

Zusammenstellung wichtiger Ungleichung:a) Cauchy - Ungleichung:

$$|(u, v)| \leq \|u\| \cdot \|v\| \quad \forall u, v \in V = L_2(\Omega), H^1(\Omega), \dots$$

b) Friedrichs - Ungleichung:

$$\int_{\Omega} (u(x))^2 dx \leq c_F^2 \int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx \quad \forall u \in \tilde{V}_0,$$

wobei $\tilde{V}_0 = \{v \in H^1(\Omega) : v = 0 \text{ auf } \tilde{\Gamma}\}$
 mit einem "echten" Randstück $\tilde{\Gamma} \subset \Gamma = \partial\Omega$,
 d.h. $|\tilde{\Gamma}| := \text{meas}(\tilde{\Gamma}) := \int_{\tilde{\Gamma}} ds > 0$.

Bem.: $\tilde{V}_0 := \{v \in H^1(\Omega) : v = 0 \text{ auf } \Gamma = \partial\Omega\} = \overset{0}{H^1}(\Omega)$

c) Poincaré - Ungleichung:

$$\int_{\Omega} u^2 dx \leq c_P^2 \left\{ \left(\int_{\Omega} u(x) dx \right)^2 + \int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx \right\}$$

$\forall u \in H^1(\Omega)$ $\uparrow$

Mittlungsintegral zur
Erkennung von $u \equiv \text{const.}$!

d) Randereibung: $\Gamma = \partial\Omega$

$$\int_{\Gamma} u^2 dx \leq c_E^2 \int_{\Omega} (u^2 + |\nabla u|^2) dx \quad \forall u \in H^1(\Omega)$$

$$\|u\|_{L_2(\tilde{\Gamma})} \leq \|u\|_{L_2(\Gamma)} \leq c_E \|u\|_{H^1(\Omega)}$$

$\uparrow$
 $\tilde{\Gamma} \subset \Gamma$

■ Bemerkung 2.9:

1. Beziehung zwischen klassischer und verallgemeinerter Lösung:

$$\begin{array}{ccc}
 \text{KF} & & \text{VF} \\
 (6) & \begin{array}{c} \xrightarrow{f \in G[a,b]} \\ \xleftarrow{(mm6)} \end{array} & (7) \\
 f \in G'(a,b) & \begin{array}{c} \text{zusätzl. Vor.:} \\ \text{z.B. } f \in L_2(a,b) \cap G'[a,b] \\ u \in \tilde{V}_g \cap G'^2[a,b] \end{array} & f \in L_2(a,b)
 \end{array}$$

2. In der VF (7) können die Voraussetzungen an die Daten abgeschwächt werden:
 → Integrale müssen existieren !!!
 d.h. z.B. $f \in L_2(a,b)$ anstatt $f \in G'(a,b)$!
3. Wesentliche RB (= 1. Art = Dirichlet) gehen in die Definition von $\tilde{V}_g$ (Menge der zulässigen Fkten) und von $\tilde{V}_0$ (Raum der Testfkten.) ein. ▽
4. Natürliche RB (2. und 3. Art) gehen in die Variationsgleichung (7) ein. ▽
5. Die VF (7)

$$(7) \text{ Ges. } u \in \tilde{V}_g : a(u,v) = \langle F, v \rangle \quad \forall v \in \tilde{V}_0$$

ist Ausgangspkt. für die FE-Diskretisierung, während die klassische Formulierung (6) Ausgangspkt. für FDM (= Differenzenverfahren) ist. ▽

■ Übung 2.10:

Man gebe die Variationsformulierung der folgenden RWA (in klassischer Formulierung) an:

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Ges. } u(\cdot) \in C^2(a,b) \cap C^1[a,b]; \\ -(\lambda(x)u'(x))' + \alpha(x)u(x) = f(x), \forall x \in (a,b) \\ \text{RB: } \lambda(a)u'(a) = g_a \quad (2. \text{ Art} = \text{Neumann}) \\ \quad -\lambda(b)u'(b) = \alpha_b(u(b) - g_b) \quad (3. \text{ Art} = \text{Robin}) \end{array} \right.$$

Geben Sie Bedingungen an die Daten

$\lambda(\cdot), \alpha(\cdot), f(\cdot), g_a, g_b, \alpha_b$
an, so dass die gefundene Variationsformulierung korrekt (d.h. alle Integrale müssen existieren!) formuliert ist!

Zeigen Sie umgekehrt, dass jede verallgemeinerte Lösung $u \in V_g \cap C^2[a,b]$ auch klassische Lösung ist, falls die klassischen Voraussetzungen an die Daten erfüllt ist.

2.5. Auflösung tridiagonaler GS

- Btr. tridiagonales GS $K \underline{u} = \underline{f}$,
dessen allgem. Gestalt in Matrixform als

$$(13) \begin{bmatrix} c_1 & b_1 & 0 & & \\ a_2 & c_2 & b_2 & & \\ & a_3 & c_3 & b_3 & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots \\ \textcircled{11} & & & a_{n-1} & c_{n-1} & b_{n-1} \\ & & & 0 & a_n & c_n \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ \vdots \\ u_{n-1} \\ u_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \\ \vdots \\ f_{n-1} \\ f_n \end{bmatrix}$$

bzw. äquivalent in Gleichungsform als

$$\begin{aligned} c_1 u_1 + b_1 u_2 &= f_1 \\ a_i u_{i-1} + c_i u_i + b_i u_{i+1} &= f_i, \quad i = \overline{2, n-1} \\ a_n u_{n-1} + c_n u_n &= f_n \end{aligned}$$

geschrieben werden kann.

- Beispiel: FE-GS aus PKt. 2.3

$$\frac{1}{h} \begin{bmatrix} 2 & -1 & & & \\ -1 & 2 & -1 & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & -1 & 2 & -1 \\ & & & -1 & 1 + \alpha_b h \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_{n-1} \\ u_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ \vdots \\ f_{n-1} \\ f_n \end{bmatrix}$$

$$K_h \underline{u}_h = \underline{f}_h$$

■ Direktes Auflösungsverfahren basierend auf der Gaußschen Eliminationsidee:

● Eliminationsschritt ($\cong$ LU-Faktorisierung: Bem. 2.11)

$$\begin{aligned} 1. \quad u_1 + \alpha_2 u_2 &= \beta_2 \quad \Downarrow \quad u_1 = -\alpha_2 u_2 + \beta_2 \\ &\xRightarrow{2. \text{Gl.}} a_2(-\alpha_2 u_2 + \beta_2) + c_2 u_2 + b_2 u_3 = f_2 \\ &\Rightarrow (c_2 - a_2 \alpha_2) u_2 + b_2 u_3 = f_2 - a_2 \beta_2 \end{aligned}$$

$$\alpha_2 = \frac{b_1}{c_1}, \quad \beta_2 = \frac{f_1}{c_1}$$

$$\begin{aligned} 2. \quad u_2 + \alpha_3 u_3 &= \beta_3 \quad \Downarrow \quad u_2 = -\alpha_3 u_3 + \beta_3 \\ &\xRightarrow{3. \text{Gl.}} (c_3 - a_3 \alpha_3) u_3 + b_3 u_4 = f_3 - a_3 \beta_3 \end{aligned}$$

$$\alpha_3 = \frac{b_2}{c_2 - a_2 \alpha_2}, \quad \beta_3 = \frac{f_2 - a_2 \beta_2}{c_2 - a_2 \alpha_2}$$

$$\begin{aligned} 3. \quad u_3 + \alpha_4 u_4 &= \beta_4 \quad \Downarrow \quad u_3 = -\alpha_4 u_4 + \beta_4 \\ &\xRightarrow{4. \text{Gl.}} \quad \quad \quad \vdots \end{aligned}$$

$$\alpha_4 = \frac{b_3}{c_3 - a_3 \alpha_3}, \quad \beta_4 = \frac{f_3 - a_3 \beta_3}{c_3 - a_3 \alpha_3}$$

