

4. Zeitabhängige (instationäre) Probleme

4.1. Explizite Zeitintegrationsschemata

■ Btr. zunächst die Wärmeleitungsgleichung (A-M):

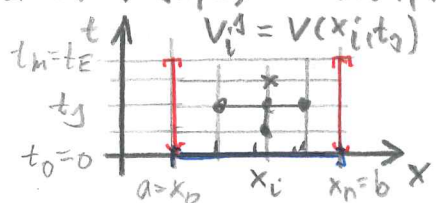
Ges. $u(x,t) := T(x,t) = \text{Temperaturfeld}$:

$$(1) \quad \begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t}(x,t) - \underbrace{\kappa}_{\lambda/\text{gc}} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,t) = \underbrace{f(x,t)}_0 \quad \forall x \in (a,b), \forall t \in (0, t_E) \\ \text{RB: } u(a,t) = u_a(t), u(b,t) = u_b(t) \quad \forall t \in (0, t_E) \\ \text{AB: } u(x,0) = u_0(x) \quad \forall x \in [a,b] \end{cases}$$

■ Explizites Differenzenschema aus PKT. 1.2.1: (=

= 2. Differenzenquotient in Ort (und vorwärtiger Differenzenquotient in der Zeit (= explizit Euler):

Ges. $V(x,t) \approx u(x,t)$ im Raum-Zeitgitter ^{"Mutter" aller expliziten Verfahren}



$$x = x_i = a + ih, i = \overline{0, n}, h = \Delta x = \frac{b-a}{n}, \\ t = t_j = j\tau, j = \overline{0, m}, \tau = \Delta t = t_E/m$$

$$(2) \quad \begin{cases} \frac{V_i^{j+1} - V_i^j}{\tau} - \kappa \frac{V_{i-1}^j - 2V_i^j + V_{i+1}^j}{h^2} = f_i^j := f(x_i, t_j) \\ \text{RB: } V_0^j = u_a(t_j), V_n^j = u_b(t_j), j = \overline{0, 1, \dots, m} \\ \text{AB: } V_i^0 = u_0(x_i), i = \overline{0, 1, \dots, n-1, n} \end{cases}$$

$i = \overline{1, n-1}, j = \overline{0, m-1}$

$\rightarrow \text{Kompatibilität}$

■ Frage! Diskretisierungsfehler und diskrete Konvergenz?

$$z_i^j = z(x_i, t_j) := u(x_i, t_j) - V(x_i, t_j)$$

(1) (2)

$$\|z\|_{h\tau} := \max_{\substack{i=\overline{0, n} \\ j=\overline{0, m}}} |V(x_i, t_j) - u(x_i, t_j)| \leq c(h^2 + \tau^2) \xrightarrow{h, \tau \rightarrow 0} 0$$

diskrete Norm 2.B. = V_i^j

Fehlerschema: $z_i^j = z(x_i, t_j) := u(x_i, t_j) - v(x_i, t_j)$ (1) (2)

$$z_{t,i}^j - \tau z_{\bar{x}x,i}^j = u_{t,i}^j - \tau u_{\bar{x}x,i}^j - \underbrace{(v_{t,i}^j - \tau v_{\bar{x}x,i}^j)}_{\stackrel{(2)}{=} f_i^j = f(x_i, t_j) = \frac{\partial u}{\partial t}(x_i, t_j) - \tau \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x_i, t_j)} =$$

$$= \frac{u(x_i, t_j + \tau) - u(x_i, t_j)}{\tau} - \tau \frac{u(x_i - h, t_j) - 2u(x_i, t_j) + u(x_i + h, t_j))}{h^2} - \left[\frac{\partial u}{\partial t}(x_i, t_j) - \tau \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x_i, t_j) \right] =: \psi_i^j = O(\tau + h^2)$$

Tatsächlich (AB1, (A-M), Aufgabe 1.2. c)): Taylor

(3) $\psi_i^j = \psi(x_i, t_j) = \left[\frac{u(x_i, t_j + \tau) - u(x_i, t_j)}{\tau} - \frac{\partial u}{\partial t}(x_i, t_j) \right] -$

$$= O(\tau)$$

$$- \tau \left[\frac{u(x_i - h, t_j) - 2u(x_i, t_j) + u(x_i + h, t_j))}{h^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x_i, t_j) \right]$$

$$= O(h^2)$$

$$= O(\tau + h^2) = \text{Approximationsfehler (Konsistenzfehler)}$$

Genauer: In AB1 (A-M), Aufgabe 1.2 c) haben Sie gezeigt

$$|\psi_i^j| \leq \frac{1}{2} \max_{t \in [t_j, t_{j+1}]} \left| \frac{\partial^2 u(x_i, t)}{\partial t^2} \right| \tau + \frac{1}{12} \max_{x \in [x_{i-1}, x_{i+1}]} \left| \frac{\partial^4 u(x, t_j)}{\partial x^4} \right| h^2$$

$$\leq C_A(u) (\tau + h^2)$$

$\forall i = \overline{1, n-1} \quad \forall j = \overline{1, m-1}$ vorausgesetzt, dass $u \in C^{4,2}(\bar{Q})$

Resultat: Fehler z löst das Differenzenschema

(4) $z_{t,i}^j - \tau z_{\bar{x}x,i}^j = \psi_i^j = O(\tau + h^2), i = \overline{1, n-1}, j = \overline{0, m-1}$

RB: $z_0^j = z_n^j = 0, j = 1, 2, \dots, m$

AB: $z_i^0 = u(x_i, 0) - v_i^0 = u_0(x_i) - u_0(x_i) = 0, i = \overline{0, n}$

d.h. $z_{t,i}^j = \tau z_{\bar{x}x,i}^j + \psi_i^j$ oder

(4) $z_i^{j+1} = z_i^j + \tau \frac{\tau}{h^2} [z_{i-1}^j - 2z_i^j + z_{i+1}^j] + \tau \psi_i^j, i = \overline{1, n-1}, j = \overline{0, m-1}$

+ RB + AB $\dots, m-1,$

■ Analysis der Fehlerfortpflanzung:

1. Heuristisch (nicht Korrekt!)

$$z_i^{j+1} = z_i^j + \alpha \frac{\tau}{h^2} \left[\cancel{z_{i-1}^j} - 2z_i^j + \cancel{z_{i+1}^j} \right] + \tau \psi_i^j$$

$$z_i^{j+1} = \underbrace{\left(1 - 2\alpha \frac{\tau}{h^2}\right)}_{=: q} z_i^j + \tau \psi_i^j$$

$$z_i^{j+1} = q z_i^j + \tau \psi_i^j$$

$$= q (q z_i^{j-1} + \tau \psi_i^{j-1}) + \tau \psi_i^j$$

$$= \dots$$

$$= q^{j+1} z_i^0 + \tau (q^j \psi_i^0 + q^{j-1} \psi_i^1 + \dots + q \psi_i^j + \psi_i^j)$$

Stabilität $\Leftrightarrow |q| \leq 1$ (e.g. $q=1.1$, $j=999$, $q^{j+1} \approx 10^{41}$)

Falls

(*) $|q| = \left|1 - 2\alpha \frac{\tau}{h^2}\right| \leq 1$ gdw. $\boxed{\tau \leq \frac{h^2}{2}}$ ∇
0

dann gilt offenbar:

$$|z_i^{j+1}| \leq \underbrace{|z_i^0|}_{=0} + \underbrace{\tau(1+1)}_{=t_1+t \leq t_E} \underbrace{\max_{k=0,j} |\psi_i^k|}_{=O(\tau+h^2)}$$

bzw. = Rundungsfehler (Rdf)

$$\approx 10^{-16} \cdot \max_{x \in [a,b]} |u_0(x)|$$

$$\leq t_E C_A(u) (\tau + h^2)$$

Allerdings: HEURISTIK & Stabilitätsbed. stimmt noch nicht ganz!

