraus erhält man die Behauptung für $x = b$. □

Satz 3.8 (Substitutionsregel)**.** *Seien $f\colon [c,d] \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion, $g\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ eine stetig differenzierbare Funktion mit $g([a,b]) \subset [c,d]$. Dann gilt:*

$$\int_{g(a)}^{g(b)} f(x)\ dx = \int_a^b f(g(t)) \cdot g'(t)\ dt.$$

Beweis. Aus dem entsprechenden Satz für unbestimmte Integrale (Stammfunktionen) und dem Hauptsatz folgt sofort, dass es eine Konstante C gibt, sodass:

$$\int_a^{g(y)} f(x)\ dx = \int_a^y f(g(t)) \cdot g'(t)\ dt + C \quad \text{für alle } y \in [a,b].$$

Für $y = a$ folgt:

$$\int_a^{g(a)} f(x)\ dx = C,$$

also

$$\underbrace{\int_a^{g(y)} f(x)\ dx - \int_a^{g(a)} f(x)\ dx}_{= \int_{g(a)}^{g(y)} f(x)\ dx} = \int_a^y f(g(t)) \cdot g'(t)\ dt.$$

Daraus erhält man die Behauptung für $y = b$. □

3.7 Uneigentliche Integrale

Integrale unbeschränkter Funktionen auf beschränkten Intervallen und Integrale auf unbeschränkten Intervallen als Grenzwerte von Riemann-Integralen.

- Beispiel: Das Riemann-Integral der unbeschränkten Funktion

$$f(t) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{|t|}} & \text{für } t \neq 0 \\ 0 & \text{für } t = 0 \end{cases}$$

  auf dem Intervall $[-1, 1]$ existiert nicht. Das uneigentliche Integral

$$\int_{-1}^{1} f(t)\ dt = \lim_{x \to 0-} \int_{-1}^{x} f(t)\ dt + \lim_{x \to 0+} \int_{x}^{1} f(t)\ dt.$$

  existiert für die obige Funktion: $f(t)$ besitzt die Stammfunktion $F(t)$ mit

$$F(t) = \begin{cases} -2\sqrt{|t|} & \text{für } t < 0, \\ +2\sqrt{|t|} & \text{für } t > 0. \end{cases}$$

  Für $x < 0$ gilt:

$$\int_{-1}^{x} f(t)\ dt = -2\sqrt{|x|} + 2 \to 2 \quad \text{für } x \to 0.$$

  Für $x < 0$ gilt:

$$\int_{x}^{1} f(t)\ dt = 2 - 2\sqrt{|x|} \to 2$$

  Also

$$\int_{-1}^{1} f(t)\ dt = 4.$$

- Warnbeispiel: Für die Funktion

$$f(t) = \begin{cases} \frac{1}{t} & \text{für } t \neq 0 \\ 0 & \text{für } t = 0 \end{cases}$$

  auf dem Intervall $[-1, 1]$ gilt für $\varepsilon > 0$:

$$\int_{-1}^{-\varepsilon} f(t)\ dt + \int_{\varepsilon}^{1} f(t)\ dt = \ln|\varepsilon| - \ln 1 + \ln 1 - \ln|\varepsilon| = 0$$

  Daher existiert natürlich auch der Grenzwert für $\varepsilon \to 0$:

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \left[\int_{-1}^{-\varepsilon} f(t)\ dt + \int_{\varepsilon}^{1} f(t)\ dt \right] = 0.$$

Diesen Grenzwert nennt man den Cauchyschen Hauptwert. Das uneigentliche Integral existiert nicht, da die einzelnen Grenzwerte nicht in $\mathbb{R}$ existieren:

$$\int_{-1}^{-\varepsilon} f(t)\ dt \to -\infty \quad \text{für } \varepsilon \to 0 \quad \text{und} \quad \int_{\varepsilon}^{1} f(t)\ dt \to +\infty \quad \text{für } \varepsilon \to 0.$$

- Beispiel:

$$\int_0^\infty e^{-t}\ dt = \lim_{x\to\infty} \int_0^x e^{-t}\ dt = \lim_{x\to\infty} \left[-e^{-x}+1\right]\ dt = 1.$$

- Warnbeispiel

$$\lim_{k\in\mathbb{N},\ k\to\infty} \int_0^{2k\pi} \sin x\ dx = \lim_{k\in\mathbb{N},\ k\to\infty} [-\cos x]\,\Big|_0^{2k\pi} = -1+1=0.$$

Trotzdem existiert das uneigentliche Integral nicht!

$$\lim_{k\in\mathbb{N},\ k\to\infty} \int_0^{2k\pi+\pi} \sin x\ dx = \lim_{k\in\mathbb{N},\ k\to\infty} [-\cos x]\,\Big|_0^{2k\pi+\pi} = 0+1=1.$$

Alle Rechenregeln gelten auch für uneigentliche Integrale, vorausgesetzt alle auftretenden uneigentlichen Integrale existieren.

- Beispiel Gamma-Funktion: Für $x \in \mathbb{R} \setminus \{0,-1,-2,\ldots\}$:

$$\Gamma(x) = \int_0^\infty t^{x-1} e^{-t}\ dt.$$

Es gilt (siehe Übung):

$$\int_0^\infty t^n e^{-t}\ dt = \underbrace{-t^n e^{-t}\Big|_0^\infty}_{=0} + n \int_0^\infty t^{n-1} e^{-t}\ dt$$

Also: $\Gamma(n+1) = n\cdot\Gamma(n)$. Daraus folgt: $\Gamma(n+1)=n!$. (Beachte $\Gamma(1)=1$.)

- Substitutionsregel:

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2}\ dx &= \frac{2}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_\mu^\infty e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2}\ dx \\ &= \frac{2}{\sigma\sqrt{2\pi}}\sigma\sqrt{2} \int_0^\infty \frac{1}{2} t^{-1/2} e^{-t}\ dt = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^\infty t^{-1/2} e^{-t}\ dt = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = 1,\end{aligned}$$

($\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2 = t$, d.h.: $x = \mu + \sigma\sqrt{2t}$) weil man zeigen kann: $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$.

Kapitel 4

Differentialgleichungen in $\mathbb{R}$

4.1 Grundbegriffe

- Ordnung einer Differentialgleichung: Ordnung der höchsten Ableitung der gesuchten Funktion
- explizite Differentialgleichungen

$$\begin{aligned} \text{1. Ordnung} \quad & y'(x) = f(x, y(x)) \\ \text{2. Ordnung} \quad & y''(x) = f(x, y(x), y'(x)) \\ n\text{-ter Ordnung} \quad & y^{(n)}(x) = f(x, y(x), \ldots, y^{(n-1)}(x)) \end{aligned}$$

  implizite Differentialgleichungen

$$\begin{aligned} \text{1. Ordnung} \quad & F(x, y(x), y'(x)) = 0 \\ \text{2. Ordnung} \quad & F(x, y(x), y'(x), y''(x)) = 0 \\ n\text{-ter Ordnung} \quad & F(x, y(x), \ldots, y^{(n-1)}(x), y^{(n)}(x)) = 0 \end{aligned}$$

- lineare Differentialgleichungen

$$\begin{aligned} \text{1. Ordnung} \quad & a_1(x)y'(x) + a_0(x)y(x) = f(x) \\ \text{2. Ordnung} \quad & a_2(x)y''(x) + a_1(x)y'(x) + a_0(x)y(x) = f(x) \\ n\text{-ter Ordnung} \quad & a_n(x)y^{(n)}(x) + \ldots + a_1(x)y'(x) + a_0(x)y(x) = f(x) \qquad (4.1) \end{aligned}$$

  lineare Differentialgleichungen mit konstanten Koeffizienten

$$\begin{aligned} \text{1. Ordnung} \quad & a_1y'(x) + a_0y(x) = f(x) \\ \text{2. Ordnung} \quad & a_2y''(x) + a_1y'(x) + a_0y(x) = f(x) \\ n\text{-ter Ordnung} \quad & a_ny^{(n)}(x) + \ldots + a_1y'(x) + a_0y(x) = f(x) \end{aligned}$$

  homogene lineare Differentialgleichungen: $f(x) \equiv 0$.

$$a_n(x)y^{(n)}(x) + \ldots + a_1(x)y'(x) + a_0(x)y(x) = 0 \qquad (4.2)$$

- Kurzschreibweise: $F(x, y, \ldots, y^{(n-1)}, y^{(n)}) = 0$

4.2 Einfache Beispiele

1.
$$y'(x) = f(x)$$
Lösungen
$$y(x) = \int f(x)\ dx$$

2.
$$y''(x) = f(x)$$
Lösungen
$$y(x) = \int F(x)\ dx \quad \text{mit} \quad F(x) = \int f(x)\ dx$$

3.
$$y'(x) = y(x)$$
Lösungen
$$y(x) = C \cdot e^x$$

4.
$$y''(x) = y(x)$$
Lösungen
$$y(x) = C_1 \cdot e^x + C_2 \cdot e^{-x} = C_1' \cdot \sinh x + C_2' \cdot \cosh x$$

5.
$$y''(x) = -y(x)$$
Lösungen
$$y(x) = C_1 \cdot \sin x + C_2 \cdot \cos x$$

4.3 Separable Differentialgleichungen

$$y'(x) = \frac{f(x)}{g(y(x))}$$

Trennung der Variablen:
$$g(y(x))y'(x) = f(x)$$

Kurzschreibweise
$$g(y)y' = f(x)$$

Durch Integration erhält man:

$$\int g(z)\ dz = \int f(x)\ dx \quad \text{mit} \quad z = y(x)$$

Beispiel:

$$y'(x) + x \cdot y(x)^2 = 0$$

Trennung der Variablen

$$-\frac{y'(x)}{y(x)^2} = x$$

Integration:

$$\frac{1}{y(x)} = \frac{1}{2}x^2 + C \quad \text{also} \quad y(x) = \frac{2}{x^2 + C'}.$$

4.4 Differentialgleichungen 1. Ordnung mit homogenem f

$$y'(x) = f(x, y(x))$$

mit einer rechten Seite, die die folgende Bedingung erfüllt:

$$f(t \cdot x, t \cdot y) = f(x, y) \quad \text{für alle } t.$$

Kurzschreibweise

$$y' = f\left(\frac{y}{x}\right)$$

Ansatz: $y(x) = x \cdot v(x)$:

$$x \cdot v'(x) + v(x) = f(x, x \cdot v(x)) = f(1, v(x)).$$

Anschließend: Trennung der Variablen.

Beispiel:

$$x \cdot y'(x) = 2y(x) + x \quad \text{also} \quad y'(x) = \frac{2y(x) + x}{x}$$

Ansatz: $y(x) = x \cdot v(x)$:

$$x \cdot v'(x) + v(x) = 2v(x) + 1 \quad \text{also} \quad \frac{v'(x)}{v(x) + 1} = \frac{1}{x}$$

Integration:

$$\ln|v(x) + 1| = \ln|x| + C \quad \text{also} \quad v(x) = C' \cdot x - 1$$

Lösung: $y(x) = C' \cdot x^2 - x$.

4.5 Lineare Differentialgleichungen

Allgemeine Eigenschaften linearer Differentialgleichungen:

Satz 4.1. *1. (Superpositionsprinzip) Wenn $y_1(x)$ und $y_2(x)$ Lösungen der homogenen Differentialgleichung* (4.2) *sind, dann ist auch $c_1 \cdot y_1(x) + c_2 \cdot y_2(x)$ eine Lösung der homogenen Differentialgleichung* (4.2).

2. Wenn $y_p(x)$ eine Lösung der inhomogenen Differentialgleichung (4.1) *und $y_{hom}(x)$ eine Lösung der homogenen Differentialgleichung* (4.2) *sind, dann ist $y_p(x)+y_{hom}(x)$ eine Lösung der inhomogenen Differentialgleichung* (4.1).

3. Wenn $y_1(x)$ und $y_2(x)$ Lösungen der inhomogenen Differentialgleichung (4.1) *sind, dann ist $y_2(x) - y_1(x)$ eine Lösung der homogenen Differentialgleichung* (4.2).

4. Jede Lösung $y_{inh}(x)$ der inhomogenen Differentialgleichung lässt sich als Summe einer partikulären Lösung $y_p(x)$ der inhomogenen Differentialgleichung (4.1) *und einer Lösung $y_{hom}(x)$ der homogonen Differentialgleichung* (4.2) *darstellen.*

4.5.1 Lineare Differentialgleichungen 1. Ordnung

In expliziter Form:

$$y'(x) + a(x)y(x) = f(x)$$

- Homogene Differentialgleichung mit konstanten Koeffizienten

  $$y'(x) + a \cdot y(x) = 0$$

  Setzt man den Ansatz $y(x) = e^{\lambda x}$ in die Differentialgleichung ein, erhält man die Bedingung $\lambda = -a$ und daher die Lösung:

  $$\boxed{y(x) = c \cdot e^{-a\,x}}$$

- Homogene Differentialgleichung mit variablen Koeffizienten: separable Differentialgleichung

  $$y'(x) = -a(x) \cdot y(x) \quad \text{also} \quad \frac{y'(x)}{y(x)} = -a(x)$$

  Integration

  $$\ln|y(x)| = -\int a(x)\;dx + C \quad \text{also} \quad \boxed{y(x) = c \cdot e^{-\int a(x)\;dx}}$$

- Bestimmung einer partikulären Lösung der inhomogenen Differentialgleichung durch Ansatz: Für spezielle Funktionen $f(x)$, wie z.B. $f(x) = p(x) \cdot q(x)$ mit $p(x) = x^n$ und

$q(x) \in \{e^{\alpha x}, \sin(\beta x), \cos(\beta x)\}$ und Linearkombinationen solcher Funktionen, lässt sich oft eine partikuläre Lösung der selben Form finden:

Beispiel

$$y'(x) - y(x) = e^{-2x}$$

Mit dem Ansatz

$$y_p(x) = c_1 \cdot e^{-2x}$$

erhält man die Bedingungen

$$-2c_1 - c_1 = 1 \quad \text{also} \quad y_p(x) = -\frac{1}{3}\, e^{-2x}$$

Allgemeine Lösung:

$$y(x) = -\frac{1}{3}\, e^{-2x} + c \cdot e^{x}.$$

Warnung: Ansatz funktioniert nicht für $f(x) = e^x$.

- Variation der Konstanten: Allgemeine Strategie, um eine partikuläre Lösung zu finden.

  Ansatz:

  $$y(x) = c(x) \cdot e^{-\int a(x)\ dx}$$

  Durch Einsetzen in die Differentialgleichung erhält man:

  $$c'(x) \cdot e^{-\int a(x)\ dx} + \underbrace{c(x) \cdot e^{-\int a(x)\ dx}(-a(x)) + a(x) \cdot c(x) \cdot e^{-\int a(x)\ dx}}_{=0} = f(x)$$

  Also

  $$c'(x) = f(x) \cdot e^{\int a(x)\ dx}$$

  und daher

  $$c(x) = \int f(x) \cdot e^{\int a(x)\ dx}\ dx$$

  Lösung:

  $$\boxed{y(x) = \left(\int f(x) \cdot e^{\int a(x)\ dx}\ dx\right) \cdot e^{-\int a(x)\ dx}}$$

  Vorsicht: Nur EINE Integrationskonstante!

  Beispiel

  $$y'(x) - y(x) = e^{-2x}$$

  Lösung:

  $$\int a(x)\ dx = -x, \qquad \int f(x) \cdot e^{\int a(x)\ dx}\ dx = \int e^{-2x} e^{-x}\ dx = \int e^{-3x}\ dx = -\frac{1}{3} e^{-3x} + C$$

  also

  $$y(x) = \left(-\frac{1}{3} e^{-3x} + C\right) e^{x} = C\, e^{x} - \frac{1}{3} e^{-2x}$$

4.5.2 Lineare Differentialgleichungen 2. Ordnung

- Homogene lineare Differentialgleichungen mit konstanten Koeffizienten:

$$y''(x) + a \cdot y'(x) + b \cdot y(x) = 0$$

Exponentialansatz:

$$y(x) = e^{\lambda x}$$

Durch Einsetzen in die Differentialgleichungen erhält man die Bedingung:

$$\lambda^2 + a \cdot \lambda + b = 0 \tag{4.3}$$

Drei Fälle:

  - (4.3) besitzt zwei verschiedene reelle Nullstellen λ_1 und λ_2:

$$\lambda_1 = -\frac{a}{2} + \sqrt{\frac{a^2}{4} - b} \quad \text{und} \quad \lambda_2 = -\frac{a}{2} - \sqrt{\frac{a^2}{4} - b}$$

    Dann erhält man die Lösungen

$$\boxed{y(x) = c_1 \cdot e^{\lambda_1 x} + c_2 \cdot e^{\lambda_2 x}}$$

  - (4.3) besitzt genau eine reelle Nullstelle λ (mit Vielfachheit 2):

$$\frac{a^2}{4} - b = 0 \quad \text{und} \quad \lambda = -\frac{a}{2}$$

    Dann erhält man die Lösungen

$$\boxed{y(x) = (c_1 + c_2 \cdot x) \cdot e^{\lambda x}}$$

    Beweis. Für $y(x) = x \cdot e^{\lambda x}$ folgt

$$y'(x) = (1 + \lambda x)e^{\lambda x} \quad \text{und} \quad y''(x) = (2\lambda + \lambda^2 x)e^{\lambda x}$$

    und daher

$$\begin{aligned} y''(x) + a \cdot y'(x) + b \cdot y(x) &= \left[2\lambda + \lambda^2 x + a \cdot (1 + \lambda x) + b \cdot x\right] e^{\lambda x} \\ &= \left[2\lambda + a + (\lambda^2 + a \cdot \lambda + b)x\right] e^{\lambda x} = 0 \end{aligned}$$

$\square$

  - (4.3) besitzt keine reellen Nullstellen. Dann erhält man die Lösungen

$$\boxed{y(x) = e^{\alpha x} \cdot (c_1 \cdot \cos(\beta x) + c_2 \cdot \sin(\beta x))}$$

    mit

$$\alpha = -\frac{a}{2} \quad \text{und} \quad \beta = \sqrt{b - \frac{a^2}{4}}$$

- Inhomogene lineare Differentialgleichungen mit konstanten Koeffizienten:

$$y''(x) + a \cdot y'(x) + b \cdot y(x) = f(x)$$

Wie im Fall linearer Differentialgleichungen 1. Ordnung lässt sich oft für spezielle Funktionen $f(x)$, wie z.B. $f(x) = p(x) \cdot q(x)$ mit $p(x) = x^n$ und $q(x) \in \{e^{\alpha x}, \sin(\beta x), \cos(\beta x)\}$ und Linearkombinationen solcher Funktionen, eine partikuläre Lösung der selben Form finden.