L. (mms)

$$\begin{aligned} (n-1). \quad u_{n-1} + \alpha_n u_n &= \beta_n \quad \Downarrow \quad u_{n-1} = -\alpha_n u_n + \beta_n \\ &\xRightarrow{n. \text{Gl.}} (c_n - a_n \alpha_n) u_n = f_n - a_n \beta_n \\ &\quad \quad \quad u_n = \beta_{n+1} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \alpha_n &= \frac{b_{n-1}}{c_{n-1} - a_{n-1} \alpha_{n-1}} \\ \beta_n &= \frac{f_{n-1} - a_{n-1} \beta_{n-1}}{c_{n-1} - a_{n-1} \alpha_{n-1}} \\ \beta_{n+1} &= \frac{f_n - a_n \beta_n}{c_n - a_n \alpha_n} \end{aligned}$$

Rückwärtseinsetzen
(Berechnung der u_i)

Vorwärtseinsetzen
(Berechnung der β_i)

$\Rightarrow$ Tridiag. GS wurde in GS mit Dreiecksmatrix überführt:

$$(14) \quad \begin{bmatrix} 1 & \alpha_2 & & & \\ & 1 & \alpha_3 & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & 1 & \alpha_n \\ \textcircled{11} & & & & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_{n-1} \\ u_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \beta_2 \\ \beta_3 \\ \vdots \\ \beta_n \\ \beta_{n+1} \end{bmatrix}$$

- Rückwärtseinsetzen:

Das GS (14) löst sich nun gemäß den Bez.

$$(15) \begin{cases} u_n = \beta_{n+1} \\ u_i = -\alpha_{i+1} u_{i+1} + \beta_{i+1}, \quad i = n-1, n-2, \dots, 1 \end{cases} \xrightarrow{\text{ }} \text{leicht auflösen.}$$

- Bem. 2.11: $K = LU$

1. Eliminationsschritt

$$K = LU$$

$= LU = \begin{bmatrix} \parallel \\ \parallel \\ \parallel \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & \dots & 1 \end{bmatrix}$ - Faktorisierung der Matrix K
Lower Upper

$$\begin{bmatrix} c_1 & & & & \\ a_2 & \Delta_2 & & & \\ & \ddots & \ddots & & \\ & & a_{n-1} & \Delta_{n-1} & \\ \textcircled{1} & & & a_n & \Delta_n \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & \alpha_2 & & & \\ & 1 & \alpha_3 & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ \textcircled{1} & & & 1 & \alpha_n \\ & & & & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_{n-1} \\ u_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ \vdots \\ f_{n-1} \\ f_n \end{bmatrix}$$

$L \quad \cdot \quad U \quad \quad \underline{u} = \underline{f}$

mit $\Delta_i = c_i - a_i \alpha_i$, $i = \overline{2, n}$ (mms),
 $\Delta_1 = c_1$.

$$K \underline{u} = \underline{f} \Leftrightarrow L \underbrace{U \underline{u}}_{= \underline{\beta} = \begin{bmatrix} \beta_1 \\ \vdots \\ \beta_n \end{bmatrix}} = \underline{f} \Leftrightarrow \begin{array}{l} 1. L \underline{\beta} = \underline{f} \quad (V) \\ 2. U \underline{u} = \underline{\beta} \quad (R) \end{array}$$

2. Bei neuer (vielen) rechten Seite wird einmal faktorisiert und die entsprechende Lösung schnell durch Vorwärts- und Rückwärtseinsetzen berechnet!

■ Zusammenfassung:

$$(13) \begin{bmatrix} c_1 & b_1 & 0 & & \\ a_2 & c_2 & b_2 & & \\ & a_3 & c_3 & b_3 & \\ & & & & \ddots \\ \textcircled{11} & & & a_{n-1} & c_{n-1} & b_{n-1} \\ & & & 0 & a_n & c_n \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ \vdots \\ u_{n-1} \\ u_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \\ \vdots \\ f_{n-1} \\ f_n \end{bmatrix}$$

$$\alpha_2 := b_1 / c_1$$

$$\beta_2 := f_1 / c_1$$

$$u_1 := -\alpha_2 u_2 + \beta_2$$

$$\alpha_3 := b_2 / \Delta_2$$

$$\beta_3 := (f_2 - a_2 \beta_2) / \Delta_2$$

$$u_2 := -\alpha_3 u_3 + \beta_3$$



$$\alpha_n := b_{n-1} / \Delta_{n-1}$$

mit

$$\beta_n := (f_{n-1} - a_{n-1} \beta_{n-1}) / \Delta_{n-1}$$

$$u_{n-1} := -\alpha_n u_n + \beta_n$$

$$\Delta_i := c_i - a_i \alpha_i \quad \beta_{n+1} := (f_n - a_n \beta_n) / \Delta_n \quad u_n := \beta_{n+1}$$

Faktorisieren Vorwärtseinsetzen Rückwärtseins.

$$\begin{bmatrix} c_1 & & & & \\ a_2 & \Delta_2 & & & \\ & \ddots & \ddots & & \\ \textcircled{11} & & a_{n-1} & \Delta_{n-1} & \\ & & & a_n & \Delta_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & \alpha_2 & & & \\ & 1 & \alpha_3 & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ \textcircled{11} & & & 1 & \alpha_n \\ & & & & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_{n-1} \\ u_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ \vdots \\ f_{n-1} \\ f_n \end{bmatrix}$$

L

U

u

=

f

=: β

$$Q = \#ops = 8n - 7$$

Anzahl der notwendigen arithmetischen Operationen

	Elimination Vorwärtseins.	Rückwärts- einsetzen	Σ
$\div$ Divisionen	$2n-1$		$2n-1$
$\times$ Multiplikationen	$2n-2$	$n-1$	$3n-3$
$+/-$ Additionen/Subtr.	$2n-2$	$n-1$	$3n-3$
	$6n-5$	$2n-2$	$8n-7=Q$

Die Anzahl $Q = \text{ops}(K^{-1} \cdot f) = 8n-7$ der notw. arithm. Operationen ist proportional zur Anzahl n der Unbek. des zu lösenden GS, d.h. $Q = O(n)$ $\rightarrow$ Verfahren ist asymp. optimal!

Speicherplatzbedarf: K, f sowie $\{\Delta_i\}, \{\alpha_i\}, \{\beta_i\}$ werden wie folgt gespeichert bzw. überschrieben:

$\circ = \text{falls } K=K^T$
 $a_{i+1} = b_i$
 $i = \overline{1, n-1}$

0	c ₁	b ₁	f ₁
a ₂	c ₂	b ₂	f ₂
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
a _{n-1}	c _{n-1}	b _{n-1}	f _{n-1}
a _n	c _n	0	f _n

$\xrightarrow{\text{überschreiben}} L$
 $\xrightarrow{\text{mit } U} \Delta_i$
 $\xrightarrow{\text{vorwärts}} \beta_i$
 $\xrightarrow{\text{rückwärts}} u_i$

0	c ₁	α ₂	β ₂	u ₁
a ₂	c ₂ - a ₂ α ₂	α ₃	β ₃	u ₂
$\vdots$	$\downarrow$	$\downarrow$	$\downarrow$	$\uparrow$
a _{n-1}	c _{n-1} - a _{n-1} α _{n-1}	α _n	β _n	u _{n-1}
a _n	c _n - a _n α _n	0	β _{n+1}	u _n

$= \det K = \det L \cdot \det U = \det L \cdot 1 = c_1 \cdot \Delta_2 \cdot \dots \cdot \Delta_n$
 $M = \text{Memory} = \text{Speicherplatz} = 4n$ (bzw. $3n$, falls $K=K^T$)
 $= O(n)$, d.h. asymptotisch optimal!

■ Durchführbarkeit und Stabilität: Folie 16f

● Satz 2.12:

Vor.: $|c_1| > 0, |c_n| > 0;$

$|a_i| > 0, |b_i| > 0 \forall i = \overline{2, n-1}; |b_1| > 0, |a_n| > 0;$

$|c_i| \geq |a_i| + |b_i| \forall i = \overline{2, n-1} \quad \left. \begin{array}{l} |c_1| \geq |b_1|, |c_n| \geq |a_n| \end{array} \right\} (*)$

wobei für wenigstens eine der Ungleichungen (*) " $>$ " gelten soll.