→ "ist in der Mathematik gefährlich!"

2. Mathematisch Korrekt:

$$\psi^j = \begin{bmatrix} \psi_1^j \\ \vdots \\ \psi_{n-1}^j \end{bmatrix}$$

Vektorform von (4):

$$(4) \quad z^{j+1} := \begin{bmatrix} z_1^{j+1} \\ \vdots \\ z_{n-1}^{j+1} \end{bmatrix} = I z^j - \alpha \frac{\tau}{h^2} \begin{bmatrix} 2 & -1 & & \\ -1 & 2 & -1 & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & -1 & 2 & -1 \\ & & & -1 & 2 \end{bmatrix} z^j + \tau \psi^j \in \mathbb{R}^{n-1}$$

$$= (I - \alpha \frac{\tau}{h^2} A) z^j + \tau \psi^j = A z^j + \tau \psi^j$$

Dreiecksung!

$$\|z^{j+1}\| = \|(I - \alpha \frac{\tau}{h^2} A) z^j + \tau \psi^j\| \leq$$

$$\leq \|(I - \alpha \frac{\tau}{h^2} A) z^j\| + \tau \|\psi^j\|$$

$$\|Mx\| \leq \|M\| \|x\|$$

zugeordnete
MatrixnormZumindest
verträgl.

$$\leq \|I - \alpha \frac{\tau}{h^2} A\| \|z^j\| + \tau \|\psi^j\|$$

$$=: q$$

$$\|z^{j+1}\| \leq q \|z^j\| + \tau \|\psi^j\| \leq \dots \leq$$

$$\leq q^{j+1} \|z^0\| + \tau (q^j \|\psi^0\| + q^{j-1} \|\psi^1\| + \dots + \|\psi^j\|)$$

$$\leq \|z^0\| + t_{j+1} \max_{k=0,1} \|\psi^k\| \leq t_E C_A(u) (\tau + h^2)$$

$\uparrow$
 $= 0$
 bzw.
 Rdf

$\underbrace{\hspace{10em}}_{0(\tau + h^2)}$

(5)

$$\text{Stabilitäts bed.: } q = \|I - \alpha \frac{\tau}{h^2} A\| \leq 1$$

 $z \in \mathbb{R}^{n-1}$

$$\|\cdot\| = \|\cdot\|_2$$

z.B. Vektornorm = Euklidische Norm: $\|z\|_2 = \|z\|_{\mathbb{R}^{n-1}} = \sqrt{\sum_{i=1}^{n-1} (z_i)^2}$ Zugeordnete Matrixnorm = Spektralnrm: $\|M\|_2 = \max_{EW} |\lambda(M)|$

Spektralnrm = Spektralradius (hier!)

$$\uparrow$$

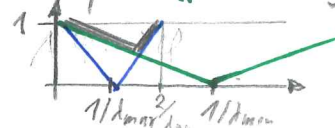
$$M = M^T$$

$$q = \|I - \alpha \frac{\tau}{h^2} A\|_2 = \max \left\{ \left| 1 - \alpha \frac{\tau}{h^2} \lambda_{\max}(A) \right|, \left| 1 - \alpha \frac{\tau}{h^2} \lambda_{\min}(A) \right| \right\}$$

wobei $\lambda_{\min/\max}(A) = \min/\max$ EW von AA^T

$$q \leq 1 \Leftrightarrow \left| 1 - \alpha \frac{\tau}{h^2} \lambda_{\max}(A) \right| \leq 1$$

$$\Leftrightarrow -1 \leq 1 - \alpha \frac{\tau}{h^2} \lambda_{\max}(A) \leq +1 \Leftrightarrow \tau \leq \frac{h^2}{2\alpha} \frac{2}{\lambda_{\max}(A)} \quad (5)$$



Stabilitätsbedingung: $\|\cdot\| = \|\cdot\|_2$

$$(5) \quad \tau \leq \frac{h^2}{2\epsilon} \frac{2}{\lambda_{\max}(A)} = \frac{2}{\lambda_{\max}(\underbrace{\frac{2\epsilon}{h^2} A}_K)} = \frac{2}{\lambda_{\max}(K)} = \tau_{\text{stab}}$$

Hier: $\lambda_{\max}(A) = \lambda_{\max}\left(\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ & & \ddots & \ddots \\ & & -1 & 2 \end{bmatrix}\right) \stackrel{!}{\leq} \max_{i=1, n-1} \sum_{j=1}^{n-1} |a_{ij}| = 4$

Folglich gilt: hinreichende Stabilitätsbed.

(5)

$$(5) \quad \tau \leq \frac{h^2}{2\epsilon} \leq \tau_{\text{stab}}$$

Endresultat:

Stabilität: $\|z^{j+1}\| \leq \underbrace{\|z^0\|}_{=0 \text{ bzw. Rdf}} + C_S \max_{k=0, m-1}^{t_E} \|\psi^k\|$

+

Approximation: $\|\psi^k\| = O(\tau + h^2) \leq C_A(u) (\tau + h^2)$



diskr. Konvergenz: $\|z^{j+1}\| \leq C_S C_A(u) (\tau + h^2)$

$h \rightarrow 0, \tau \rightarrow 0$

$$\left[\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = f \text{ in } Q \right. \\ \left. + RB + AB \right]$$

Hyperbolischer Fall, d.h. Saitenschwingung (N-2) bzw. PKT. 1.2.2.
Kann analog analysiert werden:

Stabilität: Stabilitätsbed. = CFL-Bedingung

$$\tau \leq \frac{h}{a} \quad (6)$$

+

Approximation: AB1 (N-2), Aufgabe 1.4a) $\|\psi_i^j\| \leq C_A(u) (\tau^2 + h^2)$



diskrete Konvergenz: $\|z^{j+1}\| \leq C_S C_A(u) (\tau^2 + h^2)$

(6)

W
9.1.2019



```

9  %Aufruf des Algorithmus zur Berechnung der Temperaturverteilung
10 %T Temperaturmatrix
11 %time...Zeitpunkt für den gilt  $T \leq 40^\circ\text{C}$  im gesamten Stab
12 [T,time]=calc_T(time_end,m,n);
13

```

Folie Ü1/06
Num Opt 38f

Ergebnisse:

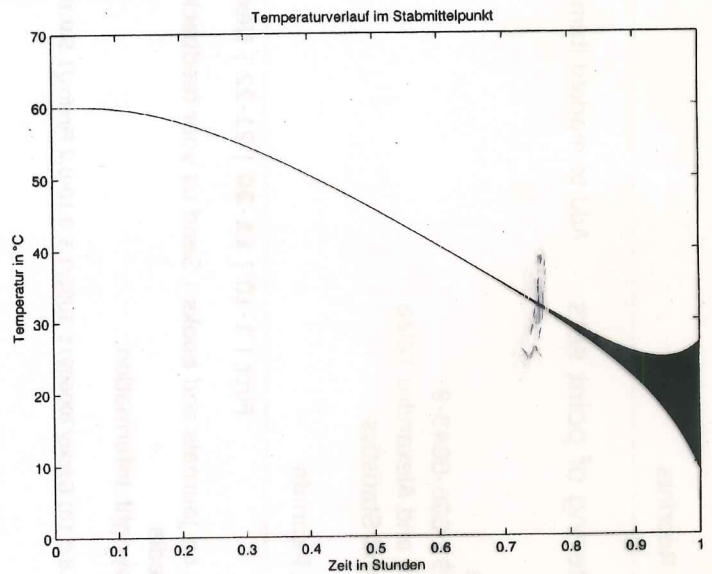
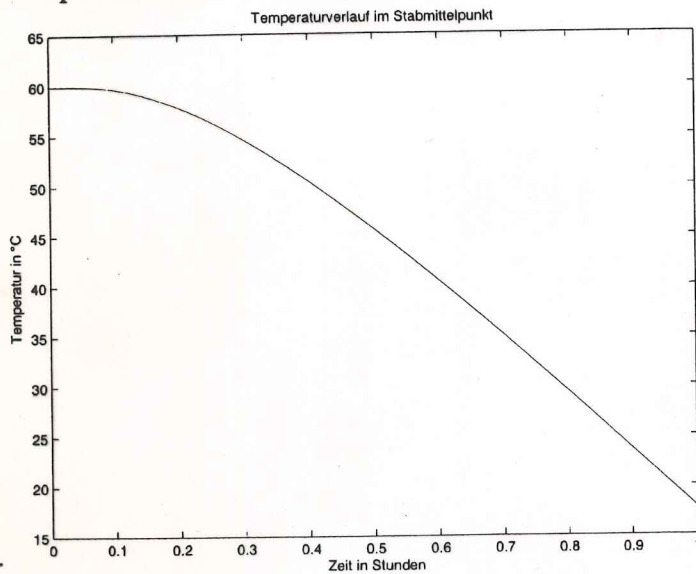
Mit den zwei gewählten Diskretisierungen werden folgender Temperaturverläufe berechnet:

$m=9000$, $n=100$, $\text{time_end}=3600$ Sekunden (Diagramme links): stabile Lösung

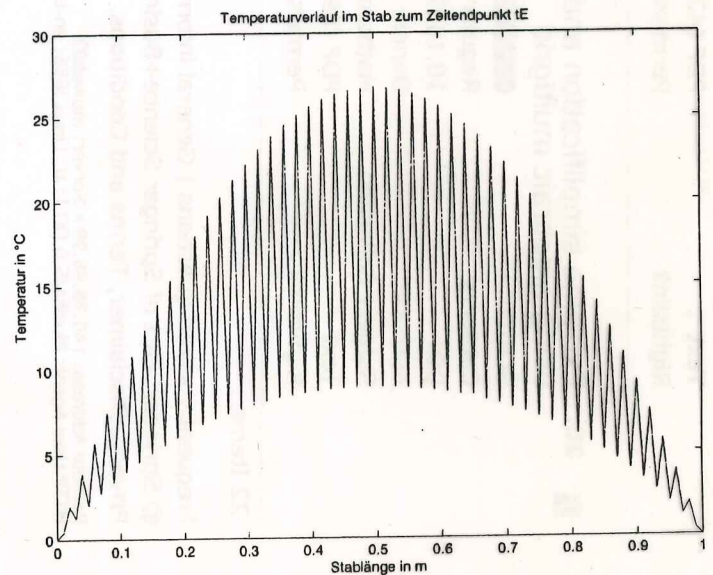
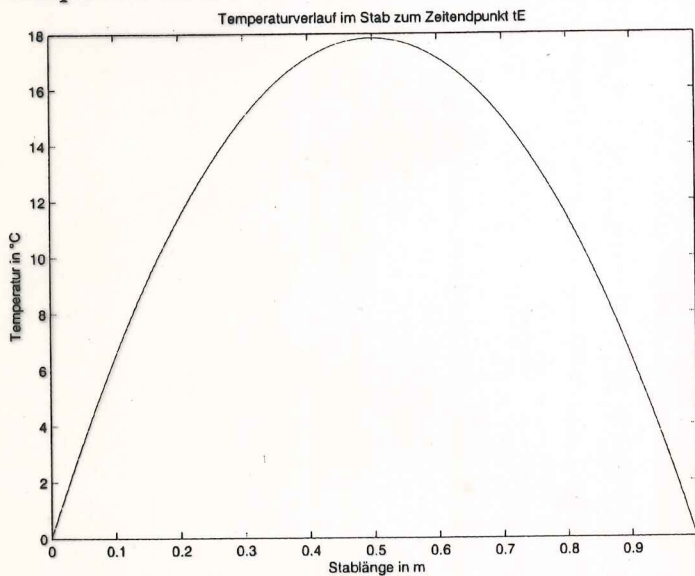
$m=8235$, $n=100$, $\text{time_end}=3600$ Sekunden (Diagramme rechts): aufschwingende Lösung

Diese Werte wurden gewählt um einerseits eine stabile Lösung und andererseits den Effekt des Aufschwingvorganges zu zeigen.

Temperaturverlauf im Stabmittelpunkt im berechneten Zeitintervall:



Temperaturverlauf im Stab nach einer Stunde $t_E=1h$

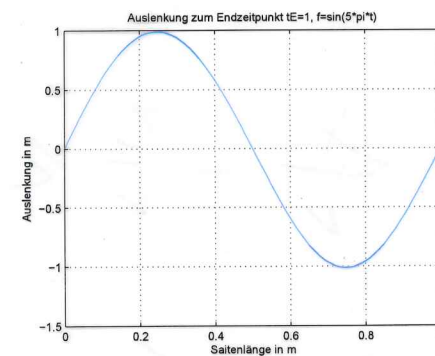
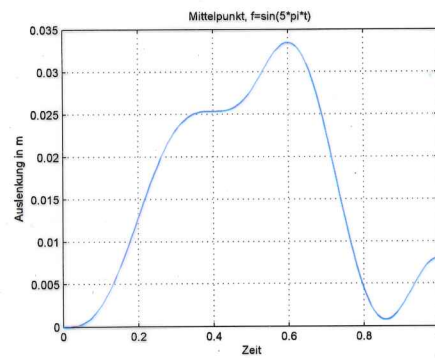
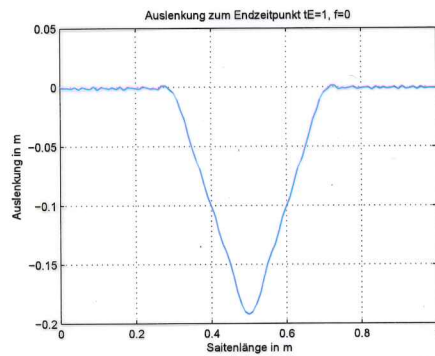
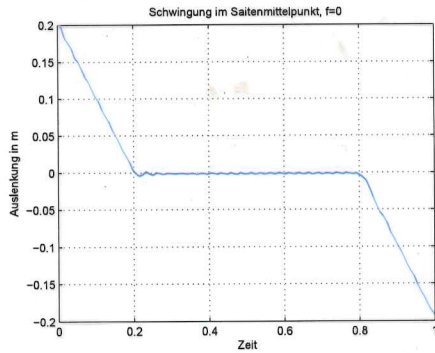