Beispiel: $y''(x) - y'(x) - 2y(x) = 4x^2$
Ansatz

$$y_p(x) = a_2 x^2 + a_1 x + a_0$$

Durch Einsetzen erhält man die Bedingung:

$$2a_2 - 2a_2 x - a_1 - 2a_2 x^2 - 2a_1 x - 2a_0 = 4x^2$$

Koeffizientenvergleich:

$$-2a_2 = 4, \quad -2a_2 - 2a_1 = 0, \quad 2a_2 - a_1 - 2a_0 = 0.$$

Daraus erhält man:

$$a_2 = -2, \quad a_1 = 2, \quad a_0 = -3, \quad \text{also} \quad y_p(x) = -2x^2 + 2x - 3$$

Lösung der homogenen Differentialgleichung:

$$\lambda^2 - \lambda - 2 = 0, \quad \text{also} \quad \lambda_1 = 2,\ \lambda_2 = -1$$

Allgemeine Lösung:

$$y(x) = -2x^2 + 2x - 3 + c_1 \cdot e^{2x} + c_2 \cdot e^{-x}$$

Allgemeine Technik: Variation der Konstanten
Man wählt den Ansatz:

$$y_p(x) = c_1(x) \cdot y_1(x) + c_2(x) \cdot y_2(x),$$

wobei $y_1(x)$ und $y_2(x)$ zwei (unabhängige) Lösungen der homogenen Differentialgleichung sind, und erhält

$$y_p'(x) = c_1'(x) \cdot y_1(x) + c_1(x) \cdot y_1'(x) + c_2'(x) \cdot y_2(x) + c_2(x) \cdot y_2'(x)$$

Wir fordern nun, dass

$$c_1'(x) \cdot y_1(x) + c_2'(x) \cdot y_2(x) = 0$$

Dann folgt

$$y_p'(x) = c_1(x) \cdot y_1'(x) + c_2(x) \cdot y_2'(x)$$

und

$$y_p''(x) = c_1'(x) \cdot y_1'(x) + c_1(x) \cdot y_1''(x) + c_2'(x) \cdot y_2'(x) + c_2(x) \cdot y_2''(x)$$

Also

$$\begin{aligned} y_p''(x) + a \cdot y_p'(x) + b \cdot y_p(x) &= c_1'(x) \cdot y_1'(x) + c_2'(x) \cdot y_2'(x) \\ &+ c_1(x) \cdot \underbrace{[y_1''(x) + a \cdot y_1'(x) + b\, y_1(x)]}_{=0} + c_2(x) \cdot \underbrace{[y_2''(x) + a \cdot y_2'(x) + b\, y_2(x)]}_{=0} \end{aligned}$$

Somit genügt es, $c_1(x)$ und $c_2(x)$ so zu wählen, dass

$$\begin{aligned} c_1'(x) \cdot y_1(x) + c_2'(x) \cdot y_2(x) &= 0 \\ c_1'(x) \cdot y_1'(x) + c_2'(x) \cdot y_2'(x) &= f(x) \end{aligned}$$

Beispiel: $y''(x) - y'(x) - 2y(x) = 4x^2$

$$y_1(x) = e^{2x}, \quad y_2(x) = e^{-x}$$

Bedingungen an $c_1(x)$ und $c_2(x)$:

$$\begin{aligned} c_1'(x) \cdot e^{2x} + c_2'(x) \cdot e^{-x} &= 0 \\ 2c_1'(x) \cdot e^{2x} - c_2'(x) \cdot e^{-x} &= 4x^2 \end{aligned}$$

Durch Addition folgt:

$$c_1'(x) = \frac{4}{3}x^2 e^{-2x} \quad \text{und} \quad c_2'(x) = -c_1'(x)e^{3x} = -\frac{4}{3}x^2 e^x$$

Also (partielle Integration):

$$c_1(x) = -\frac{1}{3}(2x^2 + 2x + 1)e^{-2x}, \quad c_2(x) = -\frac{4}{3}(x^2 - 2x + 2)e^x$$

und somit

$$y_p(x) = -\frac{1}{3}(2x^2 + 2x + 1)e^{-2x}e^{2x} - \frac{4}{3}(x^2 - 2x + 2)e^x e^{-x} = -2x^2 + 2x - 3.$$

4.6 Zusatzbedingungen

Wir haben an Beispielen gesehen: Die allgemeine Lösung einer Differentialgleichung der Ordnung n besitzt n frei wählbare Parameter. In Anwendungen werden diese Parameter durch Zusatzbedingungen festgelegt:

- Anfangsbedingungen: Anfangswertproblem
  - Beispiel:

$$\begin{aligned} x'(t) &= f(t, x(t)) \quad \text{für alle } t > 0, \\ x(0) &= x_0 \end{aligned}$$

  Beispiel:

$$\begin{aligned} x''(t) &= f(t, x(t), x'(t)) \quad \text{für alle } t > 0, \\ x(0) &= x_0, \\ x'(0) &= v_0 \end{aligned}$$

- Randbedingungen: Randwertproblem
  - Beispiel:

$$\begin{aligned} y''(x) &= f(x, y(x), y'(x)) \quad \text{für alle } x \in (a, b), \\ y(a) &= y_a, \\ y(b) &= y_b \end{aligned}$$

4.7 Einige Anwendungen

1. Bewegung mit konstanter Geschwindigkeit v:

$$x'(t) = v$$

   Lösung

$$x(t) = \int v \; dt = x_0 + v \cdot t$$

2. Bewegung mit konstanter Beschleunigung a:

$$x''(t) = a$$

   Lösung

$$\begin{aligned} x'(t) &= \int v \; dt = v_0 + a \cdot t \\ x(t) &= \int (v_0 + a \cdot t) \; dt = x_0 + v_0 \cdot t + \frac{a}{2} t^2 \end{aligned}$$

3. Ungedämpfter harmonischer Oszillator:

$$mx''(t) = -kx(t).$$

Also

$$x''(t) + \frac{k}{m}\, x(t) = 0$$

Charakteristische Gleichung

$$\lambda^2 + \frac{k}{m} = 0 \quad \text{also} \quad \lambda = \pm i\,\omega_0 \quad \text{mit} \quad \omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

Lösungen

$$x(t) = c_1\, \cos(\omega_0\, t) + c_2\, \sin(\omega_0\, t)$$

4. Ungedämpfter harmonischer Oszillator mit periodischer Anregung:

$$mx''(t) = -kx(t) + F_0 \cos(\omega\, t).$$

Partikuläre Lösung: Ansatz

$$x_p(t) = A\, \cos(\omega\, t)$$

Durch Einsetzen erhält man:

$$m\, \left[-A\omega^2 \cos(\omega\, t)\right] + k\, A\, \cos(\omega\, t) = F_0\, \cos(\omega\, t)$$

Koeffizientenvergleich:

$$-m\omega^2\, A + k\, A = F_0.$$

Also, falls $\omega^2 \neq \frac{k}{m} = \omega_0^2$,

$$A = \frac{F_0}{k - m\,\omega^2} = \frac{F_0}{m\,(\omega_0^2 - \omega^2)}.$$

Allgemeine Lösung:

$$x(t) = c_1 \cos(\omega_0\, t) + c_2\, \sin(\omega_0\, t) + \frac{F_0}{m\,(\omega_0^2 - \omega^2)} \cos(\omega\, t)$$

Für die Anfangsbedingungen:

$$x(0) = 0 \quad \text{und} \quad x'(0) = 0$$

erhält man:

$$\begin{aligned} x(t) &= \frac{F_0}{m\,(\omega_0^2 - \omega^2)} \left[\cos(\omega\, t) - \cos(\omega_0\, t)\right] \\ &= \frac{2F_0}{m\,(\omega^2 - \omega_0^2)}\, \sin\left(\frac{\omega - \omega_0}{2}\, t\right)\, \sin\left(\frac{\omega + \omega_0}{2}\, t\right) \end{aligned}$$

Im Fall $\omega = \omega_0$ erhält man eine partikuläre Lösung durch Variation der Konstanten:

$$x_p(t) = c_1(t)\ \cos(\omega_0\, t) + c_2(t)\ \sin(\omega_0\, t)$$

mit

$$\begin{aligned} c_1'(t)\cos(\omega_0\, t) + c_2'(t)\ \sin(\omega_0\, t) &= 0 \\ -\omega_0\, c_1'(t)\sin(\omega_0\, t) + \omega_0\, c_2'(t)\ \cos(\omega_0\, t) &= \frac{F_0}{m}\cos(\omega_0\, t) \end{aligned}$$

Daraus folgt

$$c_1'(t) = -\frac{F_0}{m\,\omega_0}\cos(\omega_0\, t)\sin(\omega_0\, t) \quad \text{und} \quad c_2'(t) = \frac{F_0}{m\,\omega_0}\cos^2(\omega_0\, t)$$

Also

$$c_1(t) = \frac{F_0}{2m\,\omega_0^2}\ \cos^2(\omega_0\, t) \quad \text{und} \quad c_2(t) = \frac{F_0}{2m\,\omega_0^2}\,[\omega_0\, t + \sin(\omega_0\, t)\ \cos(\omega_0\, t)]$$

und daher

$$x_p(t) = \frac{F_0}{2m\,\omega_0^2}\,[\omega_0\, t\ \sin(\omega_0\, t) + \cos(\omega_0\, t)]$$

Für die Anfangsbedingungen:

$$x(0) = 0 \quad \text{und} \quad x'(0) = 0$$

erhält man:

$$x(t) = \frac{F_0}{2m\,\omega_0}\, t\ \sin(\omega_0\, t)$$

Kapitel 5

Komplexe Zahlen

- Die Menge der komplexen Zahlen: $\mathbb{C} = \{(x, y) \colon x, y \in \mathbb{R}\}$.

  Sei $z = (x, y)$ eine komplexe Zahl.

  - x heißt Realteil von z, y heißt Imaginärteil von z. Schreibweise: $x = \operatorname{Re} z$, $y = \operatorname{Im} z$.
  - Grafische Darstellung als Punkt in der „komplexen“ Ebene. Die x-Achse heißt die reelle Achse, die y-Achse heißt die imaginäre Achse.
  - Alternative Schreibweisen einer komplexen Zahl $z = (x, y)$: $z = x + i\,y$, $z = x + y\,i$, $z = x + i \cdot y$, $z = x + y \cdot i$.
  - Für $x \in \mathbb{R}$ unterscheiden wir nicht zwischen x und $x + 0 \cdot i$, also nicht zwischen der reellen Zahl x und $(x, 0) \in \mathbb{C}$. In diesem Sinne gilt: $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$.

- Operationen: Addition und Multiplikation von zwei komplexen Zahlen $z_1 = (x_1, y_1)$ und $z_2 = (x_2, y_2)$:

$$\begin{aligned} z_1 + z_2 &= (x_1 + x_2, y_1 + y_2) \\ z_1 \cdot z_2 &= (x_1 \cdot x_2 - y_1 \cdot y_2, x_1 \cdot y_2 + x_2 \cdot y_1) \end{aligned}$$

  Motivation: Bei Verwendung der alternativen Schreibweise $z_1 = x_1 + y_1 \cdot i$ und $z_2 = x_2 + y_2 \cdot i$ würde man für die Addition und Multiplikation erwarten, wenn man die üblichen Rechenregeln unterstellt:

$$z_1 + z_2 = (x_1 + y_1 \cdot i) + (x_2 + y_2 \cdot i) = (x_1 + x_2) + (y_1 + y_2) \cdot i$$

  und, wenn man die zusätzliche Regel $i^2 = i \cdot i = -1$ vereinbart:

$$\begin{aligned} z_1 \cdot z_2 &= (x_1 + y_1 \cdot i) \cdot (x_2 + y_2 \cdot i) = x_1 \cdot x_2 + y_1 \cdot y_2 \cdot i^2 + (x_1 \cdot y_2 + x_2 \cdot y_1) \cdot i \\ &= (x_1 \cdot x_1 - y_1 \cdot y_2) + (x_1 \cdot y_2 + x_2 \cdot y_1) \cdot i \end{aligned}$$

- Man überprüft leicht, dass die Addition und Multiplikation von komplexen Zahlen die selben Rechenregeln erfüllen wie die Addition und Multiplikation reeller Zahlen.

- Um die Subtraktion und die Division zweier komplexer Zahlen einführen zu können, muss man nur vereinbaren, was man unter $-z$ und $\frac{1}{z}$ versteht. Wir erwarten natürlich

$$z + (-z) = 0 \quad \text{und} \quad z \cdot \frac{1}{z} = 1.$$

Wie man leicht nachrechnet, gelten diese Eigenschaften für jede Zahl $z = (x, y)$ mit

$$-z = (-x, -y) \quad \text{und für } z \neq 0: \quad \frac{1}{z} = \left(\frac{x}{x^2 + y^2}, \frac{-y}{x^2 + y^2} \right)$$

Subtraktion: $z_1 - z_2 = z_1 + (-z_2)$. Multiplikation $\frac{z_1}{z_2} = z_1 \cdot \frac{1}{z_2}$.

- Mit den getroffenen Vereinbarungen gilt natürlich:

$$z = (x, y) = (x, 0) + (0, y) = (x, 0) + (y, 0) \cdot (0, 1) = x + y \cdot i \quad \text{mit} \quad i = (0, 1).$$

und

$$i^2 = i \cdot i = (0, 1) \cdot (0, 1) = (-1, 0) = -1$$

- Zwei weitere wichtige Operationen für eine komplexe Zahl $z = (x, y) = x + y \cdot i$:

$$\bar{z} = (x, -y) = x - y \cdot i \quad \text{und} \quad |z| = \sqrt{x^2 + y^2}$$

$\bar{z}$ heißt die zu z konjugiert komplexe Zahl, $|z|$ heißt der Betrag von z. Man sieht sofort:

$$\bar{z} \cdot z = |z|^2, \quad \operatorname{Re} z = \frac{1}{2}(z + \bar{z}), \quad \operatorname{Im} z = \frac{1}{2i}(z - \bar{z}).$$

5.1 Quadratische Gleichungen in $\mathbb{C}$

Seien $p, q \in \mathbb{R}$ mit $\frac{p^2}{4} - q < 0$. Dann besitzt die Gleichung

$$z^2 + p \cdot z + q = 0$$

keine reelle Lösung.

- Spezialfall: $p = 0$, $q = 1$, also

$$z^2 + 1 = 0$$

Mit $z = (x, y)$ erhält man

$$(x^2 - y^2, 2xy) + 1 = 0$$

Also

$$x^2 - y^2 + 1 = 0 \quad \text{und} \quad 2xy = 0$$

Lösungen:

$$x = 0 \quad \text{und} \quad y = \pm 1 \quad \text{also} \quad z = \pm i.$$

- Allgemeiner Fall:
$$z^2 + p \cdot z + q = 0$$
$\iff$
$$z^2 + p \cdot z + \frac{p^2}{4} + q - \frac{p^2}{4} = 0$$
$\iff$
$$\left(z + \frac{p}{2}\right)^2 + q - \frac{p^2}{4} = 0$$
$\iff$
$$\left(\frac{z + \frac{p}{2}}{\sqrt{q - \frac{p^2}{4}}}\right)^2 + 1 = 0$$
$\iff$
$$\frac{z + \frac{p}{2}}{\sqrt{q - \frac{p^2}{4}}} = \pm i$$
$\iff$
$$z = -\frac{p}{2} \pm i\sqrt{q - \frac{p^2}{4}}.$$

5.2 Erweiterung der Exponentialfunktion auf $\mathbb{C}$

Wir betrachten die Taylor-Reihe der Exponentialfunktion für $x \in \mathbb{R}$:

$$\sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{i!}\, x^i$$

Für $x = i\, y$, dann erhält man

$$\sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{i!}\, x^i = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k)!}(iy)^{2k} + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)!}(iy)^{2k+1} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k)!} y^{2k} + i \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} y^{2k+1}$$

Das motiviert die folgende Erweiterung der Exponentialfunktion

Definition 5.1. *1. Für rein imaginäre Zahlen:*

$$e^{iy} = \cos y + i\, \sin y$$

2. Für komplexe Zahlen $z = x + i\, y \in \mathbb{C}$:

$$e^z = e^x \cdot e^{iy} = e^x \cdot (\cos y + i\, \sin y).$$

Es gelten analoge Rechenregeln wie im reellen Fall, z.B.:

$$\boxed{e^{z_1+z_2} = e^{z_1} \cdot e^{z_2} \quad \text{für alle } z_1, z_2 \in \mathbb{C}}. \tag{5.1}$$

Das folgt leicht aus der entsprechenden Eigenschaft der reellen Exponentialfunktion und der Additionstheoreme der Winkelfunktionen.

Weitere Rechenregeln:

- Für $x \in \mathbb{R}$ gilt:
$$\boxed{\left|e^{i\,x}\right| = 1}$$
- Für $x \in \mathbb{R}$ gilt:
$$\boxed{\cos x = \frac{1}{2}\,\left(e^{i\,x} + e^{-i\,x}\right)} \quad \text{und} \quad \boxed{\sin x = \frac{1}{2\,i}\,\left(e^{i\,x} - e^{-i\,x}\right)}$$

Die Hyperbelfunktionen wurden mit Hilfe der Exponentialfunktion eingeführt. Daher lassen sie sich ebenfalls auf $\mathbb{C}$ erweitern. Die obige Darstellung der Winkelfunktionen mit Hilfe der Exponentialfunktion erlaubt es auch, die Winkelfunktionen auf $\mathbb{C}$ zu erweitern.

5.3 Polarform

Satz 5.1. *Jede komplexe Zahl $z = x + i\,y \neq 0$ lässt sich folgendermaßen darstellen:*

$$z = r \cdot e^{i\,\varphi} = r \cdot (\cos\varphi + i\,\sin\varphi) \tag{5.2}$$

mit

$$r = |z| = \sqrt{x^2+y^2} \quad \textit{und} \quad \varphi = \arg(z) = \begin{cases} \arctan\left(\frac{y}{x}\right) & \textit{für } x > 0, \\ \pi + \arctan\left(\frac{y}{x}\right) & \textit{für } x < 0,\ y \geq 0, \\ -\pi + \arctan\left(\frac{y}{x}\right) & \textit{für } x < 0,\ y < 0, \\ \frac{\pi}{2} & \textit{für } x = 0,\ y > 0, \\ -\frac{\pi}{2} & \textit{für } x = 0,\ y < 0 \end{cases}$$

Die Darstellung ist in folgendem Sinne eindeutig: Falls für ein $z \in \mathbb{C}$ die Darstellung (5.2) *für $r > 0$ und $\varphi \in \mathbb{R}$ gilt, dann folgt*

$$r = |z| \quad \textit{und} \quad \varphi = \arg(z) + 2k\pi \quad \textit{mit } k \in \mathbb{Z}.$$

Beweis. Geometrischer Beweis □

Beachte: $\varphi \in (-\pi, \pi]$ und

$$\cos\varphi = \frac{x}{r}, \quad \sin\varphi = \frac{y}{r}, \quad \tan\varphi = \frac{y}{x} \quad \text{für } x \neq 0.$$

Beispiel: Einheitswurzeln. Mit Hilfe der Polarform lassen sich leicht die Lösungen der Gleichung

$$z^n = 1$$

für $n \in \mathbb{N}$ bestimmen. Mit $z = r \cdot e^{i\varphi}$ erhalten wir aus (5.1)

$$r^n \cdot e^{i\,n\,\phi} = 1.$$

Also

$$r^n = 1 \quad \text{und} \quad n\,\varphi = 2k\pi. \quad \text{d.h.} \quad r = 1 \quad \text{und} \quad \varphi = \frac{2k\pi}{n}.$$

Lösungen

$$z_k = e^{i\frac{2k\pi}{n}} = \cos\left(\frac{2k\pi}{n}\right) + i\,\sin\left(\frac{2k\pi}{n}\right) \quad \text{für } k = 0, 1, \ldots, n-1.$$

$n = 3$:

$$\begin{aligned} z_0 &= 1 \\ z_1 &= \cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) + i\,\sin\left(\frac{2\pi}{3}\right) = \frac{-1 + i\sqrt{3}}{2} \\ z_2 &= \cos\left(\frac{4\pi}{3}\right) + i\,\sin\left(\frac{4\pi}{3}\right) = \frac{-1 - i\sqrt{3}}{2} \end{aligned}$$

5.4 Erweiterung der Ableitung

Der Begriff der Ableitung lässt sich auf Funktionen $f\colon A \to \mathbb{C}$ mit $A \subset \mathbb{R}$ erweitern:

Definition 5.2. *Die Ableitung von $f\colon A \to \mathbb{C}$ mit $A \subset \mathbb{R}$ und $f(x) = g(x) + i\,h(x)$ mit $g\colon A \to \mathbb{R}$, $h\colon A \to \mathbb{R}$ ist durch*

$$f'(x) = g'(x) + i\,h'(x).$$

gegeben.

Es gelten die analogen Rechenregeln: Additionsregel, Produktregel, ...