Bh.: 1. $\Delta_i = c_i - a_i \alpha_i \neq 0 \forall i = \overline{2, n}$ (Durchführb.)

2. $|\alpha_i| \leq 1 \forall i = \overline{2, n}$ (Stabilität)

Beweis: mms* (Induktion) bzw. siehe Literatur! ■

● Interpretation:

1. $\Delta_i \neq 0$ sichert die Berechenbarkeit von α_{i+1} und β_{i+1} !

2. $|\alpha_i| \leq 1$ sichert ab, daß Rundungsfehler, die in einem Rechenschritt auftreten, beim Übergang zum nächsten Schritt nicht anwachsen.

$$\left. \begin{array}{l} u_i = -\alpha_{i+1} u_{i+1} + \beta_{i+1} \\ \tilde{u}_i = -\alpha_{i+1} (u_{i+1} + \delta_{i+1}) + \beta_{i+1} \end{array} \right\} \Rightarrow \delta_i = \tilde{u}_i - u_i = -\alpha_{i+1} \delta_{i+1}$$

$$\Rightarrow \boxed{|\delta_i| \leq |\alpha_{i+1}| |\delta_{i+1}| \leq |\delta_{i+1}|, i = \overline{n-1, n-2, \dots, 1}}$$

Angen.: $\alpha_i = 1.1; \delta_1 = (-1)^n \alpha_2 \alpha_3 \dots \alpha_n \delta_n \approx (-1)^{n-1} (1.1)^{n-1} \delta_n$
 $n = 1000: (1.1)^{n-1} \approx 10^{41} !!!$

● Übung 2.13: Man zeige, daß die Vor. von Satz 2.12 durch die FE-Matrix

$$K_h = \frac{1}{h} \begin{bmatrix} 2 & -1 & & & 0 \\ -1 & 2 & -1 & & 0 \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ 0 & & -1 & 1 + \alpha_1 h \end{bmatrix} \text{ des GS } (\underline{7})_h \text{ erfüllt werden!}$$

• Illustration des Assemblierungsalgorithmus:

$$e = 1 \quad 2 \quad \dots \quad n = NE$$

$$\hat{K}^{(e)}: \begin{bmatrix} K_{11}^{(1)} & K_{12}^{(1)} \\ K_{21}^{(1)} & K_{22}^{(1)} \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} K_{11}^{(2)} & K_{12}^{(2)} \\ K_{21}^{(2)} & K_{22}^{(2)} \end{bmatrix} \quad \dots \quad \begin{bmatrix} K_{11}^{(n)} & K_{12}^{(n)} \\ K_{21}^{(n)} & K_{22}^{(n)} \end{bmatrix}$$

$$\underline{f}^{(e)}: \begin{bmatrix} f_1^{(1)} \\ f_2^{(1)} \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} f_1^{(2)} \\ f_2^{(2)} \end{bmatrix} \quad \dots \quad \begin{bmatrix} f_1^{(n)} \\ f_2^{(n)} \end{bmatrix}$$

$$\hat{K}_h = \begin{matrix} & \begin{matrix} 0 & 1 & 2 & & n-1 & n \end{matrix} \\ \begin{matrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ & \ddots & & \\ n-1 \\ n \end{matrix} & \left[\begin{array}{cccccc} K_{11}^{(1)} & K_{12}^{(1)} & & & & \\ K_{21}^{(1)} & K_{22}^{(1)} + K_{11}^{(2)} & K_{12}^{(2)} & & & \\ K_{21}^{(2)} & K_{22}^{(2)} + K_{11}^{(3)} & K_{12}^{(3)} & & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & K_{21}^{(n-1)} & K_{22}^{(n-1)} + K_{11}^{(n)} & K_{12}^{(n)} & \\ & & & K_{21}^{(n)} & K_{22}^{(n)} & \end{array} \right] \end{matrix} \quad (n+1) \times (n+1)$$

$$\hat{f}_h = \begin{matrix} & \begin{matrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ & \vdots & \\ n-1 \\ n \end{matrix} \\ \begin{matrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ & \vdots & \\ n-1 \\ n \end{matrix} & \left[\begin{array}{c} f_1^{(1)} \\ f_2^{(1)} + f_1^{(2)} \\ f_2^{(2)} + f_1^{(3)} \\ \vdots \\ f_2^{(n-1)} + f_1^{(n)} \\ f_2^{(n)} \end{array} \right] \end{matrix} \in \mathbb{R}^{n+1}$$

Algorithmus

Berechnung $K^{(i)}, f^{(i)}$ und Assemblierung zu $\hat{K}_h, \hat{f}_h$:

Initiate: $\hat{f}_h := 0, \hat{K}_h := 0$

FOR $e := 1$ STEP 1 UNTIL n DO

FOR $\alpha := 1$ STEP 1 UNTIL 2 DO

BEGIN

* compute $f_\alpha^{(e)}$;

* determine $i := i(e, \alpha)$; EZT

* update $\hat{f}_i := \hat{f}_i + f_\alpha^{(e)}$;

FOR $\beta := 1$ STEP 1 UNTIL 2 DO

BEGIN

* compute $K_{\alpha\beta}^{(e)}$;

* determine $j := j(e, \beta)$; EZT

* update $\hat{K}_{ij} := \hat{K}_{ij} + K_{\alpha\beta}^{(e)}$;

END

ENDFOR

END

ENDFOR

ENDFOR

$\Rightarrow \hat{f}_h, \hat{K}_h$ (ohne RB !)

$$f_\alpha^{(e)} := f(x_e - \frac{h}{2}) \frac{h}{2}, \quad \alpha = 1, 2;$$

$$K_{11}^{(e)} := \frac{1}{h}, \quad K_{12}^{(e)} := -\frac{1}{h}$$

$$K_{21}^{(e)} := -\frac{1}{h}, \quad K_{22}^{(e)} := \frac{1}{h} := \lambda \left(\frac{x_{e-1} + x_e}{2} \right) \left[\varphi_e' \left(\frac{x_{e-1} + x_e}{2} \right) \right]^2 \frac{(x_e - x_{e-1})^2}{h}$$

Bsp. 1 $\left(\frac{1}{h}\right)^2$ h

■ Einbau der Randbedingungen:

Im Bsp. aus Abs. 2.2 sind folgende RB vorgegeben:

$$x=a: u(a) = g_a \quad (1. \text{ Art} = \text{Dirichlet} = \text{wesentl.})$$

$$x=b: -u'(b) = \alpha_b (u(b) - g_b) \quad (2. \text{ Art} = \text{N.} = \text{nat.})$$

Mit

$$(K) \quad \int_a^b u_h'(x) v_h'(x) dx = (\hat{K}_h \hat{\underline{u}}_h, \hat{\underline{v}}_h)_{\mathbb{R}^{n+1}}$$

und

$$(f) \quad \int_a^b f(x) v_h(x) dx = (\hat{\underline{f}}_h, \hat{\underline{v}}_h)_{\mathbb{R}^{n+1}}$$

Können wir das FE-Schema $(7)_h$ wie folgt aufschreiben:

$(7)_h$

Ges. $\hat{\underline{u}}_h = (g_a, u_1, u_2, \dots, u_n)^T \in \mathbb{R}^{n+1}$

$$\hat{\underline{v}}^T \hat{K}_h \hat{\underline{u}}_h + \alpha_b u_n v_n = \hat{\underline{v}}^T \hat{\underline{f}}_h + \alpha_b g_b v_n$$

$$\forall \hat{\underline{v}}_h \in \mathbb{R}^{n+1}: v_0 = 0$$

d.h. $(7)_h$ ist äquivalent zu:

$$\underline{v}_h^T \tilde{K}_h \hat{\underline{u}}_h + \alpha_b u_n v_n = \underline{v}_h^T \tilde{\underline{f}}_h + \alpha_b g_b v_n \quad \forall \underline{v}_h \in \mathbb{R}^n$$

mit $\underline{v}_h = (v_1, \dots, v_n)^T$, $\tilde{\underline{f}}_h = (f_1, \dots, f_n)^T$ und $\tilde{K}_h = [\hat{K}_{ij}]_{i,j=1,n}$.