~~Temperaturverteilung T wenn im gesamten Stab $T \leq 40^\circ\text{C}$:~~

stabil

nicht stabil

$dt = 0.009$
(CFL-Bedingung erfüllt)



$dt = 0.01008$
(CFL-Bedingung nicht erfüllt)

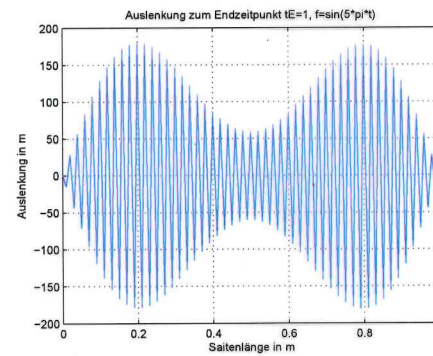
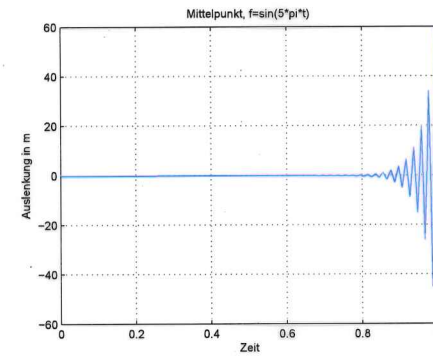
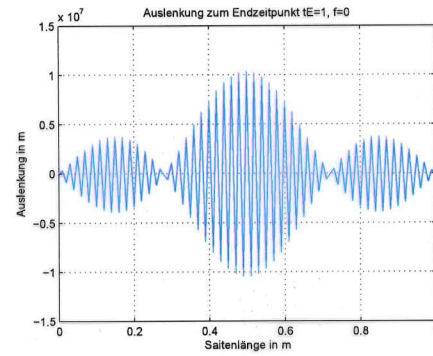
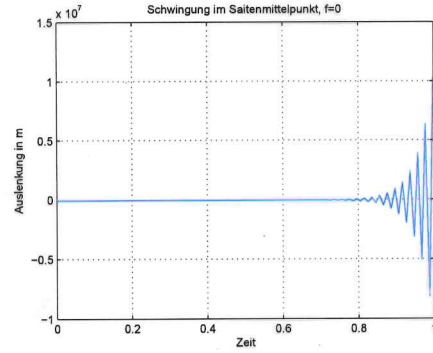


Tabelle 1: Vergleich verschiedener Zeitschrittweiten für Schwingungsbeispiel

4.3. Galerkin FEM für instationäre Probleme

4.3.1. Parabolische Probleme

■ Btr. wieder die parabolische ARWA

$$\begin{aligned}
 & \frac{\partial u}{\partial t}(x,t) + L u(x,t) = f(x,t), \quad (x,t) \in Q \equiv Q_T = \overset{\mathbb{R}^d}{\Omega} \times (0,T) \\
 & \text{Modellproblem: } L u = -\Delta u \text{ bzw. } L u = -\frac{\lambda}{\sigma c} \Delta u \quad (1) \\
 & \text{PKt. 1.3.4 : } L u = - \sum_{i,j=1}^d \frac{\partial}{\partial x_i} (a_{ij} \frac{\partial u}{\partial x_j}) + \sum_{i=1}^d a_i \frac{\partial u}{\partial x_i} + a u \\
 & \quad = -\operatorname{div}(A \nabla u) + \vec{a} \cdot \nabla u + a u \\
 & + \text{RB z.B. 1. Art: } u(x,t) = 0, \quad (x,t) \in \Sigma = \partial\Omega \times (0,T) \\
 & + \text{AB: } u(x,0) = u_0(x), \quad x \in \bar{\Omega}
 \end{aligned}$$

(P)

■ Discretisierungstechniken:

1. Erst ZEIT, dann RAUM

= horizontale Linienmethode = Rothe Methode

→ besonders für Adaptivität im Raum/Ort geeignet: AFEM

→ Ref.: J. Lang: Adaptive Multilevel Solution of Nonlinear Parabolic PDE Systems, Springer, 2000.

2. Erst RAUM, dann ZEIT

= vertikale Linienmethode

→ Standardmethode

→ Ref.: V. Thomée: Galerkin FEMs for Parabolic Problems, Springer, 2006 (2. Auflage)

3. RAUM-ZEIT - Methoden (Space-time methods)

→ Hot research topic now!

→ Vorteile: Parallelisierung, Adaptivität, Bewegende Gebiete,

→ Nachteile: 1 großes GS, viel Speicherplatz

→ Ref.: U. Langer, O. Steinbach (eds): Space-Time Methods: Applications to PDEs, de Gruyter, 2019.

4.2. Implizite Zeitintegrationsverfahren

AB1(A-M)

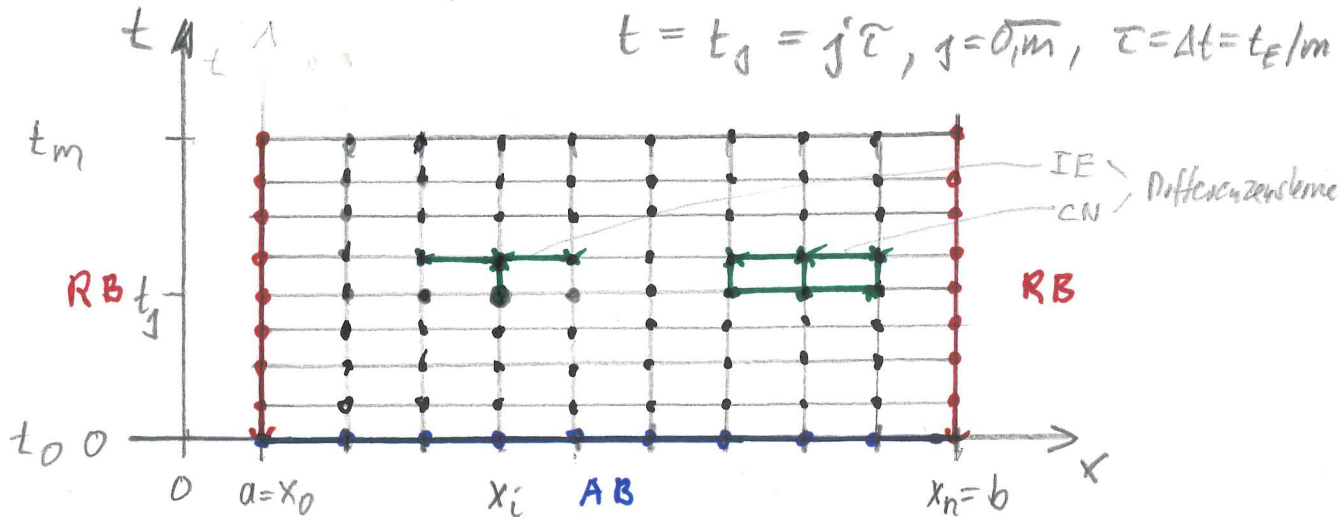
Das implizite Euler-Verfahren (7) = (8) _{$\theta=1$} aus Pkt. 4.2.2:

Ges. $V(x_i, t) \approx U(x, t)$ im Raum-Zeitgitter (x_i, t_j)

$$V_i^j = V(x_i, t_j)$$

$$x = x_i = a + ih, i = \overline{0, n}, h = \Delta x = \frac{b-a}{n}$$

$$t = t_j = j\tau, j = \overline{0, m}, \tau = \Delta t = t_E/m$$



$$(7) \begin{cases} \frac{V_i^{j+1} - V_i^j}{\tau} - \alpha \frac{V_{i-1}^{j+1} - 2V_i^{j+1} + V_{i+1}^{j+1}}{h^2} = f_i^{j+1} := f(x_i, t_{j+1}) \\ \text{RB: } V_0^j = u_a(t_j), V_n^j = u_b(t_j), j = \overline{1, m} \\ \text{AB: } V_i^0 = u_0(x_i), i = \overline{0, 1, \dots, n-1, n} \end{cases} \quad i = \overline{1, n-1}, j = \overline{0, m-1}$$

ist die "Mutter" aller impliziten Zeitintegrationsverfahren und gehört zur Klasse der Θ -Verfahren ($\Theta=1$).

< Runge-Kutta-Verf.

Θ -Verfahren: $\Theta \in [0, 1]$

$$(8) \begin{cases} \frac{V_i^{j+1} - V_i^j}{\tau} - \Theta \frac{V_{i-1}^{j+1} - 2V_i^{j+1} + V_{i+1}^{j+1}}{h^2} - (1-\Theta) \frac{V_{i-1}^j - 2V_i^j + V_{i+1}^j}{h^2} = \\ = \Theta f_i^{j+1} + (1-\Theta) f_i^j, i = \overline{1, n-1}, j = \overline{0, m-1} \\ + \text{RB}(1) + \text{AB}(1) \end{cases}$$

Bemerkung: $\Theta = 1$: implizites Euler-Verfahren

$\Theta = \frac{1}{2}$: CRANK-NICOLSON-Verfahren

$\Theta = 0$: explizites Euler-Verfahren

Analysis der Fehlerfortpflanzung für das implizite Eulerverfahren (7) = (8)_{θ=1};

- Fehlerschema: $z_i^{j+1} = z(x_i, t_{j+1}) = u(x_i, t_{j+1}) - v(x_i, t_{j+1})$
in Vektorform

$$(9) \quad z^{j+1} := \begin{bmatrix} z_1^{j+1} \\ z_2^{j+1} \\ \vdots \\ z_{n-1}^{j+1} \end{bmatrix} = z^j - \alpha \frac{\tau}{h^2} \underbrace{\begin{bmatrix} 2 & -1 & & \\ -1 & 2 & -1 & \\ & -1 & 2 & -1 \\ & & \ddots & \ddots \\ & & -1 & 2 & -1 \\ & & & -1 & 2 \end{bmatrix}}_{=: A = A^T > 0, \text{ d.h. SPD}} z^{j+1} + \tau \psi^{j+1}$$

SPD

$$(I + \alpha \frac{\tau}{h^2} A) z^{j+1} = z^j + \tau \psi^{j+1}$$

$$z^{j+1} = (I + \alpha \frac{\tau}{h^2} A)^{-1} z^j + \tau (I + \alpha \frac{\tau}{h^2} A)^{-1} \psi^{j+1}$$

$\|\cdot\|_2 \equiv \|\cdot\|_2 = \|\cdot\|_{\mathbb{R}^{n-1}}$ - Euklidische Norm:

$$\|z^{j+1}\| = \underbrace{\|(I + \alpha \frac{\tau}{h^2} A)^{-1}\|}_{\text{SPD SPD}} \|z^j\| + \tau \underbrace{\|(I + \alpha \frac{\tau}{h^2} A)^{-1}\|}_{\text{SPD}} \|\psi^{j+1}\|$$

$$= \max_{\lambda \in \sigma(A)} |(1 + \alpha \frac{\tau}{h^2} \lambda)^{-1}| \leq 1$$

$$\leq 1$$

$$\leq \|z^j\| + \tau \|\psi^{j+1}\| \leq \dots \leq$$

$$\leq \|z^0\| + \tau (\|\psi^1\| + \|\psi^2\| + \dots + \|\psi^{j+1}\|)$$

$$\leq \|z^0\| + t_{j+1} \underbrace{\max_{k=1, \dots, j+1} \|\psi^k\|}_{= O(\tau + h^2)}$$

$$= 0$$

$$bzw. = Rdf \leq O(\tau + h^2)$$

$$= O(\tau + h^2)$$

$$\leq t_E C_A(u) (\tau + h^2),$$

d.h. impliziter Euler ist unbedingt stabil !

Analyse der Fehlerfortpflanzung für das θ -Verfahren (8):

- Fehlerschema: $z = \overset{(1)}{u} - \overset{(8)}{v}$

$$(10) \quad z_{t,i}^j - \theta \tau z_{\bar{x},i}^{j+1} - (1-\theta) \tau z_{\bar{x},i}^j = \psi_i^{j,\theta}$$

$$\text{mit } \psi_i^{j,\theta} = \theta \psi_i^j + (1-\theta) \psi_i^{j+1}, \quad i = \overline{1, n-1}, \quad j = \overline{0, m-1}$$

$$+ RB: z_0^j = z_n^j = 0, \quad j = \overline{1, n} \quad + AB: z^0 = 0 \text{ (Rdf!)}$$

- Vektor / Matrix - Schreibweise:

$$z^{j+1} = z^j - \theta \tau \frac{\tau}{h^2} A z^{j+1} - (1-\theta) \tau \frac{\tau}{h^2} A z^j + \tau \psi^{j,\theta}$$

$$(I + \theta \tau \frac{\tau}{h^2} A) z^{j+1} = (I - (1-\theta) \tau \frac{\tau}{h^2} A) z^j + \tau \psi^{j,\theta}$$

$$z^{j+1} = (I + \theta \tau \frac{\tau}{h^2} A)^{-1} (I - (1-\theta) \tau \frac{\tau}{h^2} A) z^j + \tau (I + \theta \tau \frac{\tau}{h^2} A)^{-1} \psi^{j,\theta}$$

$$\|z^{j+1}\| \leq \underbrace{\|(I + \theta \tau \frac{\tau}{h^2} A)^{-1} (I - (1-\theta) \tau \frac{\tau}{h^2} A)\|}_{=: q} \|z^j\| + \tau \|\psi^{j,\theta}\|$$

$$\|(I + \theta \tau \frac{\tau}{h^2} A)^{-1}\| \leq 1$$

$$=: q \leq 1 !$$

- Für die Spektralnorm $\|\cdot\| := \|\cdot\|_2$ erhalten wir

A SPD

$$q := \|(I + \theta \tau \frac{\tau}{h^2} A)^{-1} (I - (1-\theta) \tau \frac{\tau}{h^2} A)\|_2 \stackrel{\downarrow}{=}$$

$$= \max_{\lambda \in \sigma(A)} \left| \frac{1 - (1-\theta) \tau \frac{\tau}{h^2} \lambda}{1 + \theta \tau \frac{\tau}{h^2} \lambda} \right| \stackrel{(\text{min})}{=} \left| \frac{1 - (1-\theta) \tau \frac{\tau}{h^2} \lambda_{\max}(A)}{1 + \theta \tau \frac{\tau}{h^2} \lambda_{\max}(A)} \right|$$