Beispiel: Für die Ableitung der Funktion $y(x) = e^{\lambda x}$ mit $\lambda = \alpha + i\,\beta \in \mathbb{C}$ gilt:

$$\begin{aligned} y'(x) &= (e^{\alpha x} \cdot (\cos(\beta\,x) + i\,\sin(\beta\,x))' \\ &= (e^{\alpha x} \cdot (\cos(\beta\,x))' + i\,(e^{\alpha x} \sin(\beta\,x))' \\ &= \alpha\,e^{\alpha x} \cdot \cos(\beta\,x) - \beta\,e^{\alpha x} \cdot \sin(\beta\,x) + i\,[\alpha\,e^{\alpha x} \cdot \sin(\beta\,x) + \beta\,e^{\alpha x} \cdot \cos(\beta\,x)] \\ &= (\alpha + i\,\beta) \cdot e^{\alpha x} \cdot (\cos(\beta\,x) + i\,\sin(\beta\,x)) = \lambda\,y(x). \end{aligned}$$

Also gilt auch für $\lambda \in \mathbb{C}$:

$$\boxed{\left(e^{\lambda x}\right)' = \lambda \cdot e^{\lambda x}}$$

5.5 Nachtrag: Lineare Differentialgleichungen 2. Ordnung

Durch Exponentialansatz: $y(x) = e^{\lambda x}$ mit $\lambda \in \mathbb{C}$ führt (wie im reellen Fall) zu Lösungen, falls λ eine Lösung der charakteristischen Gleichung

$$\lambda^2 + a \cdot \lambda + b = 0$$

ist. Für den Fall $b > \frac{a^2}{4}$ erhalten wir ein Paar konjugiert komplexer Lösungen:

$$\lambda_1 = \underbrace{-\frac{a}{2}}_{=\alpha} + i \underbrace{\sqrt{b - \frac{a^2}{4}}}_{=\beta} \quad \text{und} \quad \lambda_2 = \overline{\lambda_1} = \underbrace{-\frac{a}{2}}_{=\alpha} - i \underbrace{\sqrt{b - \frac{a^2}{4}}}_{=\beta}$$

Nach dem Superpositionsprinzip erhalten wir damit Lösungen der Form

$$y(x) = c_1\, e^{\lambda_1 x} + c_2\, e^{\lambda_2 x}$$

Im Speziellen erhält man die Lösungen:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}(e^{\lambda_1 x} + e^{\overline{\lambda_1} x}) &= \frac{1}{2}(e^{\lambda_1 x} + \overline{e^{\lambda_1 x}}) = \operatorname{Re}\left(e^{\lambda_1 x}\right) = e^{\alpha x}\, \cos(\beta\, x) \\
\frac{1}{2i}(e^{\lambda_1 x} - e^{\overline{\lambda_1} x}) &= \frac{1}{2}(e^{\lambda_1 x} - \overline{e^{\lambda_1 x}}) = \operatorname{Im}\left(e^{\lambda_1 x}\right) = e^{\alpha x}\, \sin(\beta\, x)
\end{aligned}$$

und damit auch alle Linearkombinationen als Lösungen:

$$y(x) = e^{\alpha x}\left(\tilde{c}_1\, \cos(\beta\, x) + \tilde{c}_1\, \sin(\beta\, x)\right)$$

Kapitel 6

Mehrdimensionale Differentialrechnung

6.1 Der Vektorraum $\mathbb{R}^n$

Vereinbarung $x \in \mathbb{R}^n$ ist ein Spaltenvektor.

$$\mathbb{R}^n = \{x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)^T : x_1, x_2, \ldots, x_n \in \mathbb{R}\}$$

Operationen:

- Addition und skalare Multiplikation:

$$(x_1, x_2, \ldots, x_n)^T + (y_1, y_2, \ldots, y_n)^T = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, \ldots, x_n + y_n)^T$$
$$c\,(x_1, x_2, \ldots, x_n)^T = (c\,x_1, c\,x_2, \ldots, c\,x_n)^T$$

- Skalarprodukt:

$$x \cdot y = x_1\,y_1 + x_2\,y_2 + \ldots + x_n\,y_n \in \mathbb{R}$$

- Vektorprodukt in $\mathbb{R}^3$:

$$x \times y = \begin{pmatrix} x_2\,y_3 - x_3\,y_2 \\ x_3\,y_1 - x_1\,y_3 \\ x_1\,y_2 - x_2\,y_1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$$

- Norm:

$$\|x\| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2}$$

  Es gelten folgende Eigenschaften der Norm:

  1. $\|x\| \geq 0$ und $\|x\| = 0$ genau dann, wenn $x = 0$.
  2. Homogenität

$$\|c\,x\| = |c|\,\|x\|$$

3. Dreiecksungleichung
$$\|x+y\| \leq \|x\| + \|y\|$$

- $\mathbb{R}^{m\times n}$: Die Menge der reellen $m \times n$-Matrizen. $\mathbb{R}^n = \mathbb{R}^{n\times 1}$.

- Vereinbarung: Der Definitionsbereich A ist eine offene Menge, d.h. zu jedem Element von A gibt es eine Umgebung, die ebenfalls noch in A liegt. (Jedes Element von A ist ein innerer Punkt.)

  Funktionen $f\colon A \to \mathbb{R}^m$ mit Definitionsbereich $A \subset \mathbb{R}^n$.

  $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)^T \mapsto (f_1(x), f_2(x), \ldots, f_m(x))^T$. $f_j(x)$ Komponentenfunktionen.

  Vereinbarung zur Schreibweise $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$.

- Graphische Darstellung von mehrdimensionalen Funktionen.

  1. $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$: Graph, Niveaulinien in $\mathbb{R}^2$.
     Beispiel: $f(x,y) = x^2 + y^2$.
  2. $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$: Niveauflächen in $\mathbb{R}^3$.
     Beispiel: $f(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2$.
  3. $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$: (Graph,) Bildmenge als parametrisierte Kurve in $\mathbb{R}^2$.
     Beispiel: $f(t) = (\cos t, \sin t)^T$
  4. $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$: Bildmenge als parametrisierte Kurve in $\mathbb{R}^3$.
     Beispiel: $f(t) = (\cos t, \sin t, t)^T$
  5. $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$: Bildmenge als parametrisierte Oberfläche in $\mathbb{R}^3$ oder Gitterlinienbild der Bildmenge in $\mathbb{R}^3$.
     Beispiel: $f(x,y) = (x, y, \sqrt{x^2+y^2})^T$.
  6. $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ und $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$: Richtungsfeld
     Beispiel: $\vec{f}(\vec{x}) = -G\,\frac{m_1 m_2}{\|x\|^2}\,\vec{x}$

6.2 Ableitungsbegriffe

Eine direkte Übertragung des Begriffes Differenzenquotient ist nur im Spezialfall $n = 1$ möglich. Sei I ein Intervall in $\mathbb{R}$.

Definition 6.1. *Eine Funktion $f\colon I \to \mathbb{R}^m$ heißt im Punkt $x_0 \in I$ differenzierbar, falls der Grenzwert*
$$f'(x_0) = \lim_{h\to 0} \frac{1}{h}\left(f(x_0+h) - f(x_0)\right) \in \mathbb{R}^m$$
existiert. $f'(x_0)$ heißt die Ableitung von f im Punkt x_0.

Geometrische Interpretation für $m = 2$ und $m = 3$: Tangentialvektor der parametrisierten Kurve im Punkt x_0.

Für $n > 1$ ist diese Definition der Ableitung nicht möglich, da keine vernünftige Division von Vektoren zur Verfügung steht.

Definition 6.2. *Eine Funktion $f\colon A \to \mathbb{R}^m$ heißt im Punkt $x_0 \in A$ differenzierbar, falls*

$$f(x_0 + h) = f(x_0) + f'(x_0)\,h + r(h)$$

mit

$$\lim_{h\to 0} \frac{r(h)}{\|h\|} = 0$$

für eine Matrix $f'(x_0) \in \mathbb{R}^{m\times n}$.

$f'(x_0)$ ist durch diese Definition eindeutig bestimmt und heißt die Ableitung von f in x_0.

Alternative Begriffe und Schreibweisen: totale Ableitung, Fréchet-Ableitung, $Df(x_0)$.

Geometrische Interpretation für $n = 2$ und $m = 1$: Der Graph der Funktion $x \mapsto f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$ ist die Tangentialebene an den Graphen der Funktion $f(x)$ im Punkt x_0.

Definition 6.3. *Eine Funktion $f\colon A \to \mathbb{R}^m$ heißt im Punkt $x \in A$ partiell nach x_i differenzierbar, falls der Grenzwert*

$$\begin{aligned}&\frac{\partial f}{\partial x_i}(x_1, x_2, \ldots, x_n)\\ &\quad= \lim_{t\to 0} \frac{1}{t}(f(x_1, \ldots, x_{i-1}, x_i + t, x_{i+1} \ldots, x_n) - f(x_1, \ldots, x_{i-1}, x_i, x_{i+1} \ldots, x_n))\end{aligned}$$

existiert. $\frac{\partial f}{\partial x_i}(x) \in \mathbb{R}^m$ heißt die partielle Ableitung von f nach x_i in x.

Alternative Schreibweise: $f_{x_i}(x)$.

Definition 6.4. *Richtungsableitung: Sei $v \in \mathbb{R}^n$ mit $v \neq 0$.*

$$\frac{\partial f}{\partial v}(x) = \lim_{t\to 0} \frac{1}{t}(f(x + t\,v) - f(x))$$

Alternative Schreibweisen: $D_v f(x)$, $f_v(x)$.

Wie man leicht sieht, lassen sich Ableitungen komponentenweise berechnen:

$$f'(x) = \begin{pmatrix} f_1'(x) \\ f_2'(x) \\ \vdots \\ f_m'(x) \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \frac{\partial f}{\partial v}(x) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial v}(x) \\ \frac{\partial f_2}{\partial v}(x) \\ \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial v}(x) \end{pmatrix}$$

Satz 6.1. *Falls $f\colon A \to \mathbb{R}^m$ im Punkt $x_0 \in A$ differenzierbar ist, dann existieren alle Richtungsableitungen und es gilt:*

$$\frac{\partial f}{\partial v}(x_0) = f'(x_0)\, v.$$

Beweis. Wenn f im Punkt x_0 differenzierbar ist, dann gilt ($h = tv$)

$$f(x_0 + t\, v) = f(x_0) + t\, f'(x_0)v + r(t\, v)$$

und somit

$$\lim_{t\to 0}\left[\frac{1}{t}(f(x_0+t\,v) - f(x_0)) - f'(x_0)v\right] = \lim_{t\to 0}\frac{r(t\,v)}{t} = \lim_{t\to 0}\frac{r(t\,v)}{\|t\,v\|}\,\frac{|t|}{t}\,\|v\| = 0.$$

□

Damit erhält man im Speziellen (Jacobi-Matrix):

$$f'(x_0) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(x_0) & \frac{\partial f_1}{\partial x_2}(x_0) & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(x_0) \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1}(x_0) & \frac{\partial f_2}{\partial x_2}(x_0) & \dots & \frac{\partial f_2}{\partial x_n}(x_0) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1}(x_0) & \frac{\partial f_m}{\partial x_2}(x_0) & \dots & \frac{\partial f_m}{\partial x_n}(x_0) \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{m\times n}$$

und daher auch:

$$\frac{\partial f}{\partial v}(x_0) = \sum_{i=1}^{n} v_i \frac{\partial f}{\partial x_i}(x_0).$$

Für $m = 1$ erhält man:

$$f'(x_0) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x_1}(x_0) & \frac{\partial f}{\partial x_2}(x_0) & \dots & \frac{\partial f}{\partial x_n}(x_0) \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{1\times n}$$

Satz 6.2. *Falls alle partiellen Ableitungen von $f\colon A \to \mathbb{R}^m$ in einer Umgebung von $x_0 \in A$ existieren und im Punkt x_0 stetig sind, dann ist f im Punkt x_0 differenzierbar.*

Definition 6.5. *1. Für $f\colon A \to \mathbb{R}$ mit $A \subset \mathbb{R}^n$ definiert man den Gradienten durch:*

$$\operatorname{grad} f(x) = \nabla f(x) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x_1}(x) \\ \frac{\partial f}{\partial x_2}(x) \\ \vdots \\ \frac{\partial f}{\partial x_n}(x) \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$$

2. Für $\vec{f}\colon A \to \mathbb{R}^n$ mit $A \subset \mathbb{R}^n$ definiert man die Divergenz durch:

$$\operatorname{div} \vec{f}(x) = \nabla \cdot \vec{f}(x) = \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(x) + \frac{\partial f_2}{\partial x_2}(x) + \ldots + \frac{\partial f_n}{\partial x_n}(x) \in \mathbb{R}$$

3. Für $\vec{f}\colon A \to \mathbb{R}^3$ mit $A \subset \mathbb{R}^3$ definiert man die Rotation durch:

$$\operatorname{rot} \vec{f}(x) = \nabla \times \vec{f}(x) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_3}{\partial x_2}(x) - \frac{\partial f_2}{\partial x_3}(x) \\ \frac{\partial f_1}{\partial x_3}(x) - \frac{\partial f_3}{\partial x_1}(x) \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1}(x) - \frac{\partial f_1}{\partial x_2}(x) \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$$

Es gilt offensichtlich:

$$\operatorname{grad} f(x) = f'(x)^T \quad \text{und} \quad \frac{\partial f}{\partial v}(x) = v \cdot \operatorname{grad} f(x).$$

und

$$\operatorname{div} \vec{f}(x) = \operatorname{Spur} \vec{f}\,'(x), \quad \Omega(\operatorname{rot} \vec{f}(x)) = \vec{f}\,'(x) - \vec{f}\,'(x)^T$$

mit

$$\operatorname{Spur}(M) = m_{11} + m_{22} + \ldots + m_{nn} \quad \text{und} \quad \Omega(\vec{v}) = \begin{pmatrix} 0 & -v_3 & v_2 \\ v_3 & 0 & -v_1 \\ -v_2 & v_1 & 0 \end{pmatrix}$$

für eine $n \times n$-Matrix $M = (m_{ij})$ und einen Vektor $\vec{v} = (v_i) \in \mathbb{R}^3$.

6.3 Differentiationsregeln

Für differenzierbare Funktionen gelten die analogen Rechenregeln wie im Eindimensionalen.

Linearität (folgt unmittelbar aus der Definition):

Satz 6.3. *Seien $\vec{f}\colon A \to \mathbb{R}^m$ und $\vec{g}\colon A \to \mathbb{R}^m$ differenzierbar und $C \in \mathbb{R}^{p\times m}$. Dann gilt:*

$$(\vec{f}(x) + \vec{g}(x))' = \vec{f}\,'(x) + \vec{g}\,'(x)$$
$$(C\vec{f}(x))' = C\,\vec{f}\,'(x)$$

Für die Spezialfälle

$$C = c\,I, \quad C = \vec{c}^{\,T}, \quad C = \Omega(\vec{c})$$

mit $c \in \mathbb{R}$ und $\vec{c} \in \mathbb{R}^m$ erhält man damit

$$(c\,\vec{f}(x))' = c\,\vec{f}\,'(x), \quad (\vec{c} \cdot \vec{f}(x))' = \vec{c}^{\,T} \vec{f}\,'(x), \quad (\vec{c} \times \vec{f}(x))' = \Omega(\vec{c})\ \vec{f}\,'(x)$$

Produktregeln:

Satz 6.4. *Seien $f\colon A \to \mathbb{R}$, $\vec{f}\colon A \to \mathbb{R}^m$ und $\vec{g}\colon A \to \mathbb{R}^m$ differenzierbar. Dann gilt:*

$$(f(x)\,\vec{g}(x))' = \vec{g}(x)\,f'(x) + f(x)\,\vec{g}\,'(x)$$
$$(\vec{f}(x) \cdot \vec{g}(x))' = \vec{g}(x)^T\,\vec{f}\,'(x) + \vec{f}(x)^T\,\vec{g}\,'(x)$$
$$(\vec{f}(x) \times \vec{g}(x))' = -\Omega(\vec{g}(x))\,\vec{f}\,'(x) + \Omega(\vec{f}(x))\,\vec{g}\,'(x) = \Omega(\vec{g}(x))^T\,\vec{f}\,'(x) + \Omega(\vec{f}(x))\,\vec{g}\,'(x)$$

Satz 6.5 (Kettenregel)**.** *Seien* $f\colon A \longrightarrow \mathbb{R}^m$ *mit* $A \subset \mathbb{R}^n$ *und* $g\colon B \longrightarrow \mathbb{R}^p$ *mit* $f(A) \subset B \subset \mathbb{R}^m$ *differenzierbar. Dann gilt:* $g \circ f$ *ist differenzierbar und*

$$(g \circ f)'(x) = g'(f(x))\ f'(x).$$

Komponentenweise:

$$\frac{\partial (g_i \circ f)}{\partial x_j}(x_0) = \sum_{k=1}^{m} \frac{\partial g_i}{\partial y_k}(f(x_0))\, \frac{\partial f_k}{\partial x_j}(x_0)$$

Analoge Rechenregeln für grad, div und rot, z.B.:

$$\begin{aligned}
\nabla(f(x) + g(x)) &= \nabla f(x) + \nabla g(x) \\
\nabla \cdot (\vec{f}(x) + \vec{g}(x)) &= \nabla \cdot \vec{f}(x) + \nabla \cdot \vec{g}(x) \\
\nabla \times (\vec{f}(x) + \vec{g}(x)) &= \nabla \times \vec{f}(x) + \nabla \times \vec{g}(x)
\end{aligned}$$

$$\nabla(cf(x)) = c\,\nabla f(x), \quad \nabla(\vec{c} \cdot \vec{f}(x)) = \vec{f}\,'(x)^T \vec{c}$$

$$\nabla \cdot (c\vec{f}(x)) = c\,\nabla \cdot \vec{f}(x), \quad \nabla \cdot (f(x)\,\vec{c}) = \nabla f(x) \cdot \vec{c}, \quad \nabla \cdot (\vec{c} \times \vec{f}(x)) = -\vec{c} \cdot \nabla \times \vec{f}(x)$$

$$\nabla \times (c\,\vec{f}(x)) = c\,\nabla \times \vec{f}(x), \quad \nabla \times (f(x)\,\vec{c}) = \nabla f(x) \times \vec{c}, \quad \nabla \times (\vec{c} \times \vec{f}(x)) = (\nabla \cdot \vec{f}(x))\,\vec{c} - \vec{f}\,'(x)\vec{c}$$

$$\begin{aligned}
\nabla(f(x)\,g(x)) &= f(x)\,\nabla g(x) + g(x)\,\nabla f(x) \\
\nabla(\vec{f}(x) \cdot \vec{g}(x)) &= \vec{f}\,'(x)^T \vec{g}(x) + \vec{g}\,'(x)^T \vec{f}(x) \\
\nabla \cdot (f(x)\vec{g}(x)) &= \nabla\ f(x) \cdot \vec{g}(x) + f(x)\,\nabla \cdot \vec{g}(x) \\
\nabla \cdot (\vec{f}(x) \times \vec{g}(x)) &= \vec{g}(x) \cdot \nabla \times \vec{f}(x) - \vec{f}(x) \cdot \nabla \times \vec{g}(x) \\
\nabla \times (f(x)\,\vec{g}(x)) &= \nabla\ f(x) \times \vec{g}(x) + f(x)\,\nabla \times \vec{g}(x) \\
\nabla \times (\vec{f}(x) \times \vec{g}(x)) &= -(\nabla \cdot \vec{f}(x))\,\vec{g}(x) + \vec{f}\,'(x)\vec{g}(x) + (\nabla \cdot \vec{g}(x))\,\vec{f}(x) - \vec{g}\,'(x)\vec{f}(x)
\end{aligned}$$

6.4 Ableitungen höherer Ordnung und der Satz von Taylor

- Partielle Ableitungen 2. Ordnung für $f\colon A \to \mathbb{R}$ mit $A \subset \mathbb{R}^2$:

  $$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right), \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right), \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right), \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)$$

  Alternative Schreibweise: f_{xx}, f_{yy}, f_{yx}, f_{xy}.

  Nicht in allen Fällen stimmen $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$ und $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$ überein. Es gilt allerdings:

Satz 6.6 (Schwarz)**.** *Falls $f\colon A \to \mathbb{R}$ mit $A \subset \mathbb{R}^2$ die partiellen Ableitungen $\dfrac{\partial f}{\partial x}$, $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ und $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$ existieren und $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$ im Punkt (x_0, y_0) stetig ist, dann existiert auch $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x_0, y_0)$ und es gilt*

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x_0, y_0) = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_0, y_0)$$

- Hesse-Matrix:

$$H_f(x,y) = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) \\ \dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x,y) & \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) \end{pmatrix}$$

Unter den Voraussetzungen des obigen Satzes ist $H_f(x,y)$ eine symmetrische Matrix. Analoge Erweiterung für Funktionen $f\colon A \to \mathbb{R}$ mit $A \subset \mathbb{R}^n$.

$$H_f(x) = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}(x) & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2}(x) & \dots & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_n}(x) \\ \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1}(x) & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_2^2}(x) & \dots & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_n}(x) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_1}(x) & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_2}(x) & \dots & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_n^2}(x) \end{pmatrix}$$

- Laplace-Operator für Funktionen $f\colon A \to \mathbb{R}$ mit $A \subset \mathbb{R}^n$:

$$\Delta f(x) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}(x) + \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2}(x) + \ldots + \frac{\partial^2 f}{\partial x_n^2}(x)$$

Es gilt

$$\Delta f(x) = \operatorname{div}\operatorname{grad} f(x) = \nabla \cdot \nabla f(x) \quad \text{und} \quad \Delta f(x) = \operatorname{Spur} H_f(x).$$

Erweiterung auf Funktionen $f\colon A \to \mathbb{R}^m$ mit $A \subset \mathbb{R}^n$ durch komponentenweise Anwendung.