$$\begin{array}{c}
 0 \\
 1 \\
 2 \\
 \vdots \\
 n-1 \\
 n
 \end{array}
 \begin{bmatrix}
 K_{11}^{(1)} & K_{12}^{(1)} & & & \\
 K_{21}^{(1)} & K_{22}^{(1)} + K_{11}^{(2)} & K_{12}^{(2)} & & \\
 0 & K_{21}^{(2)} & K_{22}^{(2)} + K_{11}^{(3)} & K_{12}^{(3)} & \\
 \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots \\
 0 & \textcircled{1} & & K_{21}^{(n-1)} & K_{22}^{(n-1)} + K_{11}^{(n)} & K_{12}^{(n)} \\
 0 & & & K_{21}^{(n)} & K_{22}^{(n)} + \alpha_b
 \end{bmatrix}
 \begin{bmatrix}
 g_a \\
 u_1 \\
 u_2 \\
 \vdots \\
 u_{n-1} \\
 u_n
 \end{bmatrix}
 =
 \begin{bmatrix}
 f_1^{(1)} \\
 f_2^{(1)} + f_1^{(2)} \\
 f_2^{(2)} + f_1^{(3)} \\
 \vdots \\
 f_2^{(n-1)} + f_1^{(n)} \\
 f_2^{(n)} + \alpha_b g_b
 \end{bmatrix}$$

0 1 2 n-1 n

$$\begin{bmatrix}
 K_{22}^{(1)} + K_{11}^{(2)} & K_{12}^{(2)} & & & \\
 K_{21}^{(2)} & K_{22}^{(2)} + K_{11}^{(3)} & K_{12}^{(3)} & & \\
 & & & & \\
 & & & & \\
 \textcircled{1} & & & K_{21}^{(n-1)} & K_{22}^{(n-1)} + K_{11}^{(n)} & K_{12}^{(n)} \\
 & & & K_{21}^{(n)} & K_{22}^{(n)} + \alpha_b
 \end{bmatrix}
 \begin{bmatrix}
 u_1 \\
 u_2 \\
 \vdots \\
 u_{n-1} \\
 u_n
 \end{bmatrix}
 =
 \begin{bmatrix}
 f_2^{(1)} + f_1^{(2)} - K_{21}^{(1)} g_a \\
 f_2^{(2)} + f_1^{(3)} \\
 \vdots \\
 f_2^{(n-1)} + f_1^{(n)} \\
 f_2^{(n)} + \alpha_b g_b
 \end{bmatrix}$$

(7)_h

K_h

$\underline{u}_h = \underline{f}_h$

Damit haben wir die RB $u(a) = g_a$ und $-u'(b) = \alpha_b (u(b) - g_b)$ eingearbeitet!

Bem.: Alternativ können wir die RB 1. Art

$u(b) = g_b$ approximativ als RB 3. Art

$-u'(b) = \alpha_b (u(b) - g_b)$ mit $\alpha_b = 10^5$ einarbeiten!

$$\Downarrow u_n = g_b + \frac{1}{\alpha_b} [f_2^{(n)} - K_{21}^{(n)} u_{n-1} - K_{22}^{(n)} u_n] = g_b + O(10^{-5})$$

■ Zusammenfassung der Schritte zur Generierung des FE-Gleichungssystem:

1. Zerlegung des Rechengebiets $\Omega = (a,b)$ in finite Elemente $d_e := (x_{e-1}, x_e)$, $e = 1, 2, \dots, NE = n_e$ und Generierung der Knotenkoordinaten und der Elementzusammenhangstabelle.
2. Für alle Elemente d_e (Schleife über alle Elemente):
 - * Berechnung der Elementlastvektoren $\underline{f}^{(e)}_i$
 - * Berechnung der Elementsteifigkeitsmatr. $K^{(e)}_{ij}$
 - * Einbau von $\underline{f}^{(e)}$ bzw. $K^{(e)}$ in den globalen Lastvektor $\hat{\underline{f}}_h$ bzw. in die globale Steifigkeitsmatrix $\hat{K}_h$.
3. Einbau der Randbedingungen in das FE-GS: $K_h \underline{u}_h = \underline{f}_h$

2.7. 1D-Lagrange-Elemente höherer Ordnung

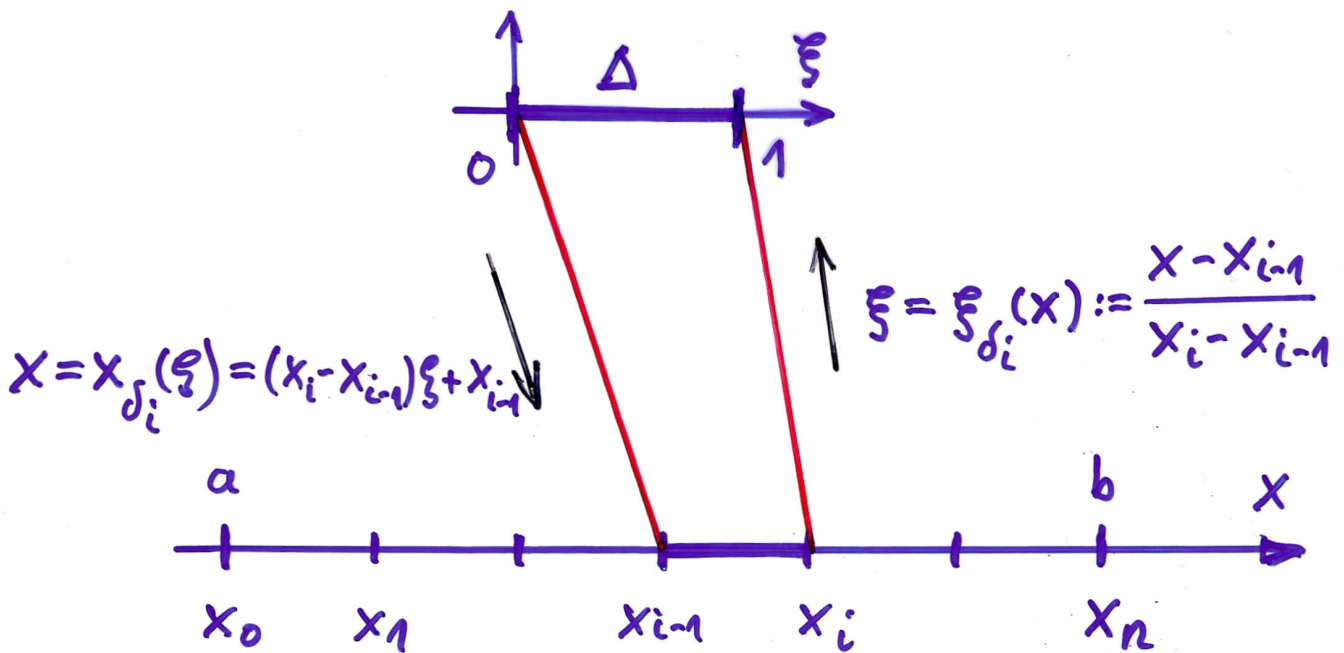
- Die im Weiteren eingeführten Elemente heißen **Lagrange-Elemente**, da zu ihrer Definition **Lagrange-Interpolationspolynome** genutzt werden.

