KV "NUMERIK und OPTIMIERUNG" FÜR MECHATRONIKER

- ÜBUNGEN -

WS 2010/2011

AUSGABETERMIN: Donnerstag, 11.11.2010

ABGABETERMIN: **Donnerstag, 9.12.2010, 12:00 Uhr**

NAME (**A-M**):

MATRIKELNUMMER:

Die Übungen sind grundsätzlich alleine zu machen ! Gruppenarbeit ist nicht erlaubt ! Die Ausarbeitung muss sorgfältig abgefasst werden. Wichtig ist, dass nicht nur die Lösung, sondern auch die Lösungsidee (der Weg zur Lösung) beschrieben wird. Programme sind in Form von gut dokumentierten Programmlisten beizulegen. Testresultate sind durch Beilage übersichtlich gestalteter Original-inputs und Original-outputs zu belegen. Das Abgabeformat ist DIN A4. Heften Sie alle Unterlagen zu einem Übungsblatt zusammen !
Die Tutoren **Peter Gangl** (E-Mail: peter_gangl@gmx.at) und **Wolfgang Krendl** (E-Mail: wolfgang.krendl@gmx.at) stehen Ihnen am Mittwoch, von 13:00 – 14:30 im Raum KG 519 (Kopfgebäude, 5. Stock) für eventuell auftretende Fragen zur Verfügung.

---

2 Auflösung tridiagonaler Gleichungssysteme

2.1 Programmierbeispiel

Implementieren Sie das in der Vorlesung vorgestellte Verfahren zur Auflösung tridiagonaler Gleichungssysteme (GS) $K\underline{u} = \underline{f}$,

$$\begin{bmatrix} c_1 & b_1 & & & \\ a_2 & c_2 & b_2 & & \mathbf{O} \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ \mathbf{O} & & a_{n-1} & c_{n-1} & b_{n-1} \\ & & & a_n & c_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_{n-1} \\ u_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ \vdots \\ f_{n-1} \\ f_n \end{bmatrix}, \tag{1}$$

in einer von Ihnen gewählten Programmiersprache. Eingangsdaten (INPUT) sind die Dimension n und die Koeffizienten der Systemmatrix K und der rechten Seite $\underline{f}$. Ausgangsdaten (OUTPUT) sind die Komponenten des Lösungsvektors $\underline{u}$!

2.2 Testbeispiel

Analog zur Vorlesung (Abschnitt 2.2) betrachten wir nun das stationäre, eindimensionale Wärmeleitproblem

Gesucht ist $u \in C^2(0,1) \cup C^1[0,1]$ so, dass die Differentialgleichung

$$-u''(x) = f(x) := \sin(k\pi x) \quad \forall\, x \in (a,b) := (0,1) \tag{2}$$

und die Randbedingungen

$$u'(0) = \alpha_a\,(u(0) - g_a) \quad \text{und} \quad -u'(1) = \alpha_b\,(u(1) - g_b) \tag{3}$$

erfüllt werden, mit $g_a = 1$, $g_b = 4$ und den noch frei wählbaren Wärmeübergangszahlen α_a und α_b.

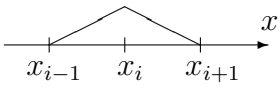
Die FE–Diskretisierung mit linearen Elementen auf gleichmäßigem Gitter mit der Schrittweite $h = 1/n$ führt auf das GS (überprüfen Sie das !)

$$\frac{1}{h}\begin{bmatrix} 1+\alpha_a h & -1 & & & \\ -1 & 2 & -1 & & \mathbf{O} \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ \mathbf{O} & & -1 & 2 & -1 \\ & & & -1 & 1+\alpha_b h \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_0 \\ u_1 \\ \vdots \\ u_{n-1} \\ u_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \tilde{f}_0 + \alpha_a g_a \\ \tilde{f}_1 \\ \vdots \\ \tilde{f}_{n-1} \\ \tilde{f}_n + \alpha_b g_b \end{bmatrix} \tag{4}$$