- Der Satz von Taylor für $f\colon A \to \mathbb{R}$ mit $A \subset \mathbb{R}^2$: Für

$$\varphi(t) = f(x_0 + t\,h)$$

folgt:

$$\varphi(1) = \sum_{k=0}^{n} \frac{\varphi^{(k)}(0)}{k!} + \frac{\varphi^{(n+1)}(\theta)}{(n+1)!}$$

Nun gilt:

$$\varphi(1) = f(x_0 + h), \quad \varphi(0) = f(x_0),$$

und

$$\varphi'(t) = f'(x_0 + th)h = \frac{\partial f}{\partial x_1}(x_0 + th)\, h_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2}(x_0 + th)\, h_2$$

und

$$\begin{aligned}
\varphi''(t) &= \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(x_0 + th)\right)' h_1 + \left(\frac{\partial f}{\partial x_2}(x_0 + th)\right)' h_2 \\
&= \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}(x_0 + th)\, h_1 + \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1}(x_0 + th)\, h_2\right) h_1 \\
&\quad + \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2}(x_0 + th)\, h_1 + \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2}(x_0 + th)\, h_2\right) h_2 \\
&= \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}(x_0 + th)\, h_1^2 + 2\frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2}(x_0 + th)\, h_1\, h_2 + \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2}(x_0 + th)\, h_2^2
\end{aligned}$$

Analog erhält man

$$\begin{aligned}
\varphi'''(t) &= \frac{\partial^3 f}{\partial x_1^3}(x_0 + th)\, h_1^3 + 3\frac{\partial^3 f}{\partial x_1^2 \partial x_2}(x_0 + th) h_1^2\, h_2 \\
&\quad + 3\frac{\partial^3 f}{\partial x_1 \partial x_2^2}(x_0 + th)\, h_1\, h_2^2 + \frac{\partial^3 f}{\partial x_2^3}(x_0 + th)\, h_2^3
\end{aligned}$$

u.s.w.

Allgemein gilt:

$$\varphi^{(k)}(t) = \sum_{i=0}^{k} \binom{k}{i} \frac{\partial^k}{\partial x_1^{k-i} \partial x_2^i}(x_0 + th)\, h_1^{k-i} h_2^i$$

und daher

$$\frac{\varphi^{(k)}(0)}{k!} = \sum_{i=0}^{k} \frac{1}{(k-i)!i!} \frac{\partial^k f}{\partial x_1^{k-i} \partial x_2^i}(x_0)\, h_1^{k-i} h_2^i = \sum_{\substack{i_1, i_2 \in \mathbb{N}_0 \\ i_1 + i_2 = k}} \frac{1}{(i_1)!(i_2)!} \frac{\partial^k f}{\partial x_1^{i_1} \partial x_2^{i_2}}(x_0)\, h_1^{i_1} h_2^{i_2}$$

Satz 6.7. *Sei $f\colon A \to \mathbb{R}$ mit $A \subset \mathbb{R}^2$ $(n+1)$-mal stetig differenzierbar und $x_0, h \in \mathbb{R}^n$ mit $x_0 + t\,h \in A$ für alle $t \in [0,1]$. Dann gibt es zu $x = x_0 + h$ eine Zahl $\theta \in (0,1)$, sodass:*

$$\begin{aligned}
f(x) &= \sum_{k=0}^{n} \sum_{\substack{i_1, i_2 \in \mathbb{N}_0 \\ i_1 + i_2 = k}} \frac{1}{(i_1)!(i_2)!} \frac{\partial^k f}{\partial x_1^{i_1} \partial x_2^{i_2}}(x_0)\, h_1^{i_1} h_2^{i_2} \\
&\quad + \sum_{\substack{i_1, i_2 \in \mathbb{N}_0 \\ i_1 + i_2 = n+1}} \frac{1}{(i_1)!(i_2)!} \frac{\partial^{n+1} f}{\partial x_1^{i_1} \partial x_2^{i_2}}(x_0 + \theta h)\, h_1^{i_1} h_2^{i_2}
\end{aligned}$$

Multi-Index-Schreibweise:

$$i = (i_1, i_2), \quad |i| = i_1 + i_2, \quad , i! = i_1!\, i_2!, \quad h^i = h_1^{i_1}\, h_2^{i_2}, \quad \frac{\partial^{|i|} f}{\partial x^i} = \frac{\partial^{|i|} f}{\partial x_1^{i_1} \partial x_2^{i_2}}$$

Taylor-Formel:

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \sum_{|i|=k} \frac{1}{i!} \frac{\partial^{|i|} f}{\partial x^i}(x_0)\,(x - x_0)^i + \sum_{|i|=n+1} \frac{1}{i!} \frac{\partial^{|i|} f}{\partial x^i}(x_0 + \theta\, h)\,(x - x_0)^i$$

Erweiterung für mehr als 2 Unbekannte: völlig analog.

6.5 Lokale Extrema

- Geometrische Bedeutung von $\operatorname{grad} f(x)$:

$$\frac{\partial f}{\partial v}(x) = \operatorname{grad} f(x) \cdot v$$

Also gilt für v mit $\|v\| = 1$:

$$\left| \frac{\partial f}{\partial v}(x) \right| \leq \|\operatorname{grad} f(x)\|$$

und

$$\left| \frac{\partial f}{\partial v_0}(x) \right| = \|\operatorname{grad} f(x)\| \quad \text{für } v_0 = \frac{1}{\|\operatorname{grad} f(x)\|} \operatorname{grad} f(x).$$

$\operatorname{grad} f(x)$ ist also die Richtung des steilsten Anstiegs der Funktion f im Punkt x.

- Notwendige Bedingung für ein Extremum:

Satz 6.8. *Sei $A \subset \mathbb{R}^n$ eine offene Menge und $f\colon A \longrightarrow \mathbb{R}$. Sei $x_0 \in A$ und f ist in diesem Punkt differenzierbar. Dann gilt: Falls x_0 ein lokales Extremum ist, folgt*

$$\operatorname{grad} f(x_0) = 0$$

Beweis. Wie in $\mathbb{R}$ folgt:

$$\frac{\partial f}{\partial v}(x_0) = 0 \quad \text{für alle Richtungen } v \in \mathbb{R}^n$$

Aus

$$\frac{\partial f}{\partial v}(x_0) = \operatorname{grad} f(x_0) \cdot v$$

folgt die Behauptung. □

- Hinreichende Bedingung für ein lokales Extremum:

  Satz 6.9. *Sei $A \subset \mathbb{R}^n$ eine offene Menge, $f\colon I \longrightarrow \mathbb{R}$ sei 2 mal stetig differenzierbar. Sei $x_0 \in A$ mit*

  $$\operatorname{grad} f(x_0) = 0 \quad \textit{und} \quad H_f(x_0) \textit{ ist positiv (negativ) definit.}$$

  Dann ist x_0 ein lokales Minimum (Maximum).

  Beweis. Wir führen der Einfachheit halber den Beweis nur für $n = 2$. (Der allgemeine Fall wird völlig analog bewiesen.) Aus dem Satz von Taylor erhält man

  $$\begin{aligned} f(x_0 + h) &= f(x_0) + \frac{\partial f}{\partial x_1}(x_0)\, h_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2}(x_0)\, h_2 \\ &\quad + \frac{1}{2!}\left[\frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}(x_0 + \theta\, h)\, h_1^2 + 2\frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2}(x_0 + \theta\, h)\, h_1\, h_2 + \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2}(x_0 + \theta\, h)\, h_2^2\right] \\ &= f(x_0) + \nabla f(x_0) \cdot h + \frac{1}{2}\, h^T H_f(x_0 + \theta\, h) h \end{aligned}$$

  Da f 2-mal stetig differenzierbar ist und $H_f(x_0)$ positiv definit ist, ist auch $H_f(x)$ in einer Umgebung von x_0 positiv definit. Dann gilt für $x \neq x_0$:

  $$f(x) = f(x_0) + \underbrace{\nabla f(x_0)}_{=0} \cdot h + \frac{1}{2} \underbrace{h^T H_f(x_0 + \theta\, h) h}_{>0} > f(x_0).$$

  □

  Nachtrag: Sei $M \in \mathbb{R}^{n\times n}$ eine symmetrische Matrix. Dann heißt M positiv definit, wenn

  $$x^T M x > 0 \quad \text{für alle } x \in \mathbb{R}^n \text{ mit } x \neq 0.$$

  Fall $n = 2$:

  $$M = \begin{pmatrix} m_{11} & m_{12} \\ m_{21} & m_{22} \end{pmatrix} \quad \text{mit} \quad m_{21} = m_{12}.$$

  $$x^T M x = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} m_{11} & m_{12} \\ m_{21} & m_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = m_{11}\, x_1^2 + 2m_{12}\, x_1 x_2 + m_{22}\, x_2^2$$

  Für $x_2 = 0$ muss $x_1 \neq 0$ gelten und man erhält die Bedingung

  $$m_{11}\, x_1^2 > 0, \quad \text{also} \quad m_{11} > 0.$$

  Für $x_2 \neq 0$ erhält man nach Division durch x_2^2 die Bedingung

  $$m_{11}\left(\frac{x_1}{x_2}\right)^2 + 2m_{12}\left(\frac{x_1}{x_2}\right) + m_{22} > 0$$

Das ist genau dann der Fall, wenn die quadratische Gleichung

$$m_{11}\, z^2 + 2m_{12}\, z + m_{22} > 0$$

keine reelle Nullstelle besitzt, also wenn

$$4m_{12}^2 - 4m_{11}\, m_{22} < 0, \quad \text{also} \quad m_{11}m_{22} - m_{21}m_{12} > 0.$$

M ist also genau dann positiv definit, wenn

$$m_{11} > 0 \quad \text{und} \qquad m_{11}m_{22} - m_{21}m_{12} > 0$$

Völlig analog folgt: M ist also genau dann negativ definit, wenn

$$m_{11} < 0 \quad \text{und} \qquad m_{11}m_{22} - m_{21}m_{12} > 0$$

Kapitel 7

Mehrdimensionale Integralrechnung

7.1 Einfachintegrale

Der Begriff Stammfunktion macht zunächst nur für $n = 1$ Sinn:

Definition 7.1. *Sei $I \subset \mathbb{R}$ ein Intervall und seien $f\colon I \to \mathbb{R}^m$ und $F\colon I \to \mathbb{R}^m$ Funktionen. F heißt Stammfunktion (unbestimmtes Integral) von $f \iff F$ ist differenzierbar und $F' = f$.*

- Schreibweise: $\int f(x)\ dx = F(x) + C$.
- Man sieht sofort:

$$\int f(x)\ dx = \left(\int f_1(x)\ dx, \int f_2(x)\ dx, \ldots, \int f_m(x)\ dx\right)^T$$

Analog lässt sich das bestimmtes Integral für $n = 1$ über Riemann-Summen einführen und komponentenweise berechnen.

$$\int_a^b f(x)\ dx = \left(\int_a^b f_1(x)\ dx, \int_a^b f_2(x)\ dx, \ldots, \int_a^b f_m(x)\ dx\right)^T$$

7.1.1 Kurven in $\mathbb{R}^n$

Definition 7.2. *Eine stetige Funktion $\gamma\colon [a,b] \to \mathbb{R}^n$ heißt Parameterdarstellung einer Kurve C in $\mathbb{R}^n$ mit Anfangspunkt $\gamma(a)$ und Endpunkt $\gamma(b)$.*

Ist γ differenzierbar und gilt $\gamma'(t) \neq 0$, dann lässt sich $\gamma'(t) \in \mathbb{R}^n$ als Tangentenvektor an die Kurve C im Punkt $\gamma(t) \in \mathbb{R}^n$ interpretieren.

Definition 7.3. *Für $\gamma_1\colon [a,b] \to \mathbb{R}^n$ und $\gamma_2\colon [c,d] \to \mathbb{R}^n$ gelte:*

$$\gamma_2(s) = \gamma_1(\phi(s)) \quad \textit{für alle } s \in [c,d]$$

mit einer stetigen und streng monoton wachsenden Funktion $\phi\colon [c,d] \to [a,b]$ mit $\phi(c) = a$ und $\phi(d) = b$. Dann heißen γ_1 und γ_2 äquivalente Parameterdarstellungen (der gleichen Kurve C).

Interpretation: Eine Kurve in $\mathbb{R}^n$ besteht aus einer Teilmenge aus $\mathbb{R}^n$, der Bildmenge einer konkreten Parameterdarstellung (der vielen möglichen Parameterdarstellungen) und einem Durchlaufsinn, ausgedrückt durch eine konkrete Parameterdarstellung (der vielen möglichen äquivalenten Parameterdarstellungen).

- Eine Kurve heißt stetig differenzierbar, wenn es eine Parameterdarstellung $\gamma\colon [a,b] \to \mathbb{R}^n$ gibt, die stetig differenzierbar ist.

- Stimmt der Anfangspunkt mit dem Endpunkt übereinstimmen, spricht man von einer geschlossenen Kurve.

- Sei C eine Kurve. Dann bezeichnet $-C$ die Kurve mit entgegengesetztem Durchlaufsinn: Wenn $\gamma\colon [a,b] \to \mathbb{R}^n$ eine Parameterdarstellung der Kurve C ist, dann ist $\bar{\gamma}\colon [a,b] \to \mathbb{R}^n$ mit
$$\bar{\gamma}(t) = \gamma(b + a - t)$$
eine Parameterdarstellung der Kurve $-C$.

- Stimmt der Endpunkt der Kurve C_1 mit dem Anfangspunkt der Kurve C_2 zusammen, so lässt sich in natürlicher Weise die Kurve $C_1 + C_2$ bilden. Wenn $\gamma_1\colon [a,b] \to \mathbb{R}^n$ bzw. $\gamma_2\colon [c,d] \to \mathbb{R}^n$ Parameterdarstellungen der Kurve C_1 bzw. C_2 sind, dann ist $\gamma\colon [a, b+d-c] \to \mathbb{R}^n$ mit
$$\gamma(t) = \begin{cases} \gamma_1(t) & \text{für } t \in [a,b] \\ \gamma_2(t - b + c) & \text{für } t \in [b, b+d-c] \end{cases}$$
eine Parameterdarstellung der Kurve $C_1 + C_2$.

- Eine Kurve C heißt stückweise stetig differenzierbar, wenn sie sich als endliche Summe von stetig differenzierbaren Kurven darstellen lässt.

Beispiele:

- Kreis: $\gamma\colon [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^2$, $t \mapsto (\cos t, \sin t)^T$

- Parabel: Graph der Funktion $f\colon [-1,1] \to \mathbb{R}$, $x \mapsto x^2$: $\gamma\colon [-1,1] \to \mathbb{R}^2$, $t \mapsto (t, t^2)^T$.

- Graph der Funktion $f\colon [-1,1] \to \mathbb{R}$, $x \mapsto x^2$, gespiegelt um die erste Mediane: $\gamma\colon [-1,1] \to \mathbb{R}^2$, $t \mapsto (t^2, t)^T$.

- Rand des Quadrates $[0,1] \times [0,1]$: $C = C_1 + C_2 + C_3 + C_4$ mit den Parameterdarstellungen $\gamma_1\colon [0,1] \to \mathbb{R}^2$, $t \mapsto (t,0)^T$, $\gamma_2\colon [0,1] \to \mathbb{R}^2$, $t \mapsto (1,t)^T$, $\gamma_3\colon [0,1] \to \mathbb{R}^2$, $t \mapsto (1-t,1)^T$, $\gamma_4\colon [0,1] \to \mathbb{R}^2$, $t \mapsto (0, 1-t)^T$,

7.1.2 Kurvenintegrale

Seien $\gamma\colon [a,b] \to \mathbb{R}^n$ stetig differenzierbar und $f\colon A \to \mathbb{R}^m$ mit $A \subset \mathbb{R}^n$ eine Funktion mit $\gamma([a,b]) \subset A$.

- Wir zerlegen das Intervall $[a,b]$ in K Teilintervalle

$$a = t_0 < t_1 < \ldots < t_{K-1} < t_K = b.$$

- Länge des Teilintervalls $[t_{k-1}, t_k]$: $\Delta t_k = t_k - t_{k-1}$.
- Zwischenpunkte: $\xi = (\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_K)$ mit $\xi_k \in [t_{k-1}, t_k]$, hier wählen wir $\xi_k = t_{k-1}$.
- Riemann-Summe:

$$\begin{aligned}
&\sum_{k=1}^{N} f(\gamma(t_{k-1}))\, \|\gamma(t_k) - \gamma(t_{k-1})\| \\
&\qquad \approx \sum_{k=1}^{N} f(\gamma(t_{k-1}))\, \|\gamma'(t_{k-1})(t_k - t_{k-1})\| = \sum_{k=1}^{N} f(\gamma(t_{k-1}))\, \|\gamma'(t_{k-1})\|\, \Delta t_k
\end{aligned}$$

Der letzte Ausdruck ist eine Riemann-Summe der reellen Funktion $(f \circ \gamma)\, \|\gamma'\|$. Das motiviert die folgende Definition:

Definition 7.4. *Sei $\gamma\colon [a,b] \to \mathbb{R}^n$ eine stetig differenzierbare Parameterdarstellung einer Kurve C in $\mathbb{R}^n$ und $f\colon A \to \mathbb{R}^m$ mit $\gamma([a,b]) \subset A \subset \mathbb{R}^n$ auf $\gamma([a,b])$ stetig. Dann heißt*

$$\int_C f(x)\; ds = \int_a^b f(\gamma(t))\, \|\gamma'(t)\|\; dt$$

das Kurvenintegral (Linienintegral) von f entlang der Kurve C.

Erweiterung auf stückweise stetig differenzierbare Kurven $C = \sum_{i=1}^{k} C_i$:

$$\int_C f(x)\; ds = \sum_{i=1}^{k} \int_{C_i} f(x)\; ds.$$

Alternative Schreibweise für geschlossene Kurven:

$$\oint_C f\, ds$$

Unabhängigkeit von der Parametrisierung

Für $\gamma_1\colon [a,b] \to \mathbb{R}^n$ und $\gamma_2\colon [c,d] \to \mathbb{R}^n$ gelte:

$$\gamma_2(s) = \gamma_1(\phi(s)) \quad \text{für alle } s \in [c,d]$$

mit einer differenzierbaren und streng monoton wachsenden Funktion $\phi\colon [c,d] \to [a,b]$ mit $\phi(c) = a$ und $\phi(d) = b$. Dann gilt:

$$\begin{aligned}
&\int_a^b f(\gamma_1(t))\,\|\gamma_1'(t)\|\;dt = \int_{\phi(c)}^{\phi(d)} f(\gamma_1(t))\,\|\gamma_1'(t)\|\;dt \\
&\quad= \int_c^d f(\gamma_1(\phi(s)))\,\|\gamma_1'(\phi(s))\|\,\phi'(s)\;ds = \int_c^d f(\gamma_1(\phi(s)))\,\|\gamma_1'(\phi(s))\,\phi'(s)\|\;ds \\
&\quad= \int_c^d f(\gamma_2(s))\,\|\gamma_2'(s)\|\;ds
\end{aligned}$$

- Bogenlänge einer Kurve:

  $$|C| = \int_C 1\;ds = \int_a^b \|\gamma'(t)\|\;dt$$

  Beispiel: Kreis

  $$|C| = \int_0^{2\pi} \|\gamma'(t)\|\;dt = \int_0^{2\pi} 1\;dt = 2\pi$$

  Beispiel: Parabel

  $$\begin{aligned}
  |C| &= \int_{-1}^{1} \|\gamma'(t)\|\;dt = \int_{-1}^{1} \sqrt{1+4t^2}\;dt = \frac{1}{2}\int_{-2}^{2} \sqrt{1+u^2}\;du = \int_0^2 \sqrt{1+u^2}\;du \\
  &= \frac{1}{2}\left(\operatorname{arsinh} u + u\sqrt{1+u^2}\right)\Big|_0^2 = \frac{1}{2}\left(\operatorname{arsinh} 2 + 2\sqrt{5}\right) = \frac{1}{2}\ln(2+\sqrt{5}) + \sqrt{5}
  \end{aligned}$$

- Komponentenweise Berechnung:

  $$\int_C f(x)\;ds = \left(\int_C f_1(x)\;ds, \int_C f_2(x)\;ds, \ldots, \int_C f_m(x)\;ds\right)^T$$

Seien $\gamma\colon [a,b] \to \mathbb{R}^n$ stetig differenzierbar und $f\colon A \to \mathbb{R}^n$ mit $A \subset \mathbb{R}^n$ eine vektorwertige Funktion mit $\gamma([a,b]) \subset A$.