$\sigma(A) \subset (0, 4] - \text{Spektrum}$

$\sigma(A) = \text{Menge alle EW von } A$

Hinweis: $\varphi(x) = (1 - (1-\theta)x)(1 + \theta x) \searrow$

$$\leq 1$$

$\iff$
gdw

$$-1 \leq \frac{1 - (1-\theta) \tau \frac{\tau}{h^2} \lambda_{\max}(A)}{1 + \theta \tau \frac{\tau}{h^2} \lambda_{\max}(A)} \leq 1 \checkmark$$

• Stabilitätsbedingung:

(11)

$$-1 \leq \frac{1 - (1-\theta) \tau \frac{\tau}{h^2} \lambda_{\max}(A)}{1 + \theta \tau \frac{\tau}{h^2} \lambda_{\max}(A)}$$

Daraus folgt unmittelbar

$\theta = 0$: Expliziter Euler: $\tau \frac{\tau}{h^2} \lambda_{\max}(A) \leq 2$ **bed. stabil!**

$\theta = \frac{1}{2}$: CN: $-2 - \tau \frac{\tau}{h^2} \lambda_{\max}(A) \leq 2 - \tau \frac{\tau}{h^2} \lambda_{\max}(A)$ **unbed. st.!**

$\theta = 1$: Impliziter Euler: $-1 - \tau \frac{\tau}{h^2} \lambda_{\max}(A) \leq 1$ **unbed. stabil!**

$0 < \theta < 1$: $0 \leq 1 - (1-\theta) \tau \frac{\tau}{h^2} \lambda_{\max}(A) + 1 + \theta \tau \frac{\tau}{h^2} \lambda_{\max}(A)$

$0 \leq 2 - \tau \frac{\tau}{h^2} \lambda_{\max}(A) + 2\theta \tau \frac{\tau}{h^2} \lambda_{\max}(A)$

$\theta \geq \frac{1}{2} - \frac{1}{\tau \frac{\tau}{h^2} \lambda_{\max}(A)} \approx \frac{1}{2} - \frac{h^2}{4 \tau^2}$

• Resultate: $\|\cdot\| = \|\cdot\|_2$

$\theta = 1$: $q = \|(\cdot)^{-1}\|_2 \leq 1$ und $\|u^k\| \leq C_A(u)(\tau + h^2)$
unbedingt stabil

$\theta = \frac{1}{2}$: $q = \|(\cdot)^{-1}\|_2 \leq 1$ und $\|u^{k,\theta}\| \leq C_A(u)(\tau^2 + h^2)$
unbedingt stabil $\uparrow$
(mms) Taylor

$\theta = 0$: $\tau \leq \frac{h^2}{2 \lambda_{\max}(A)}$ und $\|u^k\| \leq C_A(u)(\tau + h^2)$
bedingt stabil

Stabilität + Approximation $\Rightarrow$ diskrete Konvergenz

$\|z^j\| \leq C_S C_A(u)(\tau^r + h^2)$, $r = \begin{cases} 2 & \text{CN} \\ 1 & \text{ sonst} \end{cases}$

■ Hyperbolische Probleme, d.h., z.B., Seitenschwingung (N-2)

$\Rightarrow$ Implizites Zeitintegrationschema (AB1(N-2), Aufgabe 1.3)
ist **unbedingt stabil!**

$\Rightarrow$ Diskrete Konvergenz: $\|z^{j+1}\| \leq C_S C_A(u)(\tau^2 + h^2)$

4.3. Galerkin FEM für instationäre Probleme

4.3.1. Parabolische Probleme

■ Btr. wieder die parabolische ARWA

$$\begin{aligned}
 & \frac{\partial u}{\partial t}(x, t) + L u(x, t) = f(x, t), \quad (x, t) \in Q \equiv Q_T = \overset{\mathbb{R}^d}{\Omega} \times (0, T) \\
 & \text{Modellproblem: } L u = -\Delta u \text{ bzw. } L u = -\frac{\lambda}{\sigma c} \Delta u \quad (1) \\
 & \text{PKt. 1.3.4 : } L u = - \sum_{i,j=1}^d \frac{\partial}{\partial x_i} (a_{ij} \frac{\partial u}{\partial x_j}) + \sum_{i=1}^d a_i \frac{\partial u}{\partial x_i} + a u \\
 & \quad = -\operatorname{div}(A \nabla u) + \vec{a} \cdot \nabla u + a u \\
 & + \text{RB z.B. 1. Art: } u(x, t) = 0, \quad (x, t) \in \Sigma = \partial \Omega \times (0, T) \\
 & + \text{AB: } u(x, 0) = u_0(x), \quad x \in \bar{\Omega}
 \end{aligned}$$

(P)

■ Discretisierungstechniken:

1. Erst ZEIT, dann RAUM

= horizontale Linienmethode = Rothe Methode

→ besonders für Adaptivität im Raum / Ort geeignet: AFEM

→ Ref.: J. Lang: Adaptive Multilevel Solution of Nonlinear Parabolic PDE Systems, Springer, 2000.

2. Erst RAUM, dann ZEIT

= vertikale Linienmethode

→ Standardmethode

→ Ref.: V. Thomée: Galerkin FEMs for Parabolic Problems, Springer, 2006 (2. Auflage)

3. RAUM-ZEIT-Methoden (Space-time methods)

→ Hot research topic now!

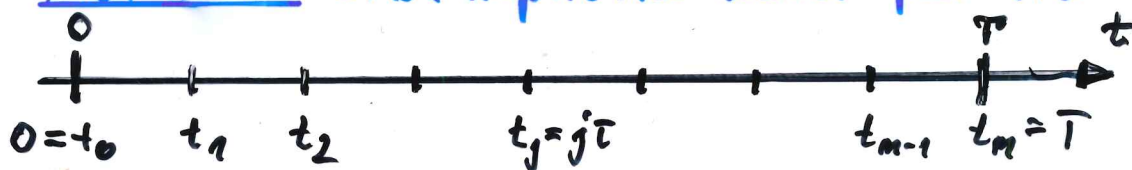
→ Vorteile: Parallelisierung, Adaptivität, Bewegende Gebiete, ...