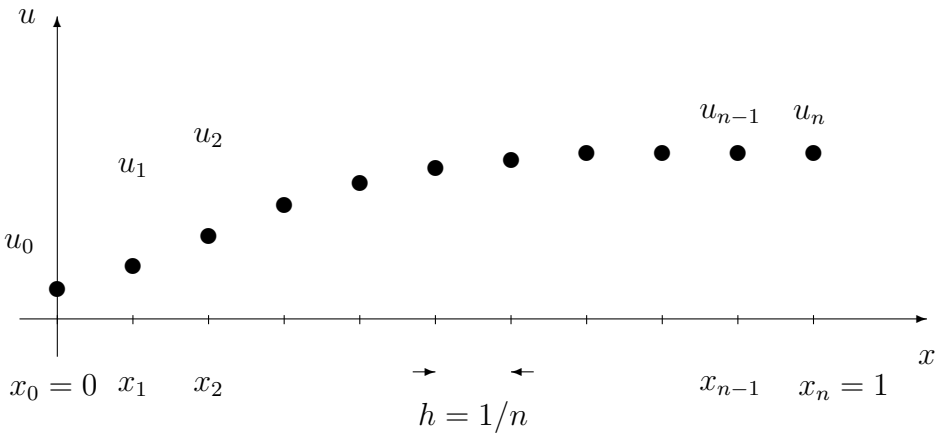
mit

$$\boxed{\alpha_a = 10^k \text{ und } \alpha_b = 10^{-k}},$$

wobei k = letzte Ziffer der Matrikelnummer $\in \{0,1,\ldots,9\}$. Berechnen Sie die noch fehlenden Komponenten $\tilde{f}_i,\ i = 0,1,\ldots,n$, analytisch oder mit Hilfe der Mittelpunktsregel (Gauß 1) !
Lösen Sie das GS (4) für $n = 100$ und $n = 1000$, d.h. für $h = (b-a)/n = 1/n = 10^{-2}$ und $h = 10^{-3}$. Stellen Sie die FE–Näherungslösung $u_h(x) = u_0\varphi_0(x) + u_1\varphi_1(x) + \ldots + u_n\varphi_n(x)$

mit $\varphi_i(x) =$ 

(stückweise lineare Ansatzfunktionen) grafisch dar, d.h.



Lösen Sie die Randwertaufgabe analytisch und geben Sie den maximalen Fehler

$$\max_{i=0,1,\ldots,n} |u(x_i) - u_h(x_i)|$$

in den Gitterpunkten für $h = 10^{-2}$ und $h = 10^{-3}$ an !

2.3 Klassische Formulierung und Variationsformulierung

Leiten Sie die Variationsformulierung

$$\text{Ges. } u \in V_g : \; a(u,v) = \langle F, v \rangle \;\; \forall v \in V_0 \tag{5}$$

für das Testbeispiel (2)-(3) aus Abschnitt 2.2 her, d.h. geben Sie die Menge V_g der zulässigen Funktionen, den Testraum V_0, die Bilinearform $a(\cdot,\cdot) : V \times V \to R$ und die Linearform $\langle F, \cdot \rangle : V_0 \to R$ für unser konkretes Testbeispiel (2)-(3) an ! Zeigen Sie, dass eine hinreichend glatte Lösung $u \in C^2[a,b]$ des Variationsproblems (5) auch eine klassische Lösung ist, d.h. eine Lösung des Randwertproblems (2)-(3) ist.

2.4 Fakultative Zusatzaufgabe: Implizite Zeitintegrationsschemata (25 Zusatzpunkte)

Man löse das instationäre Wärmeleitproblem aus der Übung 1 mit den folgenden impliziten Zeitintegrationsverfahren:

a) Rein implizites Schema (impliziter Euler: $\sigma = 1$)

$$\begin{cases} \dfrac{T_i^{j+1} - T_i^j}{\Delta t} = \dfrac{a}{(\Delta x)^2} \left(T_{i-1}^{j+1} - 2T_i^{j+1} + T_{i+1}^{j+1} \right), \; i = \overline{1, n-1}, \; j = \overline{0, m-1} \\ \underline{\text{RB:}} \; T_0^j = T_a(t_j), \; T_n^j = T_b(t_j), \; j = 1, \ldots, m \\ \underline{\text{AB:}} \; T_i^0 = T_A(x_i), \; i = 0, 1, \ldots, n \end{cases} \tag{6}$$

Zeitschritt: $\Delta t = 36'' = 10^{-2}[h]$;

b) Crank-Nicolson–Schema ($\sigma = 1/2$, vgl. Pkt. 2.3. b):

$$\begin{cases} \dfrac{T_i^{j+1} - T_i^j}{\Delta t} = \dfrac{a}{2(\Delta x)^2}\left(T_{i-1}^{j+1} - 2T_i^{j+1} + T_{i+1}^{j+1}\right) + \dfrac{a}{2(\Delta x)^2}\left(T_{i-1}^{j} - 2T_i^{j} + T_{i+1}^{j}\right), \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad i = \overline{1, n-1};\ j = \overline{0, m-1} \\ \underline{\text{RB:}}\ T_0^j = T_a(t_j),\ T_n^j = T_b(t_j),\ j = 1, \ldots, m \\ \underline{\text{AB:}}\ T_i^0 = T_A(x_i),\ i = 0, 1, \ldots, n \end{cases} \tag{7}$$

Zeitschritt: $\Delta t = 36'' = 10^{-2}[h]$.

Sowohl in (6) als auch in (7) ist auf jedem Zeitschritt zur Bestimmung der $[T_i^{j+1}]_{i=\overline{1,n-1}}$ ein tridiagonales lineares GS zu lösen. Benutzen Sie dazu das von Ihnen unter Punkt 2.1 programmierte Verfahren.