KV “NUMERIK und OPTIMIERUNG” FÜR MECHATRONIKER
- ÜBUNGEN -

WS 2010/2011

AUSGABETERMIN: Donnerstag, d. 14.10.2010

ABGABETERMIN: **Donnerstag, d. 11.11.2010, 12:00 Uhr**

NAME (**N-Z**):

MATRIKELNUMMER:

Die Übungen sind grundsätzlich alleine zu machen ! Gruppenarbeit ist nicht erlaubt ! Die Ausarbeitung muss sorgfältig abgefasst werden. Wichtig ist, dass nicht nur die Lösung, sondern auch die Lösungsidee (der Weg zur Lösung) beschrieben wird. Programme sind in Form von gut dokumentierten Programmlisten beizulegen. Testresultate sind durch Beilage übersichtlich gestalteter Original-inputs und Original-outputs zu belegen. Das Abgabeformat ist DIN A4. Heften Sie alle Unterlagen zu einem Übungsblatt zusammen !
Die Tutoren **Peter Gangl** (E-Mail: peter_gangl@gmx.at) und **Wolfgang Krendl** (E-Mail: wolfgang.krendl@gmx.at) stehen Ihnen am Mittwoch, von 13:00 – 14:30 im Raum KG 519 (Kopfgebäude, 5. Stock) für eventuell auftretende Fragen zur Verfügung.

---

1 Simulation der Schwingungen einer fest eingespannten Saite mittels Differenzenapproximationen

1.1 Programmierbeispiel

Die mathematische Modellierung von Schwingungen einer fest eingespannten Saite der Länge $L = 1$ führt unter Annahme kleiner Auslenkungen auf die Anfangsrandwertaufgabe (ARWA)

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = f(x,t), \;\; x \in (0,1), \;\; t \in (0, t_E), \tag{1}$$

$$\begin{aligned} \underline{\text{AB:}} \;\; & u(x,0) &= u_0(x), \;\; x \in [0,1], \\ & \frac{\partial u}{\partial t}(x,0) &= u_1(x), \;\; x \in [0,1], \end{aligned}$$

$$\underline{\text{RB:}} \;\; u(0,t) = u(1,t) = 0, \;\; t \in (0, t_E].$$

Führen Sie eine Computersimulation dieses Schwingungsvorganges mit folgenden gegebenen Daten durch:

1. mit verschwindender rechter Seite f (Erregung):

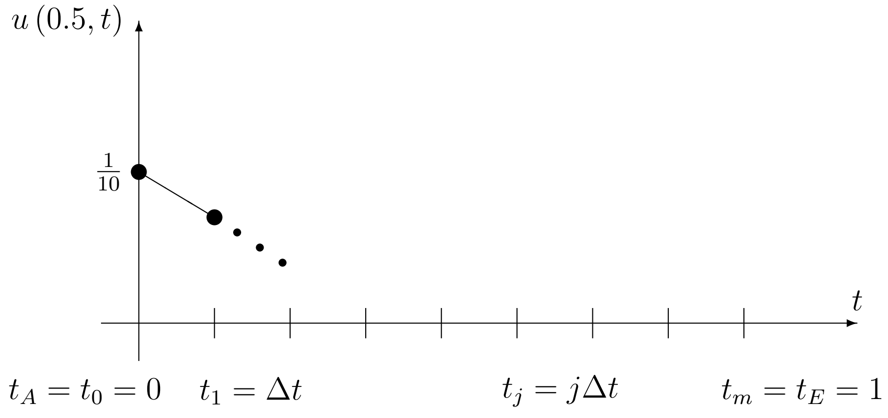
$$\begin{aligned}
&t_E = 1, a = 1, \quad f(x,t) = 0 \quad \forall\, (x,t) \in Q = (0,1) \times (0,t_E), \\
&u_1(x) = 0 \quad \forall\, x \in [0,1], \\
&u_0(x) = \left\{ \begin{array}{ll} \frac{1}{10}\,x & , x \in [0,0.5] \\ \frac{1}{10}\,(1-x), & x \in [0.5,1] \end{array} \right\}, \text{falls } k \in \{0,2,4,6,8\}, \\
&u_0(x) = \left\{ \begin{array}{l} x - 0.3,\ x \in [0.3,0.5] \\ 0.7 - x,\ x \in [0.5,0.7] \\ \quad 0 \quad , \quad \text{sonst} \end{array} \right\}, \text{falls } k \in \{1,3,5,7,9\},
\end{aligned} \tag{2}$$