Zerlegen dazu wieder das Rechengebiet $\bar{\Omega} = [a, b]$ in n finite Elemente $\bar{\delta}_i = [x_{i-1}, x_i]$, $i = \overline{1, n}$:

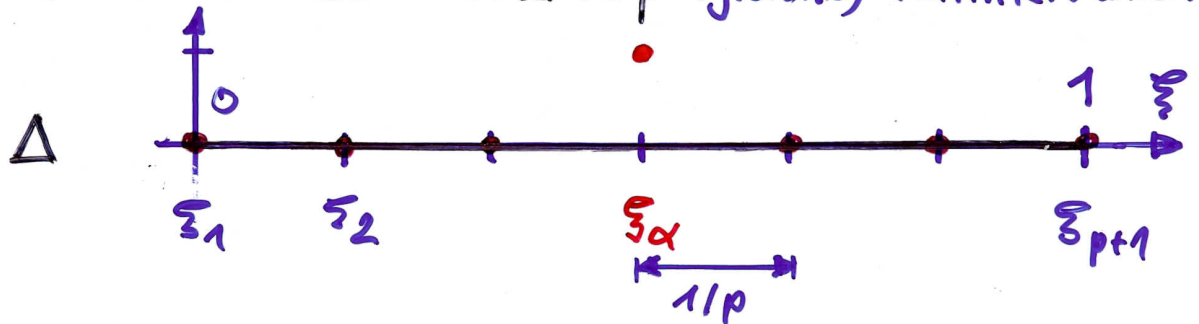
$$\overline{\Omega} = \bigcup_{i=1}^n \overline{\delta_i} = \bigcup_{i=1}^n [x_{i-1}, x_i] =$$

Zur Definition der Lagrange-Elemente ($\rightarrow$ Formfkten) und Ansatzfkten führen wir folgende Schritte durch:

1. Abbildung eines bel. Elements δ_i auf das sogen. Basiselement $\bar{\Delta} = [0,1]$ (Abbildungsprinzip):



2. Definition der Formfkt. Φ_α auf dem Basiselement Δ :
Teilen dazu Basisel. Δ in p (gleiche) Teilintervalle:



Ges.: $\Phi_\alpha(\xi)$: 1) Polynom p -ten Grades: $\Phi_\alpha \in \mathbb{P}_p$
2) $\Phi_\alpha(\xi_\beta) = \delta_{\alpha\beta}$, $\alpha, \beta = \overline{1, p+1}$

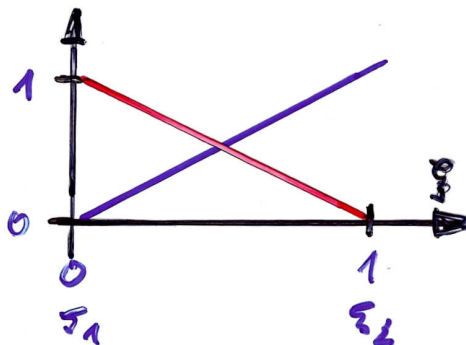
Lösung:

$$\Phi_\alpha(\xi) = \prod_{\substack{\beta=1 \\ \beta \neq \alpha}}^{p+1} \frac{(\xi - \xi_\beta)}{(\xi_\alpha - \xi_\beta)}$$

Beispiele:

lin. El.
+ +

$p=1$

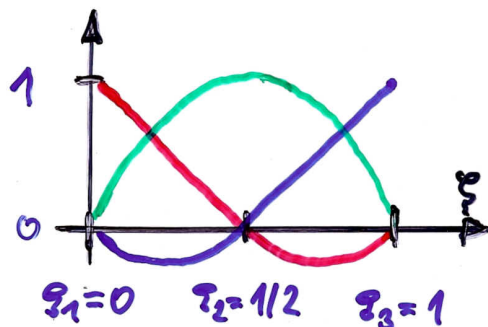


$$\Phi_1 = \Phi_1(\xi) := 1 - \xi$$

$$\Phi_2 = \Phi_2(\xi) := \xi$$

quadrat.
Element
+ o +

$p=2$



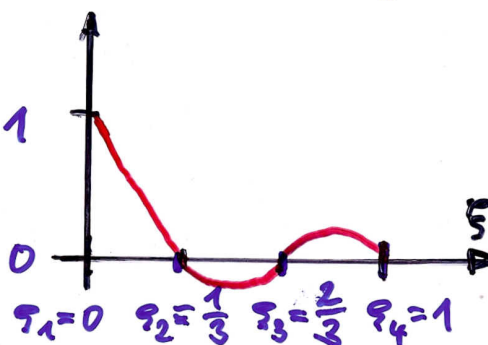
$$\Phi_1(\xi) := 2\xi^2 - 3\xi + 1$$

$$\Phi_2(\xi) := -4\xi^2 + 4\xi$$

$$\Phi_3(\xi) := 2\xi^2 - \xi$$

Kubisches
Element
+ o o +

$p=3$



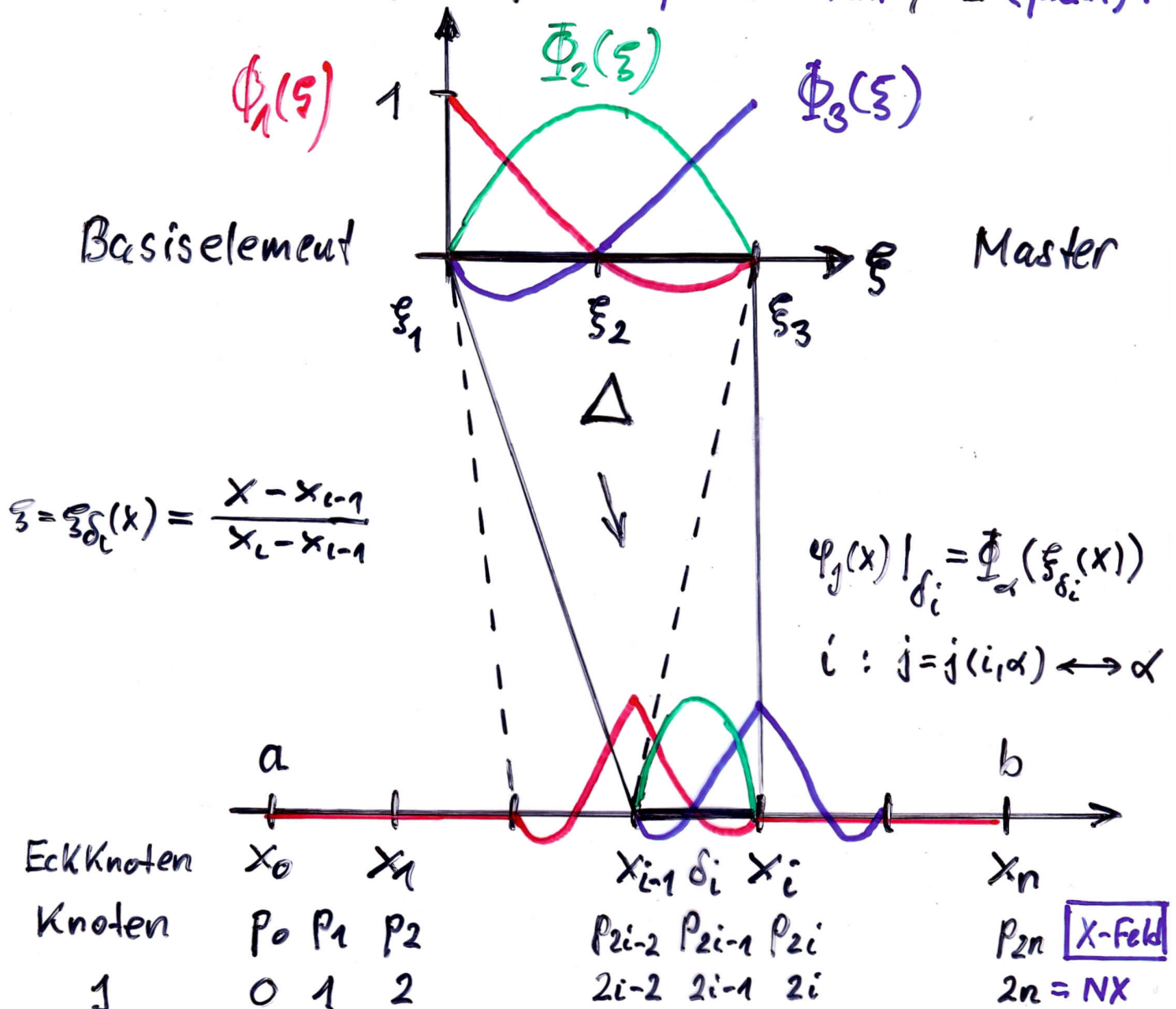
$$\Phi_1(\xi) := -\frac{9}{2}(\xi - \frac{1}{3})(\xi - \frac{2}{3})(\xi - 1)$$

$$\Phi_2(\xi) :=$$

$$\Phi_3(\xi) :=$$

$$\Phi_4(\xi) :=$$

3. Def. der Ansatzfkt ψ_j bzw. Formfkt. $\psi_j |_{\delta_i}$ durch Abb. ($\delta_i \leftrightarrow \Delta$) z.B. für den Fall $p=2$ (quad.):



