■ **Satz 5.10:** $(11)_F \longrightarrow F(x) = 0$ in $\mathbb{R}^n$

Vor.: Sei $F: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ einmal stetig partiell diffbar,
$x^* \in \mathbb{R}^n$ sei Nullstelle von F, d.h. $F(x^*) = 0$.
$\nabla F(x^*) =: J(x^*)$ sei regulär und $\beta = \| J(x^*)^{-1} \| > 0$

Bh.: Dann ist das NEWTON-Verfahren $(11)_F$ für hinreichend gute Startwerte wohldefiniert und es konvergiert q-superlinear gegen x^*, d.h.

$$\lim_{k \to \infty} \underbrace{\frac{\| x^* - x^{(k+1)} \|}{\| x^* - x^{(k)} \|}}_{= q_k} = \lim_{k \to \infty} q_k = 0$$

$$\| x^* - x^{(k+1)} \| \le q_k \| x^* - x^{(k)} \| , \quad q_k \to 0 \quad k \to \infty$$

Falls ∇F in x^* Lipschitz-stetig ist, d.h. $\exists\, L = \text{const} > 0$:

$$(*) \quad \| \nabla F(x) - \nabla F(x^*) \| \le L \| x - x^* \| \quad \forall x \in \bar{U}(x^*),$$

dann konvergiert das NEWTON-Verfahren q-quadratisch, d.h. es gilt (13).

Beweis: $x = x^{(k)}$, $F' = \nabla F = J = J_F =$ Jacobi-Matrix

$$x^{(k+1)} - x^* = \underbrace{x^{(k)} - F'(x^{(k)})^{-1} F(x^{(k)})}_{x^{(k+1)}} - x^*$$

$$= F'(x)^{-1} \left[0 - F(x) - F'(x)(x^* - x) \right]$$

$$= F'(x)^{-1} \left[\overset{\shortparallel}{F(x^*)} - (F(x) + F'(x)(x^* - x)) \right]$$

$$\| x^{(k+1)} - x^* \| \le \| F'(x)^{-1} \| \underbrace{\| F(x^*) - (F(x) + F'(x)(x^* - x)) \|}_{o(\| x - x^* \|) \quad F \in C^1 \,!}$$

$*$

$$\le \| F'(x)^{-1} \| \, \| F(x^*) - F(x) - F'(x)(x^* - x) \|$$

$\exists\, \xi \in (0,1)$

$$\le \| F'(x)^{-1} \| \, \| (F'(x + \xi(x^* - x)) - F'(x))(x^* - x) \|$$

$$\le \| F'(x)^{-1} \| \, \| \underbrace{(F'(x + \xi(x^* - x)) - F'(x^*)}_{} + \underbrace{F'(x^*) - F'(x)}_{} \| \, \| x^* - x \|$$

$$\le \| F'(x)^{-1} \| \left(L \| x + \xi(x^* - x) - x^* \| + L \| x^* - x \| \right) \| x^* - x \|$$

$(*)$ F' Lip $\le \dfrac{2 \beta L}{1 - \beta L \| x^* - x \|} \| x^* - x \|^2 \le C \| x^* - x \|^2$. q.e.d.