2. mit harmonischer Erregung:

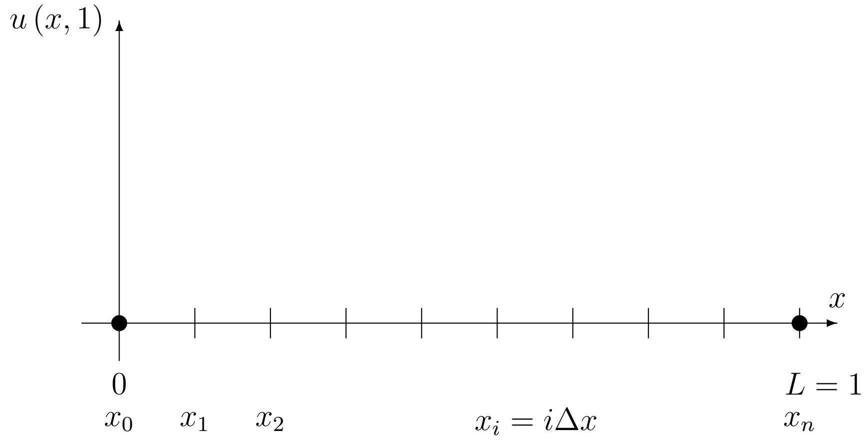
$$\begin{aligned}
&t_E = 1, a = 1, \quad f(x,t) = \sin k\pi t \quad \forall\, (x,t) \in Q = (0,1) \times (0,t_E), \\
&u_0(x) = \sin 2\pi x \quad \forall\, x \in [0,1], \\
&u_1(x) = 0 \quad \forall\, x \in [0,1],
\end{aligned} \tag{3}$$

wobei $k :=$ letzte Ziffer der Matrikelnummer. Stellen Sie

a) die Schwingung $u(0.5,t)$ im Saitenmittelpunkt $x = 0.5$:



b) und die Schwingung $u(x,1)$ zum Zeitpunkt $t_* = t_E = 1$:



graphisch dar.

Wählen Sie zur Orts– und Zeitdiskretisierung das in der Vorlesung (Kapitel 1) angegebene explizite Differenzenschema (8), schreiben Sie den dazugehörigen Algorithmus auf und implementieren Sie dann den Algorithmus in einer von Ihnen gewählten Programmiersprache ! Führen Sie die Computersimulation mit der Ortsschrittweite $h = \Delta x = 0.01$ und mit zwei von Ihnen gewählten Zeitschrittweiten $\tau = \Delta t \leq 0.01$ durch ! Interpretieren Sie die erhaltenen Ergebnisse.

1.2 Approximationsuntersuchung

Untersuchen Sie die Genauigkeit der Approximationen

a) des Differentialausdrucks

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x_i, t_j) - a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x_i, t_j)$$

durch den Differenzenausdruck

$$\frac{1}{\Delta t^2}(u(x_i, t_{j+1}) - 2u(x_i, t_j) + u(x_i, t_{j-1})) - a^2 \frac{1}{\Delta x^2}(u(x_{i-1}, t_j) - 2u(x_i, t_j) + u(x_{i+1}, t_j)),$$

d.h. schätzen Sie den Approximationsfehler

$$\left| \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x_i, t_j) - a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x_i, t_j) - \left[\frac{u(x_i, t_{j+1}) - 2u(x_i, t_j) + u(x_i, t_{j-1})}{\Delta t^2} - a^2 \frac{u(x_{i-1}, t_j) - 2u(x_i, t_j) + u(x_{i+1}, t_j)}{\Delta x^2} \right] \right| \leq ?$$

für alle $i \in \{1, 2, \ldots, n-1\}$ und $j \in \{1, 2, \ldots, m-1\}$ ab,

b) und der Anfangsbedingungen $|u(x_i, t_1) - (u_0(x_i) + \Delta t \cdot u_1(x_i))| \leq ?$ $\qquad (t_1 = \Delta t)$

mittels Taylorentwicklung !