KV "NUMERIK und OPTIMIERUNG" FÜR MECHATRONIKER

- ÜBUNGEN -

WS 2010/2011

AUSGABETERMIN: Donnerstag, 9.12.2010

ABGABETERMIN: **Donnerstag, 13.1.2011, 12:00 Uhr**

NAME (**A-M**):

MATRIKELNUMMER:

Die Übungen sind grundsätzlich alleine zu machen ! Gruppenarbeit ist nicht erlaubt ! Die Ausarbeitung muss sorgfältig abgefasst werden. Wichtig ist, dass nicht nur die Lösung, sondern auch die Lösungsidee (der Weg zur Lösung) beschrieben wird. Programme sind in Form von gut dokumentierten Programmlisten beizulegen. Testresultate sind durch Beilage übersichtlich gestalteter Original-inputs und Original-outputs zu belegen. Das Abgabeformat ist DIN A4. Heften Sie alle Unterlagen zu einem Übungsblatt zusammen !
Die Tutoren **Peter Gangl** (E-Mail: peter_gangl@gmx.at) und **Wolfgang Krendl** (E-Mail: wolfgang.krendl@gmx.at) stehen Ihnen am Mittwoch, von 13:00 – 14:30 im Raum KG 519 (Kopfgebäude, 5. Stock) für eventuell auftretende Fragen zur Verfügung.

---

3 Numerische Lösung von 1D RWA mit der FEM

3.1 Variationsformulierung

Schreiben Sie die Variationsformulierung der eindimensionalen (1D) Randwertaufgabe (RWA)

$$-(\lambda u'(x))' + c\rho w u'(x) + \alpha u(x) = f(x), \;\; x \in (a,b), \tag{1}$$

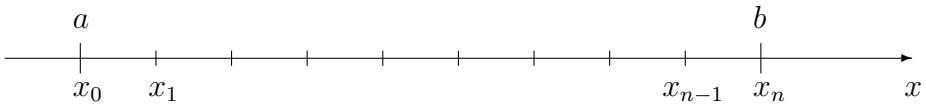
mit den Randbedingungen (RB) $u(a) = g_a$ und $-\lambda(b)u'(b) = \alpha_b(u(b) - g_b)$ in der Form

$$\begin{aligned} &\text{Ges. } u \in \mathbf{V}_g : a(u,v) = < F, v > \quad \forall\, v \in \mathbf{V}_0, \\ &\text{d.h. } \;\; \mathbf{V}_g = ? \;\; \mathbf{V}_0 = ? \;\; a(u,v) = ? \;\; < F, v > = ? \end{aligned} \tag{2}$$

auf, wobei λ, c, ρ gegebene positive Konstanten sind, α, α_b gegebene nichtnegative Konstanten sind, $w, g_a, g_b \in R$ ebenfalls gegebene, aber beliebige Konstanten sind und $f \in L_2(a,b)$ die gegebene rechte Seite der Differentialgleichung (1) ist.

3.2 Programmierbeispiel

Schreiben und implementieren Sie ein FE–Programm zur numerischen Lösung von (2) mit konstanten Koeffizienten λ, c, ρ, w, α unter Verwendung linearer Elemente auf einer gleichmäßigen Vernetzung mit n Elementen.



Eingangsdaten: λ, c, ρ, w, α, $f(x), a, b$ und RB (1., 2., 3. Art) für $x = a$ und $x = b$ sowie n.

Ausgabedaten: a) Tabelle: x_i, u_i $(\approx u(x_i))$
b) Grafik (falls möglich)

3.3 Testbeispiele

Lösen Sie mit Ihrem FE–Programm die 1D RWA (2) mit folgenden Daten:

$a = 0,\ b = 1,$
$\lambda = 1,$
$c = 1,\ \rho = 1,$
$w = (k + 1) \cdot 10,$ wobei $k :=$ letzte Ziffer der Matrikelnummer,
$\alpha = 0,$
$f = 0,$
$g_a = 0,\ g_b = 1,\ \alpha_b = 10^6.$

Testen Sie mit verschiedenen (geraden) n, und vergrößern Sie n so lange, bis Sie eine „zufriedenstellende“ Lösung erhalten ! Finden Sie das kleinste n, das physikalisch sinnvolle Lösungen liefert !

3.4 Diskretisierungsfehler

Lösen Sie die RWA aus Punkt 3.3 analytisch ! Berechnen Sie den relativen Fehler

$$e_{\text{rel}} := \frac{\max\limits_{i=\overline{0,n}} |u(x_i) - u_h(x_i)|}{\max\limits_{j=\overline{0,n}} |u(x_i)|} ,$$

in der (diskreten) Maximumnorm, wobei $u(x)$ die analytisch berechnete exakte Lösung der RWA und $u_i = u_h(x_i),\ \ i = \overline{0, n}$ die mit dem FE–Programm berechnete FE–Näherungslösung sind. Stellen Sie den relativen Fehler e_{rel} in Abhängigkeit von n (bzw. $h = (b - a)/n = 1/n$) in einer Tabelle oder grafisch dar !

3.5 Zusatzaufgabe zur numerischen Integration (25 Zusatzpunkte)

Berechnen Sie das Integral

$$I = \int_0^1 \sin(k\pi x)\, e^x \, dx$$

analytisch und näherungsweise durch die zusammengesetzte (= summierte = verallgemeinerte) Trapetzregel I_n^{TR} und durch die zusammengesetzte Simpsonregel I_n^{SR} für $n = 1, 2, 4, 8, 16, 32$ und 64, wobei $k :=$ letzte Ziffer der Matrikelnummer + 1. Vergleichen Sie die absoluten Fehler $|I - I_n|$. Wie groß müssen Sie n wählen, damit die relativen Fehler $|I - I_n| \,/\, |I| \leq 10^{-4}$ sind !