Mit den Bezeichnungen von vorhin bilden wir folgende Riemann-Summe:

$$\begin{aligned}
&\sum_{k=1}^{N} f(\gamma(t_{k-1})) \cdot (\gamma(t_k) - \gamma(t_{k-1})) \\
&\qquad\approx \sum_{k=1}^{N} f(\gamma(t_{k-1})) \cdot (\gamma'(t_{k-1})(t_k - t_{k-1})) = \sum_{k=1}^{N} f(\gamma(t_{k-1})) \cdot \gamma'(t_{k-1})\,\Delta t_k
\end{aligned}$$

Der letzte Ausdruck ist eine Riemann-Summe der reellen Funktion $(f \circ \gamma) \cdot \gamma'$. Das motiviert die folgende Definition:

Definition 7.5. *Sei $\gamma\colon [a,b] \to \mathbb{R}^n$ eine stetig differenzierbare Parameterdarstellung einer Kurve C in $\mathbb{R}^n$ und $f\colon A \to \mathbb{R}^n$ mit $\gamma([a,b]) \subset A \subset \mathbb{R}^n$ auf $\gamma([a,b])$ stetig. Dann heißt*

$$\int_C f(x) \cdot dx = \int_a^b f(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t)\ dt$$

das Kurvenintegral (Linienintegral) von f entlang der Kurve C.

Erweiterung auf stückweise stetig differenzierbare Kurven $C = \sum_{i=1}^k C_i$:

$$\int_C f(x) \cdot dx = \sum_{i=1}^k \int_{C_i} f(x) \cdot dx.$$

- Alternative Schreibweise:

$$\int_C (f_1\ dx_1 + f_2\ dx_2 + \ldots + f_n\, dx_n)$$

- Alternative Schreibweisen für geschlossene Kurven:

$$\oint_C f \cdot dx \quad \text{oder} \quad \oint_C (f_1\ dx_1 + f_2\ dx_2 + \ldots + f_n\, dx_n)$$

- Wie vorhin folgt die Unabhängigkeit des Integrals von der Parametrisierung.
- Verrichtete Arbeit entlang eines Weges

  Beispiel: Gravitationskraft, die eine Punktmasse mit Masse m_1 im Ursprung auf eine Punktmasse mit Masse m_2 im Punkt $\vec{x}$ ausübt:

$$\vec{F}(\vec{x}) = -G\,\frac{m_1\,m_2}{r^2}\,\frac{\vec{x}}{r} \quad \text{mit } r = \|\vec{x}\|$$

  Die Punktmasse mit Masse m_2 wird entlang der Kurve C $\vec{\gamma}\colon [0,2\pi] \to \mathbb{R}^3$, $t \mapsto (1+t, \cos t, \sin t)^T$ bewegt. Dazu ist folgende Arbeit notwendig:

$$\begin{aligned} W &= -\int_C \vec{F}(\vec{x}) \cdot d\vec{x} = -\int_0^{2\pi} \vec{F}(\vec{\gamma}(t)) \cdot \vec{\gamma}\,'(t)\, dt = G\, m_1 m_2 \int_0^{2\pi} \frac{\vec{\gamma(t)} \cdot \vec{\gamma}\,'(t)}{\|\gamma(t)\|^3}\ dt \\ &= G\, m_1 m_2 \int_0^{2\pi} \frac{1+t}{((1+t)^2+1)^{3/2}}\ dt = G\, m_1 m_2\, \frac{1}{2} \int_2^{(1+2\pi)^2+1} \frac{1}{u^{3/2}}\ du \\ &= -G\, m_1 m_2\, \frac{1}{\sqrt{u}}\bigg|_2^{(1+2\pi)^2+1} = -G\, m_1 m_2 \left(\frac{1}{\sqrt{(1+2\pi)^2+1}} - \frac{1}{\sqrt{2}} \right) \end{aligned}$$

Die Rechenregeln der eindimensionalen Integralrechnung lassen sich auf Kurvenintegrale leicht übertragen.

Satz 7.1. *Sei C eine stückweise stetig differenzierbare Kurve in $\mathbb{R}^n$. Seien C_1 und C_2 stückweise stetig differenzierbare Kurven, der Endpunkt von C_1 sei der Anfangspunkt von C_2. Dann gilt für alle $c \in \mathbb{R}$ und alle Funktionen f und g, die auf den jeweiligen Kurven stetig sind:*

$$\begin{aligned}
\int_C (c\, f(x))\ ds &= c \int_C f(x)\ ds \\
\int_C (f(x)+g(x))\ ds &= \int_C f(x)\ ds + \int_C g(x)\ ds \\
\int_{-C} f(x)\ ds &= \int_C f(x)\ ds \\
\int_{C_1+C_2} f(x)\ ds &= \int_{C_1} f(x)\ ds + \int_{C_2} f(x)\ ds
\end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned}
\int_C (c\, f(x)) \cdot dx &= c \int_C f(x) \cdot dx \\
\int_C (f(x)+g(x)) \cdot dx &= \int_C f(x) \cdot dx + \int_C g(x) \cdot dx \\
\int_{-C} f(x) \cdot dx &= -\int_C f(x) \cdot dx \\
\int_{C_1+C_2} f(x) \cdot dx &= \int_{C_1} f(x) \cdot dx + \int_{C_2} f(x) \cdot dx
\end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned}
\left\| \int_C f(x)\ ds \right\| &\leq \max\{\|f(x)\| : x \in C\}\, |C| \\
\left| \int_C f(x) \cdot dx \right| &\leq \max\{\|f(x)\| : x \in C\}\, |C|
\end{aligned}$$

7.1.3 Wegunabhängigkeit

Definition 7.6. *Eine vektorwertige Funktion (Vektorfeld) $f\colon A \to \mathbb{R}^n$ mit $A \subset \mathbb{R}^n$ heißt ein Gradientenfeld (Potentialfeld), falls es eine skalare Funktion $\phi\colon A \to \mathbb{R}$ gibt, sodass $f = \operatorname{grad}\phi$. ϕ heißt Stammfunktion von f, $-\phi$ heißt das Potential von f.*

- Beispiel: Gravitationsfeld

$$\vec{F}(\vec{x}) = -G\, \frac{m_1\, m_2}{r^2}\, \frac{\vec{x}}{r} \quad \text{mit } r = \|\vec{x}\|$$

Es gilt für $x \neq 0$ und $r = \|x\| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2}$:

$$\operatorname{grad} r = \frac{1}{r}\,\vec{x} \quad \text{und daher} \quad \operatorname{grad}\frac{1}{r} = -\frac{1}{r^3}\,\vec{x}$$

Also

$$\vec{F}(\vec{x}) = -\operatorname{grad} U(\vec{x}) \quad \text{mit} \quad U(\vec{x}) = -G\,\frac{m_1\,m_2}{r}$$

Satz 7.2. *Sei $f\colon A \to \mathbb{R}^n$ mit $A \subset \mathbb{R}^n$ ein Gradientenfeld mit einer stetig differenzierbaren Stammfunktion $\phi\colon A \to \mathbb{R}$. Dann gilt für jede stückweise stetig differenzierbare Kurve C in A mit Anfangspunkt γ_a und Endpunkt γ_b:*

$$\int_C f(x) \cdot dx = \phi(\gamma_b) - \phi(\gamma_a)$$

Beweis. Es genügt, den Beweis für stetig differenzierbare Kurven zu führen:

$$\begin{aligned}\int_C f(x) \cdot dx &= \int_a^b f(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t)\ dt = \int_a^b \operatorname{grad}\phi(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t)\ dt = \int_a^b \phi'(\gamma(t))\gamma'(t)\ dt \\ &= \int_a^b [\phi(\gamma(t))]'\ dt = \phi(\gamma(b)) - \phi(\gamma(a)) = \phi(\gamma_b) - \phi(\gamma_a)\end{aligned}$$

□

- Formulierung als Integralsatz:

$$\int_C \operatorname{grad}\phi(x) \cdot dx = \phi(\gamma_b) - \phi(\gamma_a)$$

  Das rechtfertigt den Namen Stammfunktion.

Definition 7.7. *Eine Menge $A \subset \mathbb{R}^n$ heißt ein Gebiet, wenn*

1. *sie offen und*
2. *sie im folgenden Sinn zusammenhängend ist: Je zwei beliebige Punkte aus A lassen sich durch eine stückweise stetig differenzierbare Kurve in A verbinden.*

Definition 7.8. *Sei $A \subset \mathbb{R}^n$ ein Gebiet und $f\colon A \to \mathbb{R}^n$ stetig. Dann heißt f konservativ, wenn für alle Punkte $\gamma_a,\ \gamma_b \in A$ und für alle stückweise stetig differenzierbare Kurven C_1 und C_2 mit Anfangspunkt γ_a und Endpunkt γ_b gilt:*

$$\int_{C_1} f(x) \cdot dx = \int_{C_2} f(x) \cdot dx$$

- Alternative Schreibweise für das Kurvenintegral, falls f konservativ ist:

$$\int_C f(x) \cdot dx = \int_{\gamma_a}^{\gamma_b} f(x) \cdot dx.$$

- Man sieht sofort, dass f genau dann konservativ ist, wenn

$$\oint_C f(x) \cdot dx = 0$$

für alle geschlossenen stückweise stetigen Kurven C in A.

Satz 7.3. *Sei A ein Gebiet und $f\colon A \to \mathbb{R}^n$ stetig. Dann gilt:*

1. *Wenn f ein Gradientenfeld ist, dann ist f konservativ.*
2. *Wenn f konservativ ist, dann ist f ein Gradientenfeld mit der Stammfunktion*

$$\phi(y) = \int_a^y f(x) \cdot dx,$$

wobei $a \in A$ ein beliebiger aber fester Punkt ist.

Beweis. Der erste Teil folgt aus dem letzten Satz.

Zum zweiten Teil: Seien $y \in A$ und $h \in \mathbb{R}^n$, sodass die Gerade C mit der Parameterdarstellung $\gamma(t) = y + th$ für alle $t \in [0,1]$ in A liegt. Dann gilt

$$\phi(y+h) = \phi(y) + f(y)^T h + r(h)$$

mit

$$\begin{aligned} r(h) &= \int_a^{y+h} f(x) \cdot dx - \int_a^y f(x) \cdot dx - f(y)^T h = \int_C f(x) \cdot dx - \int_C f(y) \cdot dx \\ &= \int_C (f(x) - f(y)) \cdot dx. \end{aligned}$$

Also:

$$|r(h)| = \left| \int_C (f(x) - f(y)) \cdot dx \right| \le \max\{\|f(y+th) - f(y)\| \colon t \in [0,1]\} \, \|h\|.$$

Wegen der Stetigkeit von f folgt

$$\frac{1}{\|h\|} |r(h)| \le \max\{\|f(y+th) - f(y)\| \colon t \in [0,1]\} \to 0 \quad \text{für } h \to 0.$$

Das bedeutet: $f(y)^T = \phi'(y)$, also $\operatorname{grad} \phi(y) = f(y)$. □

Satz 7.4. *Sei $A \subset \mathbb{R}^n$ ein Gebiet und sei $f\colon A \to \mathbb{R}^n$ stetig differenzierbar. Dann gilt:*

1. *Ist f ein Gradientenfeld, dann gilt für die Komponentenfunktionen f_i:*

$$\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(x) = \frac{\partial f_j}{\partial x_i}(x) \tag{7.1}$$

für alle $i, j = 1, 2, \ldots, n$.

2. *Ist A zusätzlich konvex und gilt* (7.1)*, dann ist f ein Gradientenfeld.*

Beweis. Zu 1.:

$$\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(x) = \frac{\partial}{\partial x_j}\left(\frac{\partial \phi}{\partial x_i}\right)(x) = \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{\partial \phi}{\partial x_j}\right)(x) = \frac{\partial f_j}{\partial x_i}(x)$$

Zu 2.: Sei $a \in A$ fest und sei C_x die Gerade zwischen a und x mit der Parameterdarstellung $\gamma_x \colon [0,1] \to \mathbb{R}^n$ mit $\gamma_x(t) = a + t(x-a)$.

Wir zeigen, dass

$$\phi(x) = \int_{C_x} f(y) \cdot dy = \int_0^1 f(a + t(x-a)) \cdot (x-a)\; dt$$

eine Stammfunktion von f ist:

$$\begin{aligned} \operatorname{grad} \phi(x) &= \operatorname{grad}\left(\int_0^1 f(a+t(x-a)) \cdot (x-a)\; dt\right) \\ &= \int_0^1 \operatorname{grad}\big(f(a+t(x-a)) \cdot (x-a)\big)\; dt \end{aligned}$$

Nun gilt

$$\begin{aligned} &\operatorname{grad}\big(f(a+t(x-a)) \cdot (x-a)\big) = \Big[\big(f(a+t(x-a))\big)'\Big]^T (x-a) + I\, f(a+t(x-a)) \\ &= f(a+t(x-a)) + \Big[f'(a+t(x-a))\,(t\, I)\Big]^T (x-a) \\ &= f(a+t(x-a)) + t\, f'(a+t(x-a))^T (x-a) \\ &= f(a+t(x-a)) + t\, f'(a+t(x-a))(x-a) = \frac{d}{dt}\Big(t\, f(a+t(x-a))\Big) \end{aligned}$$

Also

$$\operatorname{grad}\phi(x) = \int_0^1 \frac{d}{dt}\Big(t\, f(a+t(x-a))\Big)\; dt = \Big(t\, f(a+t(x-a))\Big)\Big|_0^1 = f(x)$$

□

- Die Bedingung (7.1) nennt man Integrabilitätsbedingung.
- Dieser Satz bietet ein einfach zu überprüfendes Kriterium, um zu überprüfen, ob ein Vektorfeld konservativ bzw. ein Gradientenfeld ist.
- (7.1) $\Leftrightarrow$ $f'(x)$ ist symmetrisch.
- Für $n = 3$: (7.1) $\Leftrightarrow$ $\operatorname{rot} f(x) = 0$.

- Sei der Einfachheit halber $n = 2$: Für ein konservatives Vektorfeld kann man jeden Weg zwischen $\gamma_a = (a_1, a_2)^T$ und $\gamma_b = (b_1, b_2)^T$ wählen, z.B. auch einen stückweise geraden Weg parallel zu den Koordinatenachsen, sofern man den Definitionsbereich A nicht verlässt: $C = C_1 + C_2$ mit $\gamma_1 \colon [0, 1] \to \mathbb{R}^2$, $\gamma_1(t) = (a_1 + t(b_1 - a_1), a_2)^T$ und $\gamma_2 \colon [0, 1] \to \mathbb{R}^2$, $\gamma_1(t) = (b_1, a_2 + t(b_2 - a_2))^T$. Dann erhält man:

$$\begin{aligned}
&\int_{\gamma_a}^{\gamma_b} f(x) \cdot dx \\
&\quad = \int_0^1 f_1(a_1 + t(b_1 - a_1), a_2)(b_1 - a_1)\ dt + \int_0^1 f_2(b_1, a_2 + t(b_2 - a_2))(b_2 - a_2)\ dt \\
&\quad = \int_{a_1}^{b_1} f_1(x_1, a_2)\ dx_1 + \int_{a_2}^{b_2} f_2(b_1, x_2)\ dx_2
\end{aligned}$$

- Aus dem Beweis des letzten Satzes erkennt man, dass es ausreicht, wenn es einen Punkt $a \in A$ gibt, sodass $a + t(x - a) \in A$ für alle $x \in A$ und alle $t \in [0, 1]$. Solche Gebiete nennt man sternförmig.

- Die Aussagen des letzten Satzes lassen sich auf so genannte einfach zusammenhängende Gebiete erweitern. Ein Gebiet A heißt einfach zusammenhängend, wenn sich jede geschlossene Kurve in A auf einen Punkt zusammenziehen lässt.

7.2 Mehrfachintegrale

Sei $f \colon I \to \mathbb{R}$ eine Funktion auf dem Intervall $I = [a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \subset \mathbb{R}^2$.

- Durch Zerlegungen $Z_1 = \{x_0, x_1, \dots, x_M\}$ von $[a_1, b_1]$ und $Z_2 = \{y_0, y_1, \dots, y_N\}$ von $[a_2, b_2]$ wird das Intervall I in Teilintervalle I_{kl} unterteilt.

  $Z = Z_1 \times Z_2$ heißt Zerlegung von I.

- Länge der Teilintervalle $[x_{k-1}, x_k]$ und $[y_{l-1}, y_l]$: $\Delta x_k = x_k - x_{k-1}$ und $\Delta y_l = y_l - y_{l-1}$.

  Fläche der Teilintervalle I_{kl}: $\Delta x_k \, \Delta y_l$

- Feinheit der Zerlegungen $h_1 = \max\{\Delta x_k \colon k = 1, 2, \dots, M\}$ und $h_2 = \max\{\Delta y_l \colon l = 1, 2, \dots, N\}$.

  Feinheit der Zerlegung Z: $h = \max(h_1, h_2)$

- Zwischenpunkte: $\zeta = (\zeta_{kl})_{k=1,\dots,M, l=1,\dots,N}$ mit $\zeta_{kl} = (\xi_{kl}, \eta_{kl}) \in I_{kl}$.

- Riemann-Summe:
$$S(f, Z, \zeta) = \sum_{k,l} f(\zeta_{kl})\, \Delta x_k \, \Delta y_l.$$

Definition 7.9. *Eine Funktion $f\colon I \to \mathbb{R}$ heißt genau dann Riemann-integrierbar (kurz R-integrierbar), wenn der Grenzwert*

$$\lim_{h\to 0} S(f,Z,\zeta) = \lim_{h\to 0} \sum_{k,l} f(\zeta_{kl})\,\Delta x_k\,\Delta y_l = \int_I f(x,y)\;d(x,y)$$

existiert.

- Völlig analog definiert man

  $$\int_I f(x,y,z)\;d(x,y,z)$$

  und allgemein

  $$\int_I f(x_1,x_2,\ldots,x_n)\;d(x_1,x_2,\ldots.x_n) \quad \text{oder kurz} \quad \int_I f(x)\;dx$$

- Erweiterung auf Funktionen $f\colon A \to \mathbb{R}$ für allgemeinere beschränkte Definitionsbereiche $A \subset \mathbb{R}^n$: Sei $I \subset \mathbb{R}^n$ ein Intervall mit $A \subset I$. Sei $f_I\colon I \to \mathbb{R}$ die triviale Erweiterung von f auf I:

  $$f_I(x) = \begin{cases} f(x) & \text{für } x \in A, \\ 0 & \text{für } x \in I \setminus A. \end{cases}$$

  Falls f_I Riemann-integrierbar ist, definiert man:

  $$\int_A f(x)\;dx = \int_I f_I(x)\;dx$$

  Das Integral $\int_A f(x)\;dx$ hängt nicht von der speziellen Wahl von I ab.

- Sei $A \subset \mathbb{R}^n$ beschränkt. Die charakteristische Funktion $i_A\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ ist durch

  $$i_A(x) = \begin{cases} 1 & \text{für } x \in A, \\ 0 & \text{für } x \in \mathbb{R}^n \setminus A. \end{cases}$$

  gegeben. Falls i_A R-integrierbar ist, heißt A Jordan-messbar. Dann ist

  $$|A| = \int_A i_A\;dx = \int_A 1\;dx$$

  wohldefiniert und heißt Jordan-Maß von A. Im Speziellen erhält man für $n = 2$ den Flächeninhalt von A und für $n = 3$ das Volumen von A.

- Erweiterung auf unbeschränkte Funktionen und/oder unbeschränkte Definitionsbereiche durch Grenzwert: uneigentliche Integrale

Die Sätze 3.4 und 3.5 gelten auch analog für Mehrfachintegrale.

