

KV “NUMERIK und OPTIMIERUNG” FÜR MECHATRONIKER - ÜBUNGEN -

WS 2010/2011

AUSGABETERMIN: Donnerstag, 20.01.2011

ABGABETERMIN: **Donnerstag, 17.2.2011, 12:00 Uhr**

NAME (**A-M**):

MATRIKELNUMMER:

Die Übungen sind grundsätzlich alleine zu machen ! Gruppenarbeit ist nicht erlaubt ! Die Ausarbeitung muss sorgfältig abgefasst werden. Wichtig ist, dass nicht nur die Lösung, sondern auch die Lösungsidee (der Weg zur Lösung) beschrieben wird. Programme sind in Form von gut dokumentierten Programmlisten beizulegen. Testresultate sind durch Beilage übersichtlich gestalteter Original-inputs und Original-outputs zu belegen. Das Abgabeformat ist DIN A4. Heften Sie alle Unterlagen zu einem Übungsblatt zusammen !

Die Tutoren **Peter Gangl** (E-Mail: peter_gangl@gmx.at) und **Wolfgang Krendl** (E-Mail: wolfgang.krendl@gmx.at) stehen Ihnen am Mittwoch, von 13:00 – 14:30 im Raum KG 519 (Kopfgebäude, 5. Stock) für eventuell auftretende Fragen zur Verfügung.

4 Numerische Lösung von linearen Gleichungssystemen und Optimierungsproblemen

4.1 Iterative Lösung von linearen Gleichungssystemen

Lösen Sie das lineare Gleichungssystem $K\underline{u} = \underline{f}$,

$$\frac{1}{h} \begin{bmatrix} 1 + \alpha_a h & -1 & & & \\ & 2 & -1 & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ \mathbf{O} & & & -1 & 2 & -1 \\ & & & & -1 & 1 + \alpha_b h \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_0 \\ u_1 \\ \vdots \\ u_{n-1} \\ u_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \tilde{f}_0 + \alpha_a g_a \\ \tilde{f}_1 \\ \vdots \\ \tilde{f}_{n-1} \\ \tilde{f}_n + \alpha_b g_b \end{bmatrix}, \quad (1)$$

aus Übung 2 mit dem Jacobi-Verfahren, dem Gauß-Seidel-Verfahren und dem SOR-Verfahren (wählen Sie geeignete Überrelaxationsparameter ω) für $n = 100$, $n = 1000$ und $n = 10000$,

n	Jacobi	Gauß-Seidel	SOR
100	$I(\varepsilon)$	$I(\varepsilon)$	$I(\varepsilon)$
1000	$I(\varepsilon)$	$I(\varepsilon)$	$I(\varepsilon)$
10000	$I(\varepsilon)$	$I(\varepsilon)$	$I(\varepsilon)$

Tabelle 1: Iterationszahlen $I(\varepsilon)$

d.h. für $h = (b - a)/n = 1/n = 10^{-2}$, $h = 10^{-3}$ und $h = 10^{-4}$, wobei

$$\alpha_a = 10^m \text{ und } \alpha_b = 10^{-m}$$

mit $m = \text{letzte Ziffer der Matrikelnummer} \in \{0, 1, \dots, 9\}$. Berechnen Sie dabei die Komponenten $\tilde{f}_i$, $i = 0, 1, \dots, n$, genauso wie in der Übung 2. Stoppen Sie die Iteration, wenn der Defekttest

$$\|\underline{d}^{(k)}\| \leq \varepsilon \|\underline{d}^{(0)}\| \quad (2)$$

mit dem Defekt $\underline{d}^{(k)} = \underline{f} - K\underline{u}^{(k)}$ und der relativen Genauigkeit $\varepsilon = 10^{-4}$ erfüllt wird. Stellen Sie die Iterationszahlen $k = I(\varepsilon)$ in einer Tabelle der Form Tabelle 1 dar.

4.2 Ein restrigiertes Optimierungsproblem

Lösen Sie das restrigierte, endlichdimensionale Optimierungsproblem:

Finde $x^* = (x_1^*, x_2^*, x_3^*) \in \mathbf{R}^3$:

$$f(x^*) = \min_{\substack{x \in \mathbf{R}^3 \\ \text{s.t. } c_1(x)=0 \text{ and } c_2(x)=0}} f(x), \quad (3)$$

wobei

$$f(x_1, x_2, x_3) = x_1 - x_2 - x_3, \quad (4)$$

$$c_1(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + 2x_2^2 - 1, \quad (5)$$

$$c_2(x_1, x_2, x_3) = 3x_1 - 4x_3. \quad (6)$$

Stellen Sie dazu die Lagrange-Funktion $L(x, \lambda)$ auf und bestimmen Sie die kritischen Punkte aus der Lösung des KKT-Systems (=nichtlineares Gleichungssystem)

$$\nabla L(x, \lambda) = 0 \text{ in } \mathbf{R}^5. \quad (7)$$

Finden Sie aus der Menge der kritischen Punkte das globale Minimum durch Einsetzen !

4.3 Ein Optimalsteuerproblem (50 Zusatzpunkte)

Wir betrachten das unendlichdimensionale Optimalsteuerproblem

$$\begin{aligned} \min_{y \in H^1(0,1) \text{ and } u \in L_2(0,1)} & \int_0^1 (y(x) - y_d(x))^2 dx + \frac{\alpha}{2} \int_0^1 (u(x))^2 dx \quad (8) \\ \text{s.t. } \int_0^1 (y'(x)v'(x) + y(x)v(x)) dx &= \int_0^1 u(x)v(x) dx \quad \forall v \in H^1(0,1) \end{aligned}$$

mit dem gegebenen Temperaturprofil $y_d \in L_2(0,1)$.

4.3.1 FEM - Diskretisierung (10 Zusatzpunkte)

Diskretisieren Sie das unendlichdimensionale Optimalsteuerproblem (8) mit linearen Finiten Elementen und geben Sie das diskretisierte (endlichdimensionale) Optimierungsproblem an !

4.3.2 KKT - System (10 Zusatzpunkte)

Schreiben Sie die Lagrange-Funktion und das KKT - System (= hier ein lineares Gleichungssystem !) auf !

4.3.3 Programm (20 Zusatzpunkte)

Schreiben Sie ein Programm zur Generierung und Lösung des KKT-Systems (Eingabedaten: $y_d(\cdot)$, α , $h = 1/n$); Ausgabedaten: y_h und u_h !

4.3.4 Test (10 Zusatzpunkte)

Testen Sie Ihr Programm für das gewünschte Temperaturprofil (desired state) $y_d(x) = 43^\circ C$ für $x \in [0.4, 0.6]$ und $y_d(x) = 37^\circ$ sonst. Stellen Sie die berechnete optimale Steuerung $u_h(x)$ und den dazugehörigen Temperaturverlauf $y_h(x)$ sowie das gewünschte Temperaturprofil $y_d(x)$ in einer Abbildung grafisch dar !