→ Nachteile: 1 großes GS, viel Speicherplatz

→ Ref.: U. Langer, O. Steinbach (eds): Space-Time Methods: Applications to PDEs, de Gruyter, 2019.

add 1. Erst ZEIT, dann RAUM = horizontale LM = Rothe:

- Erst ZEIT z.B. impliziter Euler für (P)



z.B. gleichmässige Unterteilung, d.h. $\tau = \frac{T}{m}$, aber nichtnot.

$$(12) \rightarrow \begin{cases} u^0(x) := u_0(x) \text{ AB} \\ u^{j+1}(x) \approx u(x, t_{j+1}) \\ \frac{u^{j+1}(x) - u^j(x)}{\tau} - \Delta u^{j+1}(x) = f^{j+1}(x) := f(x, t_{j+1}), x \in \Omega \\ + \text{RB: } u^{j+1}(x) = 0, x \in \Gamma = \partial\Omega \\ j = 0, 1, 2, \dots, m-1 \end{cases}$$

$$(12) \rightarrow \boxed{\begin{aligned} -\Delta u^{j+1}(x) + \frac{1}{\tau} u^{j+1}(x) &= f^{j+1}(x) + \frac{1}{\tau} u^j(x), x \in \Omega \\ + \text{RB: } u^{j+1}(x) &= 0, x \in \Gamma \end{aligned}}$$

= elliptische RWA, siehe Kap. 2 ; $j = 0, 1, \dots, m-1$

Zur Bestimmung von $u^{j+1} \in \bar{V}_j = \bar{V}_0 = \dot{H}^1(\Omega)$

erhalten wir folglich die VF

$$(12)_{VF} \quad \int_{\Omega} (\nabla u^{j+1} \cdot \nabla v + \frac{1}{\tau} u^{j+1} v) dx = \int_{\Omega} f^{j+1} v dx + \frac{1}{\tau} \int_{\Omega} u^j v dx \quad \forall v \in \bar{V}_0$$

$$a(u^{j+1}, v) = \langle F^{j+1}, v \rangle \quad \forall v \in \bar{V}_0$$

- Dann RAUM durch FE Diskretisierung

$$(12)_h \quad \text{Ges. } u_h^{j+1} \in \bar{V}_{gh} = \bar{V}_{0h} = \text{span}\{\varphi_i : i \in \omega_h\} = \text{span}\{\varphi_1, \dots, \varphi_{n_h}\} \subset \bar{V}_j$$

$$\text{Basis } \{\varphi_1, \dots, \varphi_{n_h}\} \quad \uparrow \text{ FE-iso} \quad a(u_h^{j+1}, v_h) = \langle F^{j+1}, v_h \rangle \quad \forall v_h \in \bar{V}_{0h}$$

$$(12)_h \quad \text{Ges. } \underline{u}_h^{j+1} \in \mathbb{R}^{n_h} : \tilde{K}_h \underline{u}_h^{j+1} = \underline{f}_h^{j+1}, \quad j = 0, 1, \dots, m-1$$

wobei $\tilde{K}_h = K_h + \frac{1}{\tau} M_h$

$$\begin{aligned} &\hookrightarrow M_h = \left[\int_{\Omega} \varphi_i \varphi_j dx \right]_{i,j=1, \dots, n_h} = \text{Massenmatrix} \\ &\hookrightarrow K_h = \left[\int_{\Omega} \nabla \varphi_i \cdot \nabla \varphi_j dx \right]_{i,j=1, \dots, n_h} = \text{Steifigkeitsm.} \end{aligned}$$

add 2 Erst RAUM, dann ZEIT = vertikale LM:

- Startpkt = Linienvariationsformulierung von (P)

$$(13) \quad \begin{cases} \int_{\Omega} \frac{\partial u}{\partial t}(x,t) v(x) dx + \int_{\Omega} \nabla u(x,t) \cdot \nabla v(x) dx = \int_{\Omega} f(x,t) v(x) dx \\ + AB \quad \int_{\Omega} u(x,0) v(x) dx = \int_{\Omega} u_0(x) v(x) dx \quad \forall v \in \bar{V}_0 \quad \forall t \in (0,T) \end{cases}$$

- Erst RAUM mit FEM: Ansatz mit zeitabh. Koeffizienten, d.h.

$$(14) \quad \text{Ges. } u_h(x,t) = \sum_{i \in \omega_h} u_i(t) \varphi_i(x) + \sum_{i \in \omega_h} \underbrace{q_i(x_i, t)}_{=0 \text{ (Bsp.)}} \varphi_i(x) \in \bar{V}_{gh} = \bar{V}_{oh}$$

und einsetzen in (13) und dann testen mit $v_h = \varphi_j, j = \overline{1, N_h}$:

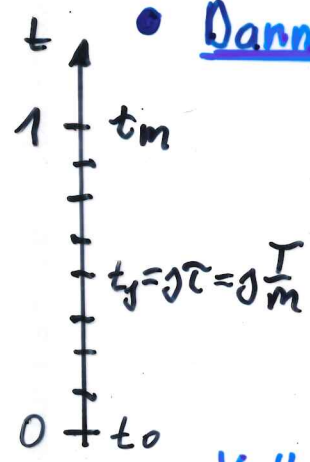
$$(13)_h \quad \begin{cases} \sum_{i \in \omega_h} \frac{\partial u_i(t)}{\partial t} \int_{\Omega} \varphi_i \varphi_j dx + \sum_{i \in \omega_h} u_i(t) \int_{\Omega} \nabla \varphi_i \cdot \nabla \varphi_j dx = \int_{\Omega} f(x,t) \varphi_j(x) dx, \forall j \in \omega_h \\ + AB: \sum_{i \in \omega_h} u_i(0) \int_{\Omega} \varphi_i(x) \varphi_j(x) dx = \int_{\Omega} u_0(x) \varphi_j(x) dx, j = \overline{1, N_h} \end{cases}$$

$\updownarrow$
(13)_h

Ges. $\underline{u}_h(t) = [u_i(t)]_{i \in \omega_h} \in \mathbb{R}^{N_h} : M_h \dot{\underline{u}}_h(t) + K_h \underline{u}_h(t) = \underline{f}_h(t), t \in (0,T)$
 AB: $M_h \underline{u}_h(0) = \underline{u}_{oh}$

= AWA für System gewöhnlicher Dgl. 1. Ordnung

- Dann ZEIT diskretisierung mit Zeitintegrationsverfahren



z.B. mit expliziten Euler (muss): nur bedingt stabil!

impliziten Euler := A-stabil, d.h. unbed. st.

CRANK-NICOLSON := A-stabil

Mehrschrittverfahren z.B. BDF

Ref.: JL (2013), Kap. 8: $u'(t) = f(t, u(t))$

Volldiskretes Schema: Ges. $\underline{u}_h^{j+1} \approx \underline{u}_h(t_j)$:

$$(13)_{hT} \quad M_h \frac{\underline{u}_h^{j+1} - \underline{u}_h^j}{\tau} + K_h \underline{u}_h^{j+1} = \underline{f}_h^{j+1} := \underline{f}_h(t_{j+1}), \quad M_h \underline{u}_h^0 = \underline{u}_{oh}$$

$$(K_h + \frac{1}{\tau} M_h) \underline{u}_h^{j+1} = \frac{1}{\tau} M_h \underline{u}_h^j + \underline{f}_h^{j+1}, \quad j = 0, 1, \dots, m-1$$

4.3.2. Hyperbolische Probleme

■ Btr. die hyperbolische ARWA (z.B. Akustik):

$$(H) \begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x,t) - \Delta u(x,t) = f(x,t), (x,t) \in Q = \Omega \times (0,T) \\ + RB: \text{ z.B. 1. Art: } u(x,t) = 0, (x,t) \in \Sigma = \partial\Omega \times (0,T) \\ + AB: u(x,0) = u_0(x) \text{ und } \frac{\partial u}{\partial t}(x,0) = u_1(x), x \in \bar{\Omega} \end{cases}$$

■ Diskretisierungstechniken:

1. Erst ZEIT, dann RAUM = horizontale Linienmethode

② Erst RAUM, dann ZEIT = vertikale Linienmethode

3. RAUM-ZEIT-Methoden

→ • Startpunkt = Linien variationsformulierung von (H):

$$(15) \begin{cases} \int_{\Omega} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x,t) v(x) dx + \int_{\Omega} \nabla u(x,t) \cdot \nabla v(x) dx = \int_{\Omega} f(x,t) v(x) dx \quad \forall v \in \tilde{V} = \tilde{V}_0 \\ + AB: \int_{\Omega} u(x,0) v(x) dx = \int_{\Omega} u_0(x) v(x) dx, \int_{\Omega} \frac{\partial u}{\partial t}(x,0) v(x) dx = \int_{\Omega} u_1(x) v(x) dx \end{cases}$$

• Erst RAUM:

$$(16) \text{ Ges. } u_h(x,t) = \sum_{i=1}^{N_h} u_i(t) \varphi_i(x) \in \tilde{V}_{gh} = \tilde{V}_{0h} \quad \forall t \in [0,T]:$$

$$(15)_h \begin{cases} \sum_{i=1}^{N_h} \frac{d^2 u_i}{dt^2}(t) \int_{\Omega} \varphi_i \varphi_j dx + \sum_{i=1}^{N_h} u_i(t) \int_{\Omega} \nabla \varphi_i \cdot \nabla \varphi_j dx = \int_{\Omega} f(x,t) \varphi_j(x) dx \\ + AB: \sum_{i=1}^{N_h} u_i(0) \int_{\Omega} \varphi_i \varphi_j dx = \int_{\Omega} u_0 \varphi_j dx, \sum_{i=1}^{N_h} \frac{du_i}{dt}(0) \int_{\Omega} \varphi_i \varphi_j dx = \int_{\Omega} u_1 \varphi_j dx \end{cases} \quad j = \overline{1, N_h}$$



(15)_h

$$\text{Ges } \underline{u}_h(t) = [u_i(t)]_{i=\overline{1, N_h}} : M_h \ddot{\underline{u}}_h(t) + K_h \underline{u}_h(t) = \underline{f}_h(t), t \in (0,T)$$

$$M_h \underline{u}_h(0) = \underline{u}_{0h}, M_h \dot{\underline{u}}_h(0) = \underline{u}_{1h}$$

= AWA für System gewöhnlicher Dgl. 2. Ordnung

= AWA für doppeltso großes System gew. Dgl. 1. Ord. mit $\underline{y}_h = \dot{\underline{u}}_h$

• Dann ZEIT diskretisierung mit Zeitintegrationsverfahren

z.B. Newmark-Verfahren, siehe ZL (2013), S. 567-569

4-16

- Dann ZEIT diskretisierung mit Zeitintegrationsverfahren
z.B. 1) Einschrittverfahren (expl. Euler, impl. Euler, CN, ...)
angewandt auf äquivalentes System gew. Dgl. 1. Ord.:

$$(17) \quad \begin{cases} M_h \dot{\underline{y}}_h(t) = \underline{f}_h(t) - C_h(t) \underline{y}_h(t) - K_h(t) \underline{u}_h(t) \\ \underline{\dot{u}}_h(t) = \underline{y}_h(t) \\ + AB: \underline{u}_h(0) = M_h^{-1} \underline{u}_{0h}, \underline{y}_h(0) = M_h^{-1} \underline{u}_{1h} \end{cases}$$

- z.B. 2) Newmark-Verfahren [JL (2013), S. 567-569]

Btr. (15)_h mit Dämpfungsterm

$$(15)_h \quad \begin{cases} M_h \ddot{\underline{u}}_h(t) + C_h(t) \dot{\underline{u}}_h(t) + K_h(t) \underline{u}_h(t) = \underline{f}_h(t), t \in (0, T) \\ + AB: M_h \underline{u}_h(0) = \underline{u}_{0h}, M_h \dot{\underline{u}}_h(0) = \underline{u}_{1h} \end{cases}$$

Newmark (β, γ): $\beta \in [0, 1/2]$, $\gamma \in [0, 1]$ Ges. $\underline{a}_h^{j+1} \in \mathbb{R}^{N_h}$ (Beschleunigung: $\underline{a}_h^{j+1} \approx \underline{a}_h(t_{j+1})$):

$$M_h \underline{a}_h^{j+1} + C_h(t_{j+1}) \underline{v}_h^{j+1} + K_h(t_{j+1}) \underline{u}_h^{j+1} = \underline{f}_h^{j+1} := \underline{f}_h(t_{j+1})$$

$$\begin{aligned} \xrightarrow{\text{Taylor}} \underline{u}_h^{j+1} &= \underline{u}_h^j + \tau \underline{v}_h^j + \frac{\tau^2}{2} [(1-2\beta) \underline{a}_h^j + 2\beta \underline{a}_h^{j+1}] \\ \underline{u}_h(t_{j+1}) &= \underline{u}_h(t_j) + \tau \frac{d\underline{u}_h}{dt}(t_j) + \frac{\tau^2}{2} \frac{d^2\underline{u}_h}{dt^2}(t_j + \tilde{\theta}_j \tau), \tilde{\theta}_j \in (0, 1) \end{aligned}$$

$$(18) \quad \begin{aligned} \xrightarrow{\text{Taylor}} \underline{v}_h^{j+1} &= \underline{v}_h^j + \tau [(1-\gamma) \underline{a}_h^j + \gamma \underline{a}_h^{j+1}] \\ \underline{v}_h(t_{j+1}) &= \underline{v}_h(t_j) + \tau \frac{d\underline{v}_h}{dt}(t_j + \tilde{\theta}_j \tau), \tilde{\theta}_j \in (0, 1) \end{aligned}$$

$$j = 0, 1, 2, \dots, m-1$$

$$+ AB: \underline{u}_h^0 = M_h^{-1} \underline{u}_{0h}, \underline{v}_h^0 = M_h^{-1} \underline{u}_{1h}$$

$$\text{mit } \underline{a}_h^0 = M_h^{-1} [\underline{f}_h^0 - C_h(t_0) \underline{v}_h^0 + K_h(t_0) \underline{u}_h^0], t_0 = 0.$$

Daraus folgt sofort:

$$\begin{aligned} \underline{a}_h^{j+1} \in \mathbb{R}^{N_h}: (M_h + \tau \gamma C_h(t_{j+1}) + \tau^2 \beta K_h(t_{j+1})) \underline{a}_h^{j+1} &= \underline{\varphi}_h^{j+1}, \\ \text{mit } \underline{\varphi}_h^{j+1} &= \underline{f}_h^{j+1} - C_h(t_{j+1}) \underline{v}_h^j - \tau (1-\gamma) C_h(t_{j+1}) \underline{a}_h^j - \\ &\quad - K_h(t_{j+1}) \underline{u}_h^j - \tau K_h(t_{j+1}) \underline{v}_h^j - \frac{\tau^2}{2} (1-2\beta) K_h(t_{j+1}) \underline{a}_h^j \end{aligned}$$

Bem.: Newmark ($\beta = \frac{1}{4}, \gamma = \frac{1}{2}$) = CN = TR angew. auf (17)! unbed. stabil