7.2.1 Der Satz von Fubini

Satz 7.5 (Satz von Fubini)**.** *Seien $I, J \subset \mathbb{R}$ beschränkte abgeschlossene Intervalle und sei $f\colon I \times J \to \mathbb{R}$ R-integrierbar.*

1. *Falls $f(.,y)\colon I \to \mathbb{R}$, $x \mapsto f(x,y)$ für alle $y \in J$ R-integrierbar ist, dann ist die Abbildung $y \mapsto \int_I f(x,y)\, dx$ R-integrierbar und es gilt:*

$$\int_{I\times J} f(x,y)\; d(x,y) = \int_J \left(\int_I f(x,y)\; dx\right)\; dy.$$

2. *Falls $f(x,.)\colon J \to \mathbb{R}$, $y \mapsto f(x,y)$ für alle $x \in I$ R-integrierbar ist, dann ist die Abbildung $x \mapsto \int_J f(x,y)\, dy$ R-integrierbar und es gilt:*

$$\int_{I\times J} f(x,y)\; d(x,y) = \int_I \left(\int_J f(x,y)\; dy\right)\; dx.$$

Beweis. Es gilt

$$S(f,Z,\zeta) = \sum_{k,l} f(\zeta_{kl})\,\Delta x_k\,\Delta y_l = \sum_l \left(\sum_k f(\zeta_{kl})\,\Delta x_k\right)\,\Delta y_l = \sum_k \left(\sum_l f(\zeta_{kl})\,\Delta y_l\right)\,\Delta x_k.$$

Durch Grenzübergang folgt dann die Behauptung. □

- Die Integrale

$$\int_J \left(\int_I f(x,y)\; dx\right)\; dy \quad \text{und} \quad \int_I \left(\int_J f(x,y)\; dy\right)\; dx$$

  heißen iterierte Integrale. Die Existenz der iterierten Integrale reicht nicht aus. Zusätzlich muss f R-integrierbar sein. Hinreichend: f ist stetig.

- Die Aussagen des Satzes von Fubini gelten analog für Jordan-messbare Integrationsbereiche A und sie lassen sich auf beliebige Mehrfachintegrale erweitern.

- Beispiel: Flächeninhalt eines Kreises $A = \{(x,y)^T \in \mathbb{R}^2\colon x^2 + y^2 \le R^2\}$.

  Die charakteristische Funktion von A ist fast überall stetig, daher ist sie R-integrierbar. Wegen $A = \{(x,y)^T \in \mathbb{R}^2\colon -R \le x \le R,\ -\sqrt{R^2-x^2} \le y \le \sqrt{R^2-x^2}\}$ folgt aus dem Satz von Fubini:

$$\begin{aligned}|A| = \int_A 1\; d(x,y) &= \int_{-R}^{R} \left(\int_{-\sqrt{R^2-x^2}}^{\sqrt{R^2-x^2}} 1\; dy\right)\; dx = \int_{-R}^{R} 2\sqrt{R^2-x^2}\; dx \\ &= 2R^2 \int_{-1}^{1} \sqrt{1-t^2}\; dt = R^2 \left(\arcsin t + t\,\sqrt{1-t^2}\right)\Big|_{-1}^{1} = R^2\pi\end{aligned}$$

- Beispiel: Volumen eines Kegels $A = \{(x,y,z)^T \in \mathbb{R}^3 \colon z \geq 0,\ \frac{z}{H} + \frac{\sqrt{x^2+y^2}}{R} \leq 1\}$.
  Es gilt: $A = \{(x,y,z)^T \in \mathbb{R}^3 \colon 0 \leq z \leq H,\ (x,y)^T \in A_z\}$ mit
  $$A_z = \left\{ (x,y)^T \in \mathbb{R}^2 \colon x^2 + y^2 \leq R^2 \left(1 - \frac{z}{H}\right)^2 \right\}$$
  Daher
  $$|A| = \int_A 1 \; d(x,y,z) = \int_0^H \left(\int_{A_z} 1 \; d(x,y) \right) \, dz = \int_0^H R^2 \left(1 - \frac{z}{H}\right)^2 \pi \; dz$$
  $$= \pi R^2 \int_1^0 t^2 (-H) \; dt = \frac{\pi}{3} R^2 H.$$

7.2.2 Einfache Anwendungen von Mehrfachintegralen

Neben dem Flächeninhalt und dem Volumen gibt es weitere wichtige Größen, die durch Mehrfachintegrale dargestellt werden können:

Sei $A \subset \mathbb{R}^2$ oder $A \subset \mathbb{R}^3$ eine beschränkte und Jordan-messbare Menge. Sei $\rho(x)$ die (Massen-)Dichte an einer Stelle $x \in A$.

- Die Gesamtmasse M von A:
  $$M_A = \int_A \rho(x) \; dx.$$
- Schwerpunkt s_A von A:
  $$s_A = \frac{1}{M_A} \int_A x \, \rho(x) \; dx.$$
- Sei $A \subset \mathbb{R}^3$ eine beschränkte und Jordan-messbare Menge.
  Trägheitmoment von A bei Drehung um eine vorgegebene Achse:
  $$J = \int_A r(x)^2 \, \rho(x) \; dx,$$
  wobei $r(x)$ der Normalabstand von x zur Drehachse ist.
- Trägheitsmomente bei Drehung um die x_1-Achse, x_2-Achse und x_3-Achse:
  $$J_{11} = \int_A (x_2^2 + x_3^2) \, \rho(x) \; dx, \quad J_{22} = \int_A (x_1^2 + x_3^2) \, \rho(x) \; dx, \quad J_{33} = \int_A (x_1^2 + x_2^2) \, \rho(x) \; dx.$$
  Zusätzlich führt man für $i \neq j$ die folgenden Größen ein:
  $$J_{ij} = - \int_A x_i x_j \, \rho(x) \; dx$$
  Die (symmetrische) 3×3 Matrix
  $$J = \begin{pmatrix} J_{11} & J_{12} & J_{13} \\ J_{21} & J_{22} & J_{23} \\ J_{31} & J_{32} & J_{33} \end{pmatrix}$$
  heißt Trägheitstensor.

7.2.3 Substitutionsregel

Zur Formulierung der Substitutionsregel benötigt man den Begriff der Determinante einer Matrix. Wir beschränken uns auf $n \times n$-Matrizen mit $n \in \{1,2,3\}$:

Definition 7.10. *1. Für $A = a_{11} \in \mathbb{R}$:*

$$\det A = a_{11}$$

2. Für $A = (a_{ij}) \in \mathbb{R}^{2\times 2}$:

$$\det A = a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}.$$

3. Für $A = (a_{ij}) \in \mathbb{R}^{3\times 3}$:

$$\det A = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{31}a_{22}a_{13} - a_{32}a_{23}a_{11} - a_{33}a_{21}a_{12}.$$

Geometrische Bedeutung:

1. Für $n = 2$: $|\det A|$ ist die Fläche des Parallelogramms, das durch die beiden Spaltenvektoren von A aufgespannt wird.

2. Für $n = 3$: $|\det A|$ ist das Volumen des Parallelepipeds, das durch die drei Spaltenvektoren von A aufgespannt wird.

Satz 7.6 (Substitutionsregel)**.** *Sei $A \subset \mathbb{R}^n$ eine offene Menge. Sei $g\colon A \to \mathbb{R}^n$ injektiv, stetig differenzierbar und $\det g'(x) \neq 0$ für alle $x \in A$. Sei $f\colon g(A) \to \mathbb{R}$ stetig. Dann gilt: f ist auf $g(A)$ R-integrierbar und es gilt:*

$$\int_{g(A)} f(y)\ dy = \int_A f(g(x))\,|\det g'(x)|\ dx.$$

Die Beweisidee lässt sich für $n = 2$ und der speziellen Funktion $g(x) = Gx$ mit einer regulären Matrix G auf $A = I$ andeuten: Eine Zerlegung von I in Rechtecke I_{kl} induziert eine Zerlegung von $g(I)$ in Parallelogramme $\widetilde{I}_{kl} = g(I_{kl})$. Für Zwischenpunkte $\zeta_{kl} \in I_{kl}$ erhält man Zwischenpunkte $\widetilde{\zeta}_{kl} = g(\zeta_{kl}) \in \widetilde{I}_{kl}$. Nun gilt:

$$|\widetilde{I}_{kl}| = |\det G|\,|I_{kl}|$$

und daher

$$\sum_{k,l} f(\widetilde{\zeta}_{kl})|\widetilde{I}_{kl}| = \sum_{k,l} f(g(\zeta_{kl}))\,|\det G|\,|I_{kl}| = \sum_{k,l} f(g(\zeta_{kl}))\,|\det g'(\zeta_{kl})|\,|I_{kl}|$$

Die Behauptung folgt durch Grenzübergang $h \to 0$.

Spezialfall $n = 1$

$A = (a,b)$. Wegen $g'(x) \neq 0$ für alle $x \in (a,b)$ können nur zwei Fälle auftreten:

1. $g'(x) > 0$ für alle $x \in (a,b)$. Dann ist g streng monoton wachsend und es gilt

$$\int_{g(A)} f(y)\ dy = \int_{(g(a),g(b))} f(y)\ dy = \int_{g(a)}^{g(b)} f(y)\ dy$$

und

$$\int_A f(g(x))\,|\det g'(x)|\ dx = \int_a^b f(g(x))\,g'(x)\ dx,$$

also

$$\int_{g(a)}^{g(b)} f(y)\ dy = \int_a^b f(g(x))\,g'(x)\ dx.$$

2. $g'(x) < 0$ für alle $x \in (a,b)$. Dann ist g streng monoton fallend und es gilt

$$\int_{g(A)} f(y)\ dy = \int_{(g(b),g(a))} f(y)\ dy = \int_{g(b)}^{g(a)} f(y)\ dy = -\int_{g(a)}^{g(b)} f(y)\ dy$$

und

$$\int_A f(g(x))\,|\det g'(x)|\ dx = \int_a^b f(g(x))\,(-g'(x))\ dx,$$

also gilt wieder:

$$\int_{g(a)}^{g(b)} f(y)\ dy = \int_a^b f(g(x))\,g'(x)\ dx.$$

Wichtige Variablentransformationen

1. Polarkoordinaten in $\mathbb{R}^2$: Jeder Punkt $(x,y)^T \in \mathbb{R}^2$ lässt sich in der Form

$$\begin{aligned} x &= r\ \cos\varphi \\ y &= r\ \sin\varphi \end{aligned}$$

mit $r \in [0,\infty)$, $\varphi \in (-\pi,\pi]$ darstellen.

Die Abbildung $g\colon [0,\infty) \times (-\pi,\pi] \to \mathbb{R}^2$ ist durch

$$\begin{pmatrix} r \\ \varphi \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} r\ \cos\varphi \\ r\ \sin\varphi \end{pmatrix}$$

gegeben. g ist auf $D = (0,\infty) \times (-\pi,\pi)$ injektiv mit $g(D) = \mathbb{R}^2 \setminus \{(x,0)^T : x \in (-\infty,0]\}$, stetig differenzierbar mit

$$g'(r,\varphi) = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -r\ \sin\varphi \\ \sin\varphi & r\ \cos\varphi \end{pmatrix}$$

und es gilt

$$\det g'(r,\varphi) = r\cos^2\varphi + r\sin^2\varphi = r > 0.$$

Beispiel: Flächeninhalt eines Kreises $B = \{(x,y)^T \in \mathbb{R}^2 \colon x^2+y^2 \le R^2\}$.
Es gilt

$$|B| = \int_B 1\ d(x,y) = \int_{g(A)} 1\ d(x,y) = \int_A r\ d(r,\varphi)$$

für $A = (0,R)\times(-\pi,\pi)$. Man beachte, dass sich B und $g(A)$ zwar unterscheiden, aber nur um eine Menge vom Jordan-Maß 0. Mit dem Satz von Fubini erhält man:

$$|B| = \int_A r\ d(r,\varphi) = \int_{-\pi}^{\pi}\left(\int_0^R r dr\right)\ d\varphi = \int_{-\pi}^{\pi}\frac{R^2}{2}\ d\varphi = R^2\pi.$$

Beispiel:

$$\int_{\mathbb{R}^2} e^{-(x^2+y^2)}\ d(x,y) = \int_{g(A)} e^{-(x^2+y^2)}\ d(x,y) = \int_A e^{-r^2} r\ d(r,\varphi)$$

mit $A = (0,\infty)\times(-\pi,\pi)$. Mit dem Satz von Fubini erhält man:

$$\int_A e^{-r^2} r\ d(r,\varphi) = \int_{-\pi}^{\pi}\left(\int_0^\infty e^{-r^2} r\ dr\right)\ d\varphi$$

Es gilt

$$\int_0^\infty e^{-r^2} r\ dr = \frac{1}{2}\int_0^\infty e^{-u}\ du = -\left.\frac{1}{2}e^{-u}\right|_0^\infty = \frac{1}{2}$$

Also

$$\int_{\mathbb{R}^2} e^{-(x^2+y^2)}\ d(x,y) = \int_{-\pi}^{\pi}\frac{1}{2}\ d\varphi = \pi$$

Andererseits erhält man mit dem Satz von Fubini (ohne Koordinatentransformation):

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^2} e^{-(x^2+y^2)}\ d(x,y) &= \int_{-\infty}^{\infty}\left(\int_{-\infty}^{\infty} e^{-(x^2+y^2)}\ dx\right)\ dy = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-y^2}\left(\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}\ dx\right)\ dy\\ &= \left(\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}\ dx\right)\left(\int_{-\infty}^{\infty} e^{-y^2}\ dy\right) = \left(\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}\ dx\right)^2\end{aligned}$$

Also folgt:

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}\ dx = \sqrt{\pi}.$$

2. Zylinderkoordination in $\mathbb{R}^3$: Jeder Punkt $(x,y,z)\in\mathbb{R}^3$ lässt sich in der Form

$$\begin{aligned} x &= r\ \cos\varphi\\ y &= r\ \sin\varphi\\ z &= z\end{aligned}$$

mit $r \in [0,\infty)$, $\varphi \in (-\pi,\pi]$, $z \in \mathbb{R}$ darstellen.

Die Abbildung $g\colon [0,\infty) \times (-\pi,\pi] \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ ist durch

$$\begin{pmatrix} r \\ \varphi \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} r\,\cos\varphi \\ r\,\sin\varphi \\ z \end{pmatrix}$$

gegeben. g ist auf $D = (0,\infty) \times (-\pi,\pi) \times \mathbb{R}$ injektiv mit $g(D) = \mathbb{R}^3 \setminus \{(x,0,z)^T\colon x \in (-\infty,0],\ z \in \mathbb{R}\}$, stetig differenzierbar mit

$$g'(r,\varphi,z) = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -r\,\sin\varphi & 0 \\ \sin\varphi & r\,\cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

und es gilt

$$\det g'(r,\varphi,z) = r\cos^2\varphi + r\sin^2\varphi = r > 0.$$

Beispiel: Volumen des Kegels $B = \{(x,y,z)^T \in \mathbb{R}^3\colon z \geq 0,\ \frac{z}{H} + \frac{\sqrt{x^2+y^2}}{R} \leq 1\}$.

$$|B| = \int_B 1\ d(x,y,z) = \int_{g(A)} 1\ d(x,y,z) = \int_A r\ d(r,\varphi,z)$$

mit $A = \{(r,\varphi,z)^T\colon \varphi \in (-\pi,\pi),\ r > 0,\ z > 0,\ \frac{z}{H} + \frac{r}{R} < 1\}$. Mit dem Satz von Fubini erhält man:

$$\begin{aligned}\int_A r\ d(r,\varphi,z) &= \int_0^H \left(\int_{-\pi}^{\pi} \left(\int_0^{R(1-z/H)} r\ dr \right)\ d\varphi \right)\ dz \\ &= \int_0^H R^2 \left(1 - \frac{z}{H}\right)^2 \pi\ dz = \frac{\pi}{3} R^2 H.\end{aligned}$$

Beispiel: Schwerpunkt des Kegels $B = \{(x,y,z)^T \in \mathbb{R}^3\colon z \geq 0,\ \frac{z}{H} + \frac{\sqrt{x^2+y^2}}{R} \leq 1\}$ mit konstanter Massendichte ρ.

Offensichtlich gilt: $s_x = s_y = 0$. $M = \rho\,|B|$.

$$s_z = \frac{1}{M} \int_B z\rho\ d(x,y,z) = \frac{1}{|B|} \int_B z\ d(x,y,z)$$

Wir benötigen also das Integral

$$\int_B z\ d(x,y,z) = \int_{g(A)} z\ d(x,y,z) = \int_A zr\ d(r,\varphi,z).$$

Mit dem Satz von Fubini erhält man:

$$\begin{aligned}\int_A zr\ d(r,\varphi,z) &= \int_0^H \left(\int_{-\pi}^{\pi}\left(\int_0^{R(1-z/H)} zr\ dr\right)\ d\varphi\right)\ dz\\ &= R^2\pi\int_0^H z\left(1-\frac{z}{H}\right)^2\ dz = R^2\pi\left(\frac{z^2}{2}-\frac{2z^3}{3H}+\frac{z^4}{4H^2}\right)\Bigg|_0^H = \frac{1}{4}H.\end{aligned}$$

3. Kugelkoordinaten in $\mathbb{R}^3$: Jeder Punkt $(x,y,z)\in\mathbb{R}^3$ lässt sich in der Form

$$\begin{aligned}x &= r\ \sin\theta\cos\varphi\\ y &= r\ \sin\theta\sin\varphi\\ z &= r\cos\theta\end{aligned}$$

mit $r\in[0,\infty)$, $\theta\in[0,\pi]$, $\varphi\in(-\pi,\pi]$ darstellen.

Die Abbildung $g\colon (0,\infty)\times(0,\pi)\times(-\pi,\pi)\to\mathbb{R}^3\setminus\{(x,0,z)^T\colon x\in(-\infty,0],\ z\in\mathbb{R}\}$, gegeben durch

$$\begin{pmatrix} r\\ \varphi\\ z\end{pmatrix}\mapsto\begin{pmatrix} r\ \sin\theta\cos\varphi\\ r\ \sin\theta\sin\varphi\\ r\cos\theta\end{pmatrix},$$

ist injektiv, stetig differenzierbar mit

$$g'(r,\theta,\varphi) = \begin{pmatrix}\sin\theta\cos\varphi & r\cos\theta\cos\varphi & -r\sin\theta\sin\varphi\\ \sin\theta\sin\varphi & r\cos\theta\sin\varphi & r\sin\theta\cos\varphi\\ \cos\theta & -r\sin\theta & 0\end{pmatrix}$$

und es gilt

$$\begin{aligned}\det g'(r,\theta,\varphi) &= r^2\cos^2\theta\sin\theta\cos^2\varphi + r^2\sin^3\theta\sin^2\varphi\\ &\quad + r^2\cos^2\theta\sin\theta\sin^2\varphi + r^2\sin^3\theta\cos^2\varphi = r^2\sin\theta > 0.\end{aligned}$$

Beispiel: Volumen der Kugel $B=\{(x,y,z)^T\in\mathbb{R}^3\colon x^2+y^2+z^2\le R^2\}$.

$$|B| = \int_B 1\ d(x,y,z) = \int_{g(A)} 1\ d(x,y,z) = \int_A r^2\sin\theta\ d(r,\theta,\varphi)$$

mit $A=(0,R)\times(0,\pi)\times(-\pi,\pi)$. Mit dem Satz von Fubini erhält man:

$$\begin{aligned}|B| &= \int_0^{\pi}\left(\int_{-\pi}^{\pi}\left(\int_0^R r^2\sin\theta\ dr\right)\ d\varphi\right)\ d\theta\\ &= \frac{R^3}{3}\int_0^{\pi}\left(\int_{-\pi}^{\pi}\sin\theta\ \ d\varphi\right)\ d\theta = \frac{2\pi R^3}{3}\int_0^{\pi}\sin\theta\ d\theta = \frac{4\pi R^3}{3}.\end{aligned}$$

Beispiel: Trägheitsmoment der Kugel $B = \{(x, y, z)^T \in \mathbb{R}^3 \colon x^2 + y^2 + z^2 \leq R^2\}$ mit konstanter Massendichte ρ bei Drehung um die z-Achse.

$$J_z = \int_B (x^2 + y^2)\rho \; d(x, y, z) = \int_{g(A)} (x^2 + y^2)\rho \; d(x, y, z) = \rho \int_A r^4 \sin^3\theta \; d(r, \theta, \varphi).$$

Mit dem Satz von Fubini erhält man:

$$\begin{aligned}
\int_A r^4 \sin^3\theta \; d(r, \theta, \varphi) &= \int_0^\pi \left(\int_{-\pi}^\pi \left(\int_0^R r^4 \sin^3\theta \; dr \right) \; d\varphi \right) \; d\theta \\
&= \frac{R^5}{5} \int_0^\pi \left(\int_{-\pi}^\pi \sin^3\theta \; d\varphi \right) \; d\theta = \frac{2\pi R^5}{5} \int_0^\pi \sin^3\theta \; d\theta
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\int_0^\pi \sin^3\theta \; d\theta = \int_0^\pi (1 - \cos^2\theta)\sin\theta \; d\theta &= -\cos\theta\Big|_0^\pi + \int_0^\pi \cos^2\theta(-\sin\theta) \; d\theta \\
= 2 + \int_1^{-1} u^2 \; du = 2 + \frac{u^3}{3}\Big|_1^{-1} &= 2 - \frac{2}{3} = \frac{4}{3}.
\end{aligned}$$

Also

$$J_z = \rho \frac{4}{3} \frac{2\pi R^5}{5} = \rho \frac{4\pi R^3}{3} \frac{2}{5} R^2 = \frac{2}{5} M R^2$$

7.3 Der Greensche Integralsatz

Wir nehmen zunächst an, dass sich eine Menge $D \subset \mathbb{R}^2$ folgendermaßen darstellen lässt:

$$D = \{(x_1, x_2)^T \in \mathbb{R}^2 \colon x_1 \in [a, b], \; \varphi_1(x_1) \leq x_2 \leq \varphi_2(x_1)\},$$

wobei $\varphi_1 \colon [a, b] \to \mathbb{R}$ und $\varphi_2 \colon [a, b] \to \mathbb{R}$ stückweise stetig differenzierbare Funktionen sind. Man nennt D einen Normalbereich (bezüglich der x-Achse).

Der Rand ∂D der Menge D lässt sich als Bildmenge einer Kurve $C = C_1 + C_2 + (-C_3) + (-C_4)$ darstellen. Dabei sind

- C_1 die Summe von stetig differenzierbaren Kurven $C_{1,i}$ mit Parameterdarstellungen

  $$\gamma^{(1,i)} \colon [t_{i-1}, t_i] \to \mathbb{R}^2, \quad t \mapsto (t, \varphi_1(t))^T$$

  für $i = 1, \ldots, M$ und $a = t_0 < t_1 < \ldots < t_M = b$ ist,

- C_2 durch

  $$\gamma^{(2)} \colon [0, 1] \to \mathbb{R}^2, \quad t \mapsto (b, \varphi_1(b) + t(\varphi_2(b) - \varphi_1(b))^T$$

  gegeben ist,

- C_3 die Summe von stetig differenzierbaren Kurven $C_{3,i}$ mit Parameterdarstellungen

  $$\gamma^{(3,i)}\colon [t_{i-1}, t_i] \to \mathbb{R}^2, \quad t \mapsto (t, \varphi_2(t))^T$$

  für $i = 1, \ldots, N$ und $a = \tilde{t}_0 < \tilde{t}_1 < \ldots < \tilde{t}_N = b$ ist und

- C_4 durch

  $$\gamma^{(4)}\colon [0, 1] \to \mathbb{R}^2, \quad t \mapsto (a, \varphi_1(a) + t(\varphi_2(a) - \varphi_1(a))^T$$

  gegeben.

C ist offensichtlich eine geschlossene Kurve. Man beachte, dass der Rand ∂D durch diese Parametrisierungen im Gegenuhrzeigersinn durchlaufen wird. Bewegt man sich entlang der Kurve C entsprechend dem Durchlaufsinn, so befinden sich die Punkte von D immer links von der Randkurve. Man spricht von einer positiv orientierten Randkurve.

Sei $f\colon A \to \mathbb{R}$ eine stetig differenzierbare Funktion mit $D \subset A$. Dann folgt mit dem Satz von Fubini:

$$\begin{aligned}
&\int_D \frac{\partial f}{\partial x_2}(x)\, d(x_1, x_2) = \int_a^b \left(\int_{\varphi_1(x_1)}^{\varphi_2(x_1)} \frac{\partial f}{\partial x_2}(x)\, dx_2 \right) dx_1 \\
&= \int_a^b [f(x_1, \varphi_2(x_1)) - f(x_1, \varphi_1(x_1))]\, dx_1 = \int_a^b f(t, \varphi_2(t))\, dt - \int_a^b f(t, \varphi_1(t))\, dt \\
&= \sum_{i=1}^N \int_{\tilde{t}_{i-1}}^{\tilde{t}_i} f(t, \varphi_2(t))\, dt - \sum_{i=1}^M \int_{t_{i-1}}^{t_i} f(t, \varphi_1(t))\, dt \\
&= \sum_{i=1}^N \int_{\tilde{t}_{i-1}}^{\tilde{t}_i} \begin{pmatrix} f(t, \varphi_2(t)) \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ \varphi_2'(t) \end{pmatrix} dt - \sum_{i=1}^M \int_{t_{i-1}}^{t_i} \begin{pmatrix} f(t, \varphi_1(t)) \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ \varphi_1'(t) \end{pmatrix} dt \\
&= \sum_{i=1}^N \int_{C_{3,i}} \begin{pmatrix} f(x) \\ 0 \end{pmatrix} \cdot\, dx - \sum_{i=1}^M \int_{C_{1,i}} \begin{pmatrix} f(x) \\ 0 \end{pmatrix} \cdot\, dx \\
&= \int_{C_3} \begin{pmatrix} f(x) \\ 0 \end{pmatrix} \cdot\, dx - \int_{C_1} \begin{pmatrix} f(x) \\ 0 \end{pmatrix} \cdot\, dx = -\int_{C_1} \begin{pmatrix} f(x) \\ 0 \end{pmatrix} \cdot\, dx - \int_{-C_3} \begin{pmatrix} f(x) \\ 0 \end{pmatrix} \cdot\, dx.
\end{aligned}$$

Wegen

$$\int_{C_2} \begin{pmatrix} f(x) \\ 0 \end{pmatrix} \cdot\, dx = \int_0^1 \begin{pmatrix} f(\gamma_2(t)) \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ \varphi_2(b) - \varphi_1(b) \end{pmatrix} dt = 0$$

und

$$\int_{C_4} \begin{pmatrix} f(x) \\ 0 \end{pmatrix} \cdot\, dx = \int_0^1 \begin{pmatrix} f(\gamma_4(t)) \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ \varphi_2(a) - \varphi_1(a) \end{pmatrix} dt = 0$$

erhält man schließlich:

$$\int_D \frac{\partial f}{\partial x_2}(x)\, dx = -\int_C \begin{pmatrix} f(x) \\ 0 \end{pmatrix} \cdot dx.$$

Wir nehmen nun an, dass sich D folgendermaßen darstellen lässt:

$$D = \{(x,y)^T \in \mathbb{R}^2 \colon y \in [c,d],\ \psi_1(y) \le x \le \psi_2(y)\},$$

wobei $\psi_1 \colon [c,d] \to \mathbb{R}$ und $\psi_2 \colon [c,d] \to \mathbb{R}$ stückweise stetig differenzierbare Funktionen sind. Man nennt D einen Normalbereich (bezüglich der y-Achse).

Dann erhält man völlig analog:

$$\int_D \frac{\partial f}{\partial x_1}(x)\ d(x_1,x_2) = -\int_{-C} \begin{pmatrix} 0 \\ f(x) \end{pmatrix} \cdot dx = \int_C \begin{pmatrix} 0 \\ f(x) \end{pmatrix} \cdot dx.$$

Satz 7.7 (Greenscher Integralsatz)**.** *Sei D ein Normalbereich sowohl bezüglich der x-Achse also auch bezüglich der y-Achse und sei $f \colon A \to \mathbb{R}^2$ eine stetig differenzierbare Funktion mit $D \subset A$. Dann gilt:*

$$\boxed{\int_D \left(\frac{\partial f_2}{\partial x_1}(x) - \frac{\partial f_1}{\partial x_2}(x) \right)\ d(x_1,x_2) = \int_C f(x) \cdot dx.}$$

Beweis.

$$\begin{aligned}
&\int_D \left(\frac{\partial f_2}{\partial x_1}(x) - \frac{\partial f_1}{\partial x_2}(x) \right)\ d(x_1,x_2) = \int_D \frac{\partial f_2}{\partial x_1}(x)\ d(x_1,x_2) - \int_D \frac{\partial f_1}{\partial x_2}(x)\ d(x_1,x_2) \\
&= \int_C \begin{pmatrix} f_1(x) \\ 0 \end{pmatrix} \cdot dx + \int_C \begin{pmatrix} 0 \\ f_2(x) \end{pmatrix} \cdot dx = \int_C \begin{pmatrix} f_1(x) \\ f_2(x) \end{pmatrix} \cdot dx = \int_C f(x) \cdot dx.
\end{aligned}$$

□

Folgerung

Ersetzt man f_1 durch $-f_2$ und f_2 durch f_1 erhält man:

$$\int_D \left(\frac{\partial f_1}{\partial x_1}(x) + \frac{\partial f_2}{\partial x_2}(x) \right)\ d(x_1,x_2) = \int_C \begin{pmatrix} -f_2(x) \\ f_1(x) \end{pmatrix} \cdot dx.$$

C lässt sich als endliche Summe von stetig differenzierbaren Kurven $C^{(i)}$ mit der Parametrisierung $\gamma^{(i)} \colon [0,1] \to \mathbb{R}^2$ darstellen. Also

$$\begin{aligned}
&\int_C \begin{pmatrix} -f_2(x) \\ f_1(x) \end{pmatrix} \cdot dx = \sum_i \int_{C^{(i)}} \begin{pmatrix} -f_2(x) \\ f_1(x) \end{pmatrix} \cdot dx \\
&\quad = \sum_i \int_0^1 \begin{pmatrix} -f_2(\gamma^{(i)}(t)) \\ f_1(\gamma^{(i)}(t)) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} (\gamma_1^{(i)})'(t) \\ (\gamma_2^{(i)})'(t) \end{pmatrix}\ dt = \sum_i \int_0^1 \begin{pmatrix} f_1(\gamma^{(i)}(t)) \\ f_2(\gamma^{(i)}(t)) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} (\gamma_2^{(i)})'(t) \\ -(\gamma_1^{(i)})'(t) \end{pmatrix}\ dt \\
&= \sum_i \int_0^1 f(\gamma^{(i)}(t)) \cdot n(\gamma^{(i)}(t))\, \|(\gamma^{(i)})'(t)\|\ dt = \sum_i \int_{C^{(i)}} f(x) \cdot n(x)\ ds \\
&= \int_C f(x) \cdot n(x)\ ds
\end{aligned}$$

mit

$$n(\gamma^{(i)}(t)) = \frac{1}{\|(\gamma^{(i)})'(t)\|} \begin{pmatrix} (\gamma_2^{(i)})'(t) \\ -(\gamma_1^{(i)})'(t) \end{pmatrix}.$$

Geometrische Bedeutung: $n(x)$ ist jener Einheitsvektor, der im Punkt $x \in \partial D$ normal zur Tangentenrichtung der Randkurve liegt und nach außen zeigt.

Es gilt also (Gaußscher Integralsatz in $\mathbb{R}^2$):

$$\boxed{\int_D \left(\frac{\partial f_1}{\partial x_1}(x) + \frac{\partial f_2}{\partial x_2}(x) \right) \, d(x_1, x_2) = \int_C f(x) \cdot n(x) \, ds.}$$

Übliche Schreibweise der Integralsätze mit $\int_{\partial D}$ anstelle von $\int_C$.

Erweiterung auf allgemeinere Gebiete

- Der Greensche Satz gilt auch für Gebiete, die durch Drehung eines Normalbereiches entstehen. (Beweis mit Hilfe einer Koordinatentransformation und der Substitutionsregel)
- Der Greensche Satz gilt auch für Gebiete, die sich aus (gedrehten oder ungedrehten) Normalbereichen zusammensetzen lassen: Randkurven im Inneren werden entgegengesetzt durchlaufen und liefern daher keinen Beitrag.

Anwendungen

Aus dem Greenschen bzw. dem Gaußschen Integralsatz erhält man:

- Flächenformel:

$$|D| = \frac{1}{2} \int_{\partial D} \begin{pmatrix} -x_2 \\ x_1 \end{pmatrix} \cdot dx = \frac{1}{2} \int_{\partial D} (-x_2 \, dx_1 + x_1 \, dx_2)$$

Beispiel: Flächeninhalt der Ellipse $D = \{x \in \mathbb{R}^2 \colon \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \leq 1\}$

Parameterdarstellung der Randkurve: $\gamma \colon [0, 2\pi) \to \mathbb{R}^2$, $\gamma(t) = (a \cos t, b \sin t)^T$.

$$|D| = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \begin{pmatrix} -b \sin t \\ a \cos t \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -a \sin t \\ b \cos t \end{pmatrix} dt = ab\,\pi.$$

- Partielle Integration:

$$\int_D \frac{\partial f}{\partial x_i}(x) \, g(x) \, dx = \int_{\partial D} f(x) \, g(x) \, n_i(x) \, ds - \int_D f(x) \, \frac{\partial g}{\partial x_i}(x) \, dx$$

- 1. Greensche Identität:

$$\int_D \Big(g(x)\, \Delta f(x) + \nabla f(x) \cdot \nabla g(x) \Big)\; dx = \int_{\partial D} g(x)\, \frac{\partial f}{\partial n}(x)\; ds$$

  mit $(\partial f/\partial n)(x) = n(x) \cdot \nabla f(x)$

- 2. Greensche Identität:

$$\int_D \Big(g(x)\, \Delta f(x) - f(x)\, \Delta g(x)) \Big) dx = \int_{\partial D} \left(g(x)\, \frac{\partial f}{\partial n}(x) - f(x)\, \frac{\partial g}{\partial n}(x) \right) ds$$

7.4 Oberflächenintegrale

Formulierung des Greenschen Integralsatzes in $\mathbb{R}^3$: Mit

- der Fläche $S = D \times \{0\} \subset \mathbb{R}^3$ und dem Einheitsnormalvektor $n(x) = (0,0,1)^T$ auf S,
- der positiv orientierten Randkurve ∂S von S in $\mathbb{R}^3$ und
- dem Vektorfeld $f\colon A \to \mathbb{R}^3$, A offen und $S \subset A \subset \mathbb{R}^3$, gegeben durch

$$f(x_1, x_2, x_3) = \begin{pmatrix} f_1(x_1, x_2) \\ f_2(x_1, x_2) \\ 0 \end{pmatrix}$$

erhält der Greensche Satz folgendes Aussehen:

$$\boxed{\int_S \operatorname{rot} f(x) \cdot n(x)\; d\sigma = \int_{\partial S} f(x) \cdot dx.}$$

mit dem Oberflächenintegral, gegeben durch

$$\int_S \operatorname{rot} f(x) \cdot n(x)\; d\sigma = \int_D \operatorname{rot} f(x) \cdot n(x)\; d(x_1, x_2).$$

Wir werden nun den Integralsatz für allgemeinere Flächen formulieren. Dazu brauchen wir zunächst die Definition des Oberflächenintegrals.

Definition 7.11. *Sei $K = [a,b] \times [c,d] \subset \mathbb{R}^2$, sei M eine offene Menge mit $K \subset M \subset \mathbb{R}^2$ und sei $\varphi\colon M \to \mathbb{R}^3$ stetig differenzierbar. Dann heißt die Einschränkung $\varphi\big|_K$ der Funktion φ auf K eine Parameterdarstellung einer Fläche S.*

K heißt der Parameterbereich dieser Fläche. Die Definition lässt sich auf allgemeinere Parameterbereiche erweitern.

Beispiele:

- Teil einer Ebene: $\varphi\colon [0,1]\times[0,1]\to\mathbb{R}^3$, $\varphi(u,v)=p+u\,(q-p)+v\,(r-p)$ mit drei Punkten $p,q,r\in\mathbb{R}^3$, die nicht entlang einer Geraden liegen.
- Teil eines Zylindermantel: $\varphi\colon [0,\pi]\times[0,H]\to\mathbb{R}^3$ mit $\varphi(u,v)=(R\,\cos u, R\,\sin u, v)^T$.
- Oberfläche einer Halbkugel: $\varphi\colon [0,\frac{\pi}{2}]\times[0,2\pi]\to\mathbb{R}^3$ mit $\varphi(u,v)=(R\,\sin u\cos v, R\,\sin u\sin v, R\,\cos u)^T$.

Für $(u,v)^T\in K$ gilt: Die beiden Kurven $\gamma_1\colon [a_1,b_1]\to\mathbb{R}^3$ mit $\gamma_1(t)=\varphi(t,v)$ und $\gamma_2\colon [a_2,b_2]\to\mathbb{R}^3$ mit $\gamma_2(t)=\varphi(t,v)$ liegen auf der Fläche und schneiden einander im Punkt $\varphi(u,v)\in S$. Die beiden Tangentialvektoren im Punkt $\varphi(u,v)\in S$ sind durch

$$\frac{\partial\varphi}{\partial u}(u,v)\quad\text{und}\quad\frac{\partial\varphi}{\partial v}(u,v)$$

gegeben. Der Vektor

$$N(u,v)=\frac{\partial\varphi}{\partial u}(u,v)\times\frac{\partial\varphi}{\partial v}(u,v)$$

heißt Normalvektor der Fläche im Punkt $\varphi(u,v)\in S$.

Wir gehen bei der Einführung des Oberflächenintegrals ähnlich wie beim Flächenintegral vor:

- Durch Zerlegungen $Z_u=\{u_0,u_1,\dots,u_M\}$ von $[a,b]$ und $Z_v=\{v_0,v_1,\dots,v_N\}$ von $[c,d]$ wird das Intervall K in Teilintervalle K_{kl} unterteilt.

  $Z=Z_u\times Z_v$ heißt Zerlegung von K.
- Länge der Teilintervalle $[u_{k-1},u_k]$ und $[v_{l-1},v_l]$: $\Delta u_k=u_k-u_{k-1}$ und $\Delta v_l=v_l-v_{l-1}$.

  Fläche der Teilintervalle K_{kl}: $\Delta u_k\,\Delta v_l$
- Zwischenpunkte: $\zeta=(\zeta_{kl})_{k=1,\dots,M,l=1,\dots,N}$ mit $\zeta_{kl}=(u_{k-1},v_{l-1})\in K_{kl}$.
- Durch die Zerlegung Z des Parameterbereiches wird eine Zerlegung der Fläche S erzeugt. Die einzelnen Teile $\varphi(K_{kl})$ besitzen einen Flächeninhalt von annähernd

  $$\|N(u,v)\|\,\Delta u_k\Delta v_l.$$
- Für ein Skalarfeld $f\colon A\to\mathbb{R}$ mit $\varphi(K)\subset A\subset\mathbb{R}^3$ führt man folgende Riemann-Summe ein:

  $$\begin{aligned}S(f,Z,\zeta)&=\sum_{k,l}f(u_{k-1},v_{l-1})\,|\varphi(K_{kl})|\\&\approx\sum_{k,l}f(\varphi(u_{k-1},v_{l-1}))\,\|N(u_{k-1},v_{l-1})\|\,\Delta u_k\Delta v_l.\end{aligned}$$

  Dieser Ausdruck ist die Riemann-Summe der Funktion $(f\circ\varphi)\,\|N\|$. Das motiviert folgende Definition

Definition 7.12. *Sei $f\colon A \to \mathbb{R}$ mit $\varphi(K) \subset A \subset \mathbb{R}^3$ auf $\varphi(K)$ stetig. Dann heißt*

$$\int_S f(x)\,d\sigma = \int_K f(\varphi(u,v))\,\|N(u,v)\|\;d(u,v)$$

Oberflächenintegral von f über der Fläche S.

Für ein Vektorfeld $f\colon A \to \mathbb{R}^3$ mit $\varphi(K) \subset A \subset \mathbb{R}^3$ führt man analog folgende Riemann-Summe ein:

$$S(f,Z,\zeta) = \sum_{k,l} f(\varphi(u_{k-1},v_{l-1})) \cdot N(u_{k-1},v_{l-1})\,\Delta u_k \Delta v_l.$$

Es gilt:

$$\begin{aligned} &f(\varphi(u_{k-1},v_{l-1})) \cdot N(u_{k-1},v_{l-1})\,\Delta u_k \Delta v_l \\ &\quad = f(\varphi(u_{k-1},v_{l-1})) \cdot n(\varphi(u_{k-1},v_{l-1}))\,\|N(u_{k-1},v_{l-1})\|\,\Delta u_k \Delta v_l \end{aligned}$$

mit

$$n(\varphi(u,v)) = \begin{cases} \frac{1}{\|N(u,v)\|}\,N(u,v) & \text{falls } N(u,v) \neq 0 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}.$$

Interpretation: $n(x)$ ist ein Einheitsnormalvektor auf die Fläche S im Punkt $x = \varphi(u,v)$. $f(x) \cdot n(x)$ ist die entsprechende Normalkomponenten von $f(x)$, $\|N(u_{k-1},v_{l-1})\|\,\Delta u_k \Delta v_l$ ist annähernd die Fläche von $\varphi(K_{kl})$.