E2T

Element #	lokal		
	1	2	3
1	0	1	2
2	2	3	4
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
i	$2i-2$	$2i-1$	$2i$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
NE = n	$2n-2$	$2n-1$	$2n$

C-Feld

Element Zusammenhangstabelle

- Wie im Falle Linearer Elemente ($\rightarrow$ Abs. 2.6) werden $\hat{K}_h$ (Steifigkeitsmatrix ohne RB) und $\hat{f}_h$ (Lastvektor ohne Berücksichtigung der RB) elementeweise generiert, z.B. für $p=2$ (—●—●—●—):

$$e = \quad 1 \quad \quad \quad 2 \quad \quad \quad \dots \quad \quad \quad n$$

$$\hat{K}^{(e)} : \begin{bmatrix} K_{11}^{(1)} & K_{12}^{(1)} & K_{13}^{(1)} \\ K_{21}^{(1)} & K_{22}^{(1)} & K_{23}^{(1)} \\ K_{31}^{(1)} & K_{32}^{(1)} & K_{33}^{(1)} \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} \circ & \circ & \circ \\ \circ & \circ & \circ \\ \circ & \circ & \circ \end{bmatrix} \quad \dots \quad \begin{bmatrix} \times & \times & \times \\ \times & \times & \times \\ \times & \times & \times \end{bmatrix}$$

$$\hat{f}^{(e)} : \begin{bmatrix} f_1^{(1)} \\ f_2^{(1)} \\ f_3^{(1)} \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} \circ \\ \circ \\ \circ \end{bmatrix} \quad \dots \quad \begin{bmatrix} \times \\ \times \\ \times \end{bmatrix}$$

$$\hat{K}_h = \begin{matrix} & \begin{matrix} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{matrix} & \begin{bmatrix} \times & \times & \times & & \\ \times & \times & \times & & \\ \times & \times & \times & & \\ & \times & \times & \circ & \circ \\ & & \times & \circ & \circ \end{bmatrix} \end{matrix} \quad \dots \quad \begin{matrix} & \begin{matrix} 2n-2 & 2n-1 & 2n \end{matrix} \\ \begin{matrix} 2n-2 \\ 2n-1 \\ N=2n \end{matrix} & \begin{bmatrix} \circ & \circ & \circ \\ \circ & \circ & \circ \\ \circ & \circ & \circ \end{bmatrix} \end{matrix}$$

5-diagonal
(2p+1)-diagonal
(N+1) x (N+1)

$$\hat{f}_h = \begin{matrix} & \begin{matrix} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{matrix} & \begin{bmatrix} \times \\ \times \\ \times \\ \times \\ \times \end{bmatrix} \end{matrix} \quad \dots \quad \begin{matrix} & \begin{matrix} 2n-2 & 2n-1 & 2n \end{matrix} \\ \begin{matrix} 2n-2 \\ 2n-1 \\ N=2n \end{matrix} & \begin{bmatrix} \times \\ \times \\ \times \end{bmatrix} \end{matrix} \in \mathbb{R}^{N+1}$$

Die Koeffizienten von

$$\hat{K}^{(i)} = \begin{bmatrix} K_{11}^{(i)} & K_{12}^{(i)} & K_{13}^{(i)} \\ K_{21}^{(i)} & K_{22}^{(i)} & K_{23}^{(i)} \\ K_{31}^{(i)} & K_{32}^{(i)} & K_{33}^{(i)} \end{bmatrix} \quad \text{und} \quad \hat{f}^{(i)} = \begin{bmatrix} f_1^{(i)} \\ f_2^{(i)} \\ f_3^{(i)} \end{bmatrix}$$

werden mittels Abbildung auf das Basiselement

$$\bar{\delta}_i = [x_{i-1}, x_i] \quad \begin{array}{c} \xrightarrow{\xi = \xi_{\delta_i}(x) := \dots} \\ \xleftarrow{x = x_{\delta_i}(\xi) := \dots} \end{array} \quad \bar{\Delta} = [0, 1]$$

berechnet, d.h. für unser Bsp. (vgl. (K), $\lambda=1$)

$$\int_a^b \lambda(x) u_h'(x) v_h'(x) dx = \sum_{i=1}^n \int_{x_{i-1}}^{x_i} \lambda(x) u_h'(x) v_h'(x) dx = \dots$$

folgt z.B. für

$$K_{11}^{(i)} = \int_{x_{i-1}}^{x_i} \lambda(x) \frac{d\varphi_{2i-2}}{dx}(x) \cdot \frac{d\varphi_{2i-2}}{dx} dx$$

$$= \int_0^1 \lambda(x_{\delta_i}(\xi)) \frac{1}{h} \frac{d\phi_1}{d\xi}(\xi) \cdot \frac{1}{h} \frac{d\phi_1}{d\xi}(\xi) h d\xi$$

$$\delta_i \leftarrow \bar{\Delta} : \quad \begin{array}{l} \xleftarrow{\phi_1(\xi)} \\ \xrightarrow{\xi = \xi_{\delta_i}(x)} \end{array} \quad \begin{array}{l} x = x_{\delta_i}(\xi) = (x_i - x_{i-1}) \xi + x_{i-1} = h\xi + x_{i-1} \\ \xi = \xi_{\delta_i}(x) = \frac{x - x_{i-1}}{x_i - x_{i-1}} = \frac{1}{h} (x - x_{i-1}) \end{array}$$

$$dx = h d\xi, \quad \frac{d}{dx} = \frac{d}{d\xi} \frac{d\xi}{dx} = \frac{1}{h} \frac{d}{d\xi}$$

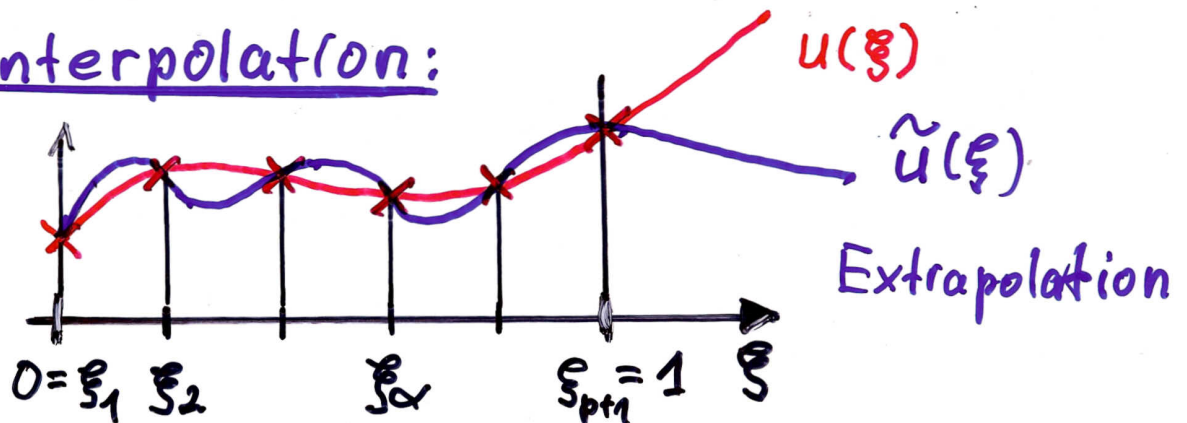
$$= \frac{1}{h} \int_0^1 \lambda(x_{\delta_i}(\xi)) \underbrace{\frac{d\phi_1}{d\xi}(\xi) \frac{d\phi_1}{d\xi}(\xi)}_{=: g(\xi)} d\xi$$

$$\approx \frac{1}{h} \left[\frac{1}{2} g\left(\frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{\sqrt{3}}\right)\right) + \frac{1}{2} g\left(\frac{1}{2} \left(1 + \frac{1}{\sqrt{3}}\right)\right) \right]$$

$$\uparrow \text{GAUSS 2:} \quad \begin{array}{c} \bullet \quad \bullet \\ | \quad | \\ 0 \quad 1 \end{array} = \Delta$$