Der obige Ausdruck ist die Riemann-Summe der Funktion $(f \circ \varphi) \cdot N$. Das motiviert folgende Definition

Definition 7.13. *Sei $f\colon A \to \mathbb{R}^3$ mit $\varphi(K) \subset A \subset \mathbb{R}^3$ auf $\varphi(K)$ stetig. Dann heißt*

$$\int_S f(x) \cdot n(x)\;d\sigma = \int_K f(\varphi(u,v)) \cdot N(u,v)\;d(u,v)$$

Oberflächenintegral des Vektorfeldes f über der Fläche S.

Alternative Schreibweise: $\int_S f(x) \cdot d\vec{\sigma}$

- Flächeninhalt:

  $$|S| = \int_S 1\;d\sigma.$$

  Beispiel: Oberfläche einer Kugel S mit der Parametrisierung: $\varphi\colon [0,\pi] \times [0,2\pi] \to \mathbb{R}^3$ mit $\varphi(u,v) = (R\,\sin u \cos v, R\,\sin u \sin v, R\,\cos u)^T$.

  $$|S| = \int_{[0,\pi]\times[0,2\pi]} \|N(u,v)\|\;d(u,v)$$

Es gilt

$$N(u,v) = \begin{pmatrix} R\,\cos u \cos v \\ R\,\cos u \sin v \\ -R\,\sin u \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -R\,\sin u \sin v \\ R\,\sin u \cos v \\ 0 \end{pmatrix} = R^2 \sin u \begin{pmatrix} \sin u \cos v \\ \sin u \sin v \\ \cos u \end{pmatrix}$$

und daher

$$\|N(u,v)\| = R^2 \sin u$$

Es folgt:

$$|S| = R^2 \int_{[0,\pi]\times[0,2\pi]} \sin u\; d(u,v) = R^2 \int_0^{2\pi} \left(\int_0^{\pi} \sin u\; du \right)\; dv = 4\pi R^2.$$

- Hat $f(x)$ die Bedeutung einer Flussdichte, dann ist $\int_S f(x)\cdot n(x)\; d\sigma$ der Gesamtfluss durch die Fläche S.

  Beispiel: Der Zylinder $Z = \{(x,y,z)^T \in \mathbb{R}^3 \colon x^2 + y^2 \le R^2,\ z \in [0,H]\}$ wird von einer Wärmequelle mit paralleler Strahlungsrichtung $e = (-1,0,0)^T$ und Intensität I bestrahlt. Dann ist die gesamte aufgenommene Leistung durch

  $$-I \int_S e \cdot n(x)\; d\sigma$$

  gegeben, wobei S die bestrahlte Oberfläche von Z bezeichnet. Eine Parametrisierung von S ist durch $\varphi\colon [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \times [0,H] \to \mathbb{R}^3$ mit $\varphi(u,v) = (R\,\cos u, R\,\sin u, v)^T$ gegeben. Es gilt:

  $$N(u,v) = \begin{pmatrix} -R\,\sin u \\ R\,\cos u \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} R\,\cos u \\ R\,\sin u \\ 0 \end{pmatrix},$$

  Daher:

  $$\begin{aligned} -I \int_{S^+} e \cdot n(x)\; d\sigma &= -I \int_{[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]\times[0,H]} e \cdot N(u,v)\; d(u,v) \\ &= I \int_{[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]\times[0,H]} R\,\cos u\; d(u,v) = IR \int_0^H \left(\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos u\; du \right) dv \\ &= 2IRH \end{aligned}$$

- Ähnlich wie bei Kurvenintegrale bleiben Oberflächenintegrale unverändert, wenn man anstelle der Parametrisierung $\varphi(u,v)$ eine Parametrisierung $\varphi(g(s,t))$ mit

  $$\det g'(s,t) > 0 \quad \text{für alle } r, s$$

  verwendet.

- Flächen und Oberflächenintegrale lassen sich völlig analog auch für Parameterbereiche $K \subset [a,b] \times [c,d]$ erweitern, die abgeschlossen und Jordan-messbar sind.

- Ähnlich wie bei Kurvenintegralen lassen sich auch Oberflächenintegrale auf Flächen erweitern, die sich stetig aus Flächenstücken zusammensetzen lassen, die jeweils eine stetig differenzierbare Parametrisierung besitzen.

7.5 Die Integralsätze von Stokes und Gauß

Satz 7.8 (Stokesscher Integralsatz). *Es gelten folgende Voraussetzungen:*

- *Sei $\varphi|_K$ sei eine Parameterdarstellung der Fläche S, wobei der Parameterbereich $K \subset \mathbb{R}^2$ ein Normalbereich bezüglich beider Achsen ist und $\varphi\colon M \to \mathbb{R}^3$, M offen, $K \subset M \subset \mathbb{R}^2$, zweimal stetig differenzierbar ist.*

- *Sei C die positiv orientierte Randkurve von K mit einer stückweise stetig differenzierbaren Parameterdarstellung $\gamma\colon [a,b] \to \mathbb{R}^2$. Sei ∂S die Kurve in $\mathbb{R}^3$ mit Parameterdarstellung $\varphi \circ \gamma$.*

- *Sei $f\colon A \to \mathbb{R}^3$, A offen, $\varphi(K) \subset A$, ein stetig differenzierbares Vektorfeld.*

Dann gilt:

$$\boxed{\int_S \operatorname{rot} f(x) \cdot n(x)\, d\sigma = \int_{\partial S} f(x) \cdot dx}$$

Beweis.

$$\begin{aligned}
&\int_{\partial S} \begin{pmatrix} f_1(x) \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot dx = \int_a^b f_1(\varphi(\gamma(t))\, (\varphi_1(\gamma(t))'\, dt \\
&= \int_a^b f_1(\varphi(\gamma(t))\, \left(\frac{\partial \varphi_1}{\partial u}(\gamma(t))\gamma_1'(t) + \frac{\partial \varphi_1}{\partial v}(\gamma(t))\gamma_2'(t) \right)\, dt \\
&= \int_a^b \begin{pmatrix} f_1(\varphi(\gamma(t))\, \frac{\partial \varphi_1}{\partial u}(\gamma(t)) \\ f_1(\varphi(\gamma(t))\, \frac{\partial \varphi_1}{\partial v}(\gamma(t)) \end{pmatrix} \cdot \gamma'(t)\, dt = \int_C \begin{pmatrix} f_1(\varphi(u,v))\, \frac{\partial \varphi_1}{\partial u}(u,v) \\ f_1(\varphi(u,v))\, \frac{\partial \varphi_1}{\partial v}(u,v) \end{pmatrix} \cdot d(u,v) \\
&= \int_K \left[\frac{\partial}{\partial u} \left(f_1(\varphi(u,v))\, \frac{\partial \varphi_1}{\partial v}(u,v) \right) - \frac{\partial}{\partial v} \left(f_1(\varphi(u,v))\, \frac{\partial \varphi_1}{\partial u}(u,v) \right) \right] d(u,v) \\
&= \int_K \left[\frac{\partial}{\partial u} f_1(\varphi(u,v))\, \frac{\partial \varphi_1}{\partial v}(u,v) - \frac{\partial}{\partial v} f_1(\varphi(u,v))\, \frac{\partial \varphi_1}{\partial u}(u,v) \right] d(u,v)
\end{aligned}$$

Nun gilt:

$$\frac{\partial}{\partial u} f_1(\varphi(u,v)) = \frac{\partial f_1}{\partial x}(\varphi(u,v))\frac{\partial \varphi_1}{\partial u}(u,v) + \frac{\partial f_1}{\partial y}(\varphi(u,v))\frac{\partial \varphi_2}{\partial u}(u,v) + \frac{\partial f_1}{\partial z}(\varphi(u,v))\frac{\partial \varphi_3}{\partial u}(u,v)$$

und

$$\frac{\partial}{\partial v} f_1(\varphi(u,v)) = \frac{\partial f_1}{\partial x}(\varphi(u,v))\frac{\partial \varphi_1}{\partial v}(u,v) + \frac{\partial f_1}{\partial y}(\varphi(u,v))\frac{\partial \varphi_2}{\partial v}(u,v) + \frac{\partial f_1}{\partial z}(\varphi(u,v))\frac{\partial \varphi_3}{\partial v}(u,v)$$

Daher:

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial}{\partial u} f_1(\varphi(u,v))\,\frac{\partial \varphi_1}{\partial v}(u,v) - \frac{\partial}{\partial v} f_1(\varphi(u,v))\,\frac{\partial \varphi_1}{\partial u}(u,v)\\
&\quad= \frac{\partial f_1}{\partial y}(\varphi(u,v))\left[\frac{\partial \varphi_1}{\partial v}(u,v)\,\frac{\partial \varphi_2}{\partial u}(u,v) - \frac{\partial \varphi_1}{\partial u}(u,v)\,\frac{\partial \varphi_2}{\partial v}(u,v)\right]\\
&\qquad+ \frac{\partial f_1}{\partial z}(\varphi(u,v))\left[\frac{\partial \varphi_1}{\partial v}(u,v)\,\frac{\partial \varphi_3}{\partial u}(u,v) - \frac{\partial \varphi_1}{\partial u}(u,v)\,\frac{\partial \varphi_3}{\partial v}(u,v)\right]\\
&\quad= -\frac{\partial f_1}{\partial y}(\varphi(u,v))\,N_3(u,v) + \frac{\partial f_1}{\partial z}(\varphi(u,v))\,N_2(u,v).
\end{aligned}$$

Also gilt insgesamt:

$$\int_{\partial S} \begin{pmatrix} f_1(x) \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot dx = \int_K \left[-\frac{\partial f_1}{\partial y}(\varphi(u,v))\,N_3(u,v) + \frac{\partial f_1}{\partial z}(\varphi(u,v))\,N_2(u,v)\right]\; d(u,v)$$

Analog erhält man:

$$\int_{\partial S} \begin{pmatrix} 0 \\ f_2(x) \\ 0 \end{pmatrix} \cdot dx = \int_K \left[\frac{\partial f_2}{\partial x}(\varphi(u,v))\,N_3(u,v) - \frac{\partial f_2}{\partial z}(\varphi(u,v))\,N_1(u,v)\right]\; d(u,v)$$

und

$$\int_{\partial S} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ f_3(x) \end{pmatrix} \cdot dx = \int_K \left[-\frac{\partial f_3}{\partial x}(\varphi(u,v))\,N_2(u,v) + \frac{\partial f_3}{\partial y}(\varphi(u,v))\,N_1(u,v)\right]\; d(u,v)$$

Durch Summation folgt:

$$\int_{\partial S} f(x)\cdot dx = \int_K (\operatorname{rot} f)(\varphi(u,v)) \cdot N(u,v)\; d(u,v) = \int_S \operatorname{rot} f(x) \cdot n(x)\; d\sigma.$$

$\square$

Erweiterung auf allgemeinere Flächen

- Der Stokessche Integralsatz gilt auch für Flächen, die sich aus Flächen zusammensetzen lassen, die die Voraussetzungen des Satzes erfüllen: Randkurven im Inneren werden entgegengesetzt durchlaufen und liefern daher keinen Beitrag.

Für die Diskussion des Integralsatzes von Gauß nehmen wir zunächst an, dass sich eine Menge $V \subset \mathbb{R}^3$ folgendermaßen darstellen lässt:

$$V = \{(x_1, x_2, x_3)^T \in \mathbb{R}^3 \colon (x_1, x_2) \in K,\ \varphi_1(x_1, x_2) \leq x_3 \leq \varphi_2(x_1, x_2)\}$$

mit einer abgeschlossenen und beschränkten Menge $K \subset \mathbb{R}^2$ und stetigen Funktionen $\varphi_1 \colon K \to \mathbb{R}$ und $\varphi_2 \colon K \to \mathbb{R}$.

Der Rand $S = \partial V$ der Menge V besteht aus 3 Teilen, der Grundfläche S_1, der Deckfläche S_2 und der Mantelfläche S_3. Wir setzen folgendes voraus:

- Es gibt eine Parameterdarstellung $\phi_1|_{K_1}$ der Grundfläche S_1 mit $\phi_1 \colon M_1 \to \mathbb{R}^3$, M_1 offen, $K_1 \subset M_1$ stetig differenzierbar.
- Es gibt eine Parameterdarstellung $\phi_2|_{K_2}$ der Deckfläche S_2 mit $\phi_2 \colon M_2 \to \mathbb{R}^3$, M_2 offen, $K_2 \subset M_2$ stetig differenzierbar.
- Es gibt eine Parameterdarstellung γ des Randes ∂K mit $\gamma \colon [a, b] \to \mathbb{R}^2$ stückweise stetig differenzierbar.

Wir nennen V einen Normalbereich bezüglich der x_1x_2-Ebene.

Für die weiteren Überlegungen nehmen wir der Einfachheit halber an, dass φ_1 und φ_2 auf einer offenen Menge M mit $K \subset M \subset \mathbb{R}^2$ zur Verfügung stehen, dort stetig differenzierbar sind, und $\phi_1 \colon M \to \mathbb{R}^3$, $\phi_2 \colon M \to \mathbb{R}^3$ mit

$$\phi_1(u, v) = \begin{pmatrix} u \\ v \\ \varphi_1(u, v) \end{pmatrix}, \quad \phi_2(u, v) = \begin{pmatrix} u \\ v \\ \varphi_2(u, v) \end{pmatrix}$$

zur Parametrisierung von S_1 und S_2 verwendet werden können.

Die Mantelfläche lässt sich mit Hilfe von ϕ_3, gegegen durch

$$\phi_3(u, v) = \begin{pmatrix} \gamma_1(u) \\ \gamma_2(u) \\ v \end{pmatrix},$$

mit dem Parameterbereich $K_3 = \{(u, v)^T \in \mathbb{R}^2 \colon u \in [a, b],\ \varphi_1(\gamma(u)) \leq v \leq \varphi_2(\gamma(u))\}$ parametrisieren.

Sei $f \colon A \to \mathbb{R}$ eine stetig differenzierbare Funktion auf der offenen Menge $A \subset \mathbb{R}^3$ mit $V \subset A$.

Dann gilt nach dem Satz von Fubini:

$$\begin{aligned}
&\int_V \frac{\partial f}{\partial x_3}(x)\ dx \\
&= \int_K \left(\int_{\varphi_1(x_1,x_2)}^{\varphi_2(x_1,x_2)} \frac{\partial f}{\partial x_3}(x_1,x_2,x_3)\ dx_3 \right) d(x_1,x_2) \\
&= \int_K f(x_1,x_2,\varphi_2(x_1,x_2))\ d(x_1,x_2) - \int_K f(x_1,x_2,\varphi_1(x_1,x_2))\ d(x_1,x_2).
\end{aligned}$$

Für den Normalvektor auf S_1, der bezüglich V nach außen zeigt, erhält man:

$$N(u,v) = -\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \frac{\partial \varphi_1}{\partial u}(u,v) \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \frac{\partial \varphi_1}{\partial v}(u,v) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial \varphi_1}{\partial u}(u,v) \\ \frac{\partial \varphi_1}{\partial v}(u,v) \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Also

$$\begin{aligned}
&-\int_K f(x_1,x_2,\varphi_1(x_1,x_2))\ d(x_1,x_2) = \int_K f(u,v,\varphi_1(u,v))N_3(u,v)\ d(u,v) \\
&= \int_K \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ f(u,v,\varphi_1(u,v)) \end{pmatrix} \cdot N(u,v)\ d(u,v) = \int_{S_1} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ f(x) \end{pmatrix} \cdot n(x)\ d\sigma.
\end{aligned}$$

Analog erhält man für die Deckfläche:

$$\begin{aligned}
&\int_K f(x_1,x_2,\varphi_2(x_1,x_2))\ d(x_1,x_2) = \int_K f(u,v,\varphi_2(u,v))N_3(u,v)\ d(u,v) \\
&= \int_K \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ f(u,v,\varphi_2(u,v)) \end{pmatrix} \cdot N(u,v)\ d(u,v) = \int_{S_2} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ f(x) \end{pmatrix} \cdot n(x)\ d\sigma,
\end{aligned}$$

wobei $N(u,v)$ wieder der nach außen zeigende Normalvektor ist.

Für den Normalvektor auf S_3 erhält man

$$N(u,v) = \begin{pmatrix} \gamma_1'(u) \\ \gamma_2'(u) \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma_2'(u) \\ -\gamma_1'(u) \\ 0 \end{pmatrix}$$

für alle jene Werte von u, für die die Randkurve von K stetig differenzierbar ist. Daher folgt sofort:

$$\int_{S_3} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ f(x) \end{pmatrix} \cdot n(x)\ d\sigma = \int_{K_3} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ f(\phi_3(u,v)) \end{pmatrix} \cdot N(u,v)\ d\sigma = 0.$$

Insgesamt gilt also:

$$\begin{aligned}\int_V \frac{\partial f}{\partial x_3}(x)\;dx &= \int_{S_1} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ f(x) \end{pmatrix} \cdot n(x)\;d\sigma + \int_{S_2} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ f(x) \end{pmatrix} \cdot n(x)\;d\sigma + \int_{S_3} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ f(x) \end{pmatrix} \cdot n(x)\;d\sigma \\ &= \int_{\partial V} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ f(x) \end{pmatrix} \cdot n(x)\;d\sigma\end{aligned}$$

Falls V ein Normalbereich bezüglich der x_1x_3-Ebene ist, folgt analog

$$\int_V \frac{\partial f}{\partial x_2}(x)\;dx = \int_{\partial V} \begin{pmatrix} 0 \\ f(x) \\ 0 \end{pmatrix} \cdot n(x)\;d\sigma.$$

Falls V ein Normalbereich bezüglich der x_2x_3-Ebene ist, folgt analog

$$\int_V \frac{\partial f}{\partial x_1}(x)\;dx = \int_{\partial V} \begin{pmatrix} f(x) \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot n(x)\;d\sigma.$$

Satz 7.9 (Gaußscher Integralsatz). *Sei V ein Normalbereich bezüglich aller drei Koordinatenebenen mit Oberfläche ∂V. Dann gilt für ein stetig differenzierbares Vektorfeld $f\colon A \to \mathbb{R}^3$ mit A offen und $V \subset A \subset \mathbb{R}^3$:*

$$\boxed{\int_V \operatorname{div} f(x)\;dx = \int_{\partial V} f(x) \cdot n(x)\;d\sigma}.$$

Beweis.

$$\begin{aligned}\int_V \operatorname{div} f(x)\;dx &= \int_V \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(x)\;dx + \int_V \frac{\partial f_2}{\partial x_2}(x)\;dx + \int_V \frac{\partial f_3}{\partial x_3}(x)\;dx \\ &= \int_{\partial V} \begin{pmatrix} f_1(x) \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot n(x)\;d\sigma + \int_{\partial V} \begin{pmatrix} 0 \\ f_2(x) \\ 0 \end{pmatrix} \cdot n(x)\;d\sigma + \int_{\partial V} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ f_3(x) \end{pmatrix} \cdot n(x)\;d\sigma \\ &= \int_{\partial V} f(x) \cdot n(x)\;d\sigma.\end{aligned}$$

□

Erweiterung auf allgemeinere Bereiche

- Der Gaußsche Integralsatz gilt auch für Bereiche, die sich aus Normalbereichen zusammensetzen lassen: Oberflächen im Inneren sind entgegengesetzt orientiert und liefern daher keinen Beitrag.

Anwendungen

Aus dem Gaußschen Integralsatz erhält man:

- Partielle Integration:

$$\int_V \frac{\partial f}{\partial x_i}(x)\, g(x)\; dx = \int_{\partial V} f(x)\, g(x)\, n_i(x)\; d\sigma - \int_V f(x)\, \frac{\partial g}{\partial x_i}(x)\; dx$$

- 1. Greensche Identität:

$$\int_V \Big(g(x)\, \Delta f(x) + \nabla f(x) \cdot \nabla g(x) \Big)\; dx = \int_{\partial V} g(x)\, \frac{\partial f}{\partial n}(x)\; d\sigma$$

  mit $(\partial f/\partial n)(x) = n(x) \cdot \nabla f(x)$

- 2. Greensche Identität:

$$\int_V \Big(g(x)\, \Delta f(x) - f(x)\, \Delta g(x)) \Big) dx = \int_{\partial V} \left(g(x)\, \frac{\partial f}{\partial n}(x) - f(x)\, \frac{\partial g}{\partial n}(x) \right) d\sigma$$