■ Anwendungen der Lagrange Interpolationspolynome:

a) Interpolation:

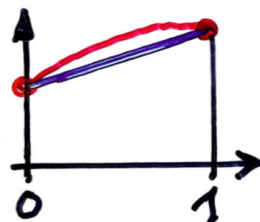


$$\tilde{u}(\xi) := \sum_{\alpha=1}^{p+1} \underset{u(\xi_\alpha)}{u_\alpha} \Phi_\alpha(\xi) \approx u(\xi)$$

b) Numerische Integration: Newton-Cotes-Formeln

$$\begin{aligned} \int_0^1 u(\xi) d\xi &\approx \int_0^1 \tilde{u}(\xi) d\xi = \sum_{\alpha=1}^{p+1} u(\xi_\alpha) \underbrace{\int_0^1 \Phi_\alpha(\xi) d\xi}_{=: w_\alpha} \\ &= \sum_{\alpha=1}^{p+1} \underset{\substack{\uparrow \\ \text{Stützstellen}}}{u(\xi_\alpha)} \underset{\substack{\uparrow \\ \text{Gewichte}}}{w_\alpha} \end{aligned}$$

Bsp.: $p=1$



Trapezregel

$$\xi_1 = 0: w_1 = \int_0^1 (1-\xi) d\xi = 1/2$$

$$\xi_2 = 1: w_2 = \int_0^1 \xi d\xi = 1/2$$

$$\int_0^1 u(\xi) d\xi \approx \frac{1}{2} (u(0) + u(1))$$

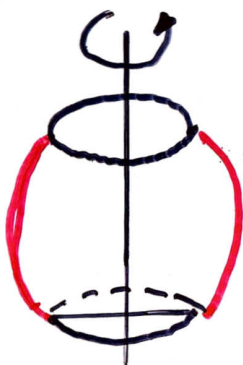
Keplersche Faßregel

$$\xi_1 = 0: w_1 = \int_0^1 (2\xi^2 - 2\xi + 1) d\xi = \frac{1}{6}$$

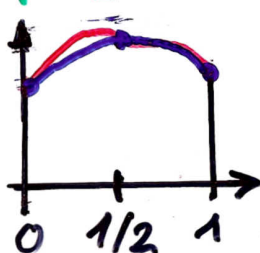
$$\xi_2 = 1/2: w_2 = \int_0^1 (-4\xi^2 + 4\xi) d\xi = \frac{4}{6}$$

$$\xi_3 = 1: w_3 = \int_0^1 (2\xi^2 - \xi) d\xi = \frac{1}{6}$$

$$\int_0^1 u(\xi) d\xi \approx \frac{1}{6} (u(0) + 4u(1/2) + u(1))$$



$p=2$



2.8. Diskretisierungsfehlerabschätzung

■ Exakte Lösung des RWP (Bsp. aus Abs. 2.2):

$$(7) \quad \boxed{\text{Ges. } u \in V_g: a(u, v) = \langle F, v \rangle \quad \forall v \in \bar{V}_0}$$

wobei für unser Bsp. aus Abs. 2.2:

$V_g := \{v \in V := H^1(a, b): v(a) = g_a\}$ - Menge der zul. Fktn,

$V_0 := \{v \in V: v(a) = 0\}$ - Raum der Testfkttn,

$a(u, v) := \int_a^b u'(x) v'(x) dx + \alpha_b u(b) v(b)$ - Bilinearform,

$\langle F, v \rangle := \int_a^b f(x) v(x) dx + \alpha_b g_b v(b)$ - Linearform.

■ FE-Lösung u_h : $N = n(p-1) + n = NX$

$$(7)_h \quad \boxed{\text{Ges. } u_h(x) = \sum_{i=1}^N u_i \varphi_i(x) + g_a \varphi_0(x) \in V_{gh}: \\ a(u_h, v_h) = \langle F, v_h \rangle \quad \forall v_h \in V_{0h}}$$

wobei

$$V_{gh} := \{v_h(x) = \sum_{i=1}^N v_i \varphi_i(x) + g_a \varphi_0(x)\} \subset V_g,$$

$$V_{0h} := \{v_h(x) = \sum_{i=1}^N v_i \varphi_i(x)\} := \text{span}\{\varphi_1, \dots, \varphi_N\} \subset \bar{V}_0.$$

$$(7)_h \quad \boxed{\text{Ges. } \underline{u}_h = (u_1, \dots, u_N)^T \in \mathbb{R}^N: K_h \underline{u}_h = \underline{f}_h}$$

■ FE-Code:

1. Generieren ($\rightarrow$ Abs. 2.6 bzw. 2.7)
2. Lösen ($\rightarrow$ Abs. 2.5 bzw. mms bzw. Kap. 4) des linearen Gleichungssystems.

- Beurteilung des Fehlers $e = u - u_h \in \tilde{V}_0$:

- Zur Beurteilung des Fehlers benötigen wir eine Norm $\|\cdot\|$ (siehe Abs. 2.1: Normaxiome). In der Praxis sind folgende Normen interessant:

1. G-Norm: $\|v\|_G = \|v\|_{G[a,b]} := \max_{x \in [a,b]} |v(x)|$, d.h. ^{stetig}

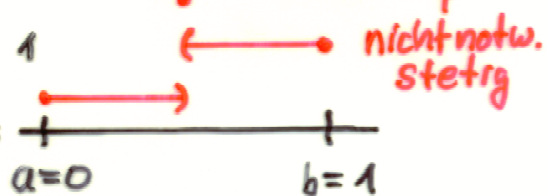
$$\|u - u_h\|_C = \max_{x \in [a, b]} |u(x) - u_h(x)| \leq ? \quad (h \rightarrow 0)$$

Bemerkung: L_∞ -Norm: $\|v\|_\infty := \operatorname{ess\,sup}_{x \in (a,b)} |v(x)|$

max	min
sup	inf
ess sup	ess inf

$$\|v\|_{L^2} = 1$$

z.B. $V(x)$



2. L_2 -Norm: $\|v\|_{L_2(a,b)} = \|v\|_6 := \sqrt{\int_a^b |v(x)|^2 dx}$, d.h.

$$\|u - u_h\|_0 = \sqrt{\int_a^b (u(x) - u_h(x))^2 dx} \leq ? \quad (h \rightarrow 0)$$

3. L_p -Norm: $\|v\|_{L_p(a,b)} := \sqrt[p]{\int_a^b |v(x)|^p dx}$, d.h.

$$\|u - u_h\|_{L_p(a,b)} = \sqrt[p]{\int_a^b |u(x) - u_h(x)|^p} \leq ? \quad (h \rightarrow 0)$$

4. H^1 -Norm: $\|v\|_{H^1(a,b)} = \|v\|_1 := \sqrt{\int_a^b (v^2 + (v')^2) dx}$:

$$\|u - u_h\|_1 = \sqrt{\int_a^b [|u(x) - u_h(x)|^2 + |u'(x) - u_h'(x)|^2] dx} \quad ?$$

5. Energienorm: $||| v ||| := (a(v, v))^{1/2}$

falls die Bilinearform $a(\cdot, \cdot)$

- symmetrisch, d.h. $a(u,v) = a(v,u) \quad \forall u,v \in V_0$

- positiv, d.h. $a(v,v) > 0 \quad \forall v \in V_0 : v \neq 0$

$$\text{ist: } ||| u - u_h ||| = \sqrt{a(u - u_h, u - u_h)} \leq ? \quad (h \rightarrow 0)$$

• Man unterscheidet:

1. A-priori - Fehlerabschätzungen:

$$\|u - u_h\| \leq c(u) h^\beta \xrightarrow{h \rightarrow 0} 0$$

mit $\beta > 0$, $\beta = \beta$ (Glattheit von u , FE) - "bekannt" (?),
 $c = c(u) > 0$: $c \neq c(h)$, aber unbekannt!

2. A-posteriori - Fehlerabschätzungen:

$$\|u - u_h\| \leq c(u_h, h) \text{ - berechenbar!}$$

$$\text{z.B. } \underbrace{\left(\sum_{i=1}^{NE} \eta_{\delta_i}^2(u_h) \right)^{1/2}}_{\text{Effektivität (efficiency)}} \leq \|u - u_h\| \leq \underbrace{\tilde{c} \left(\sum_{i=1}^{NE} \eta_{\delta_i}^2(u_h) \right)^{1/2}}_{\text{Zuverlässigkeit (reliability)}}$$

Effektivität (efficiency) Zuverlässigkeit (reliability)

wobei $\eta_{\delta_e}(u_h)$ - berechenbarer Elementfehlerschätzer

→ Gitteradaption!

• Generelle Voraussetzungen:

(V0) V_0 -Beschränktheit der Linearform $\langle F, \cdot \rangle$,

d.h. $\exists$ Konstante $c = \text{const} > 0$:

$$|\langle F, v \rangle| \leq c \cdot \|v\|_1 \quad \forall v \in \bar{V}_0.$$

(V1) V_0 -Elliptizität der Bilinearform $a(\cdot, \cdot)$,

d.h. $\exists$ Konstante $\mu_1 = \text{const} > 0$:

$$a(v, v) \geq \mu_1 \|v\|_1^2 \quad \forall v \in \bar{V}_0.$$

(V2) V_0 -Beschränktheit der Bilinearform $a(\cdot, \cdot)$,

d.h. $\exists$ Konstante $\mu_2 = \text{const} > 0$:

$$|a(w, v)| \leq \mu_2 \|w\|_1 \|v\|_1 \quad \forall w, v \in \bar{V}_0.$$

Die Voraussetzungen (V0)-(V2) sind für unser Bsp. (7) aus Abs. 2.2 erfüllt. Tatsächlich,

$$(V0) \quad |\langle F, v \rangle| = \left| \int_a^b f(x) v(x) dx + \alpha_b g_b v(b) \right| \leq \\ \leq \|f\|_0 \|v\|_0 + |\alpha_b| |g_b| |v(b)| \quad (v(a)=0)$$

$$\text{NR! } v(b) = \int_a^b v'(x) dx = \int_a^b v'(x) \cdot 1 dx$$

$$|v(b)| = \left| \int_a^b v' \cdot 1 dx \right| \leq \sqrt{\int_a^b |v'|^2 dx} \sqrt{\int_a^b 1^2 dx} \\ \leq \sqrt{b-a} \|v\|_1$$

$$\|v\|_0 \leq \|v\|_1$$

$$\leq \|f\|_0 \|v\|_1 + |\alpha_b| |g_b| \sqrt{b-a} \|v\|_1 = c \|v\|_1$$

$$\text{mit } c = \|f\|_0 + |\alpha_b| |g_b| \sqrt{b-a}.$$

$$(V1) \quad a(v, v) = \int_a^b v' \cdot v' dx + \underbrace{\alpha_b v^2(b)}_{\geq 0} \geq \int_a^b (v'(x))^2 dx =$$

$$= \frac{1}{2} \int_a^b (v'(x))^2 dx + \frac{1}{2} \int_a^b (v'(x))^2 dx$$

$$\geq \frac{1}{2} \frac{1}{c_F^2} \int_a^b (v(x))^2 dx + \frac{1}{2} \int_a^b (v'(x))^2 dx$$

Abs. 2.1 $\nearrow$
Friedrichs-Ungl.: $\int_a^b v^2 dx \leq c_F^2 \int_a^b (v')^2 dx \quad \forall v \in \tilde{V}_0, \mu_1 = \min\{\frac{1}{2c_F^2}, \frac{1}{2}\}$

$$(V2) \quad |a(w, v)| = \left| \int_a^b w' v' dx + \alpha_b w(b) v(b) \right| \leq$$

$$\leq \left| \int_a^b w'(x) v'(x) dx \right| + |\alpha_b| |w(b)| |v(b)| \leq$$

$$\leq \sqrt{\int_a^b |w'(x)|^2 dx} \sqrt{\int_a^b |v'(x)|^2 dx} + |\alpha_b| |w(b)| |v(b)|$$

NR

$$\leq \|w\|_1 \cdot \|v\|_1 + \alpha_b (b-a) \|w\|_1 \|v\|_1$$

$$= \underbrace{(1 + \alpha_b (b-a))}_{=: \mu_2} \|w\|_1 \|v\|_1 \quad \forall w, v \in \tilde{V}_0.$$

■ Satz 2.14.: (Lax und Milgram)Vor.: Es gelten die Vor. (V0), (V1) und (V2).Bh.: 1. $\exists! u \in V_g : (7)$ 2. $\exists! u_h \in V_{gh} : (7)_h \Leftrightarrow \exists! \underline{u}_h \in \mathbb{R}^N : (\underline{7})_h$ Beweis: siehe Literatur!■ Satz 2.15.: (Cea)Vor.: Es gelten die Vor. (V0), (V1) und (V2)Bh.: Dann gilt die Fehlerabschätzung

$$(16) \quad \underbrace{\| \overset{(7)}{u} - \overset{(7)_h}{u_h} \|_1}_{\text{Diskretisierungsfehler}} \leq \underbrace{\frac{\mu_2}{\mu_1} \min_{w_h \in \bar{V}_{gh}} \| u - w_h \|_1}_{\text{Approximationsfehler}}$$

Diskretisierungsfehler

Approximationsfehler

Beweis:

$$(7) \quad u \in V_g : a(u, v_h) = \langle F, v_h \rangle \quad \forall v_h \in V_{oh} \subset V_0$$

$$- (7)_h \quad u_h \in V_{gh} : a(u_h, v_h) = \langle F, v_h \rangle \quad \forall v_h \in V_{oh}$$

$$(17) \quad a(u - u_h, v_h) = 0 \quad \forall v_h \in V_{oh}$$

GALERKIN - Orthogonalität!

$$\text{Setzen } v_h = (u - u_h) - (u - w_h) = w_h - u_h \in V_{oh} \quad \forall w_h \in \bar{V}_{gh}$$

$$a(u - u_h, u - u_h - (u - w_h)) = 0 \quad \forall w_h \in \bar{V}_{gh}$$

$$a(u - u_h, u - u_h) = a(u - u_h, u - w_h) \quad -"$$

$$(V1) \quad \begin{array}{ccc} \xrightarrow{\quad} v_1 & & \xrightarrow{\quad} \lambda_1 \\ \mu_1 \|u - u_h\|_1^2 & & \mu_2 \|u - u_h\|_1 \|u - w_h\|_1 \end{array}$$

$$\Rightarrow (16) \quad \text{q.e.d.}$$

■ Zurückführen auf den Interpolationsfehler:

Aus Satz 2.15 (Cea) folgt

$$(16) \quad \underbrace{\|u - u_h\|_1}_{\text{Diskretisierungsfehler}} \leq \frac{\mu_2}{\mu_1} \underbrace{\min_{w_h \in \bar{V}_{gh}} \|u - w_h\|_1}_{\text{Approximationsfehler}} \leq \frac{\mu_2}{\mu_1} \underbrace{\|u - \tilde{u}_h\|_1}_{\text{Interpolationsfehler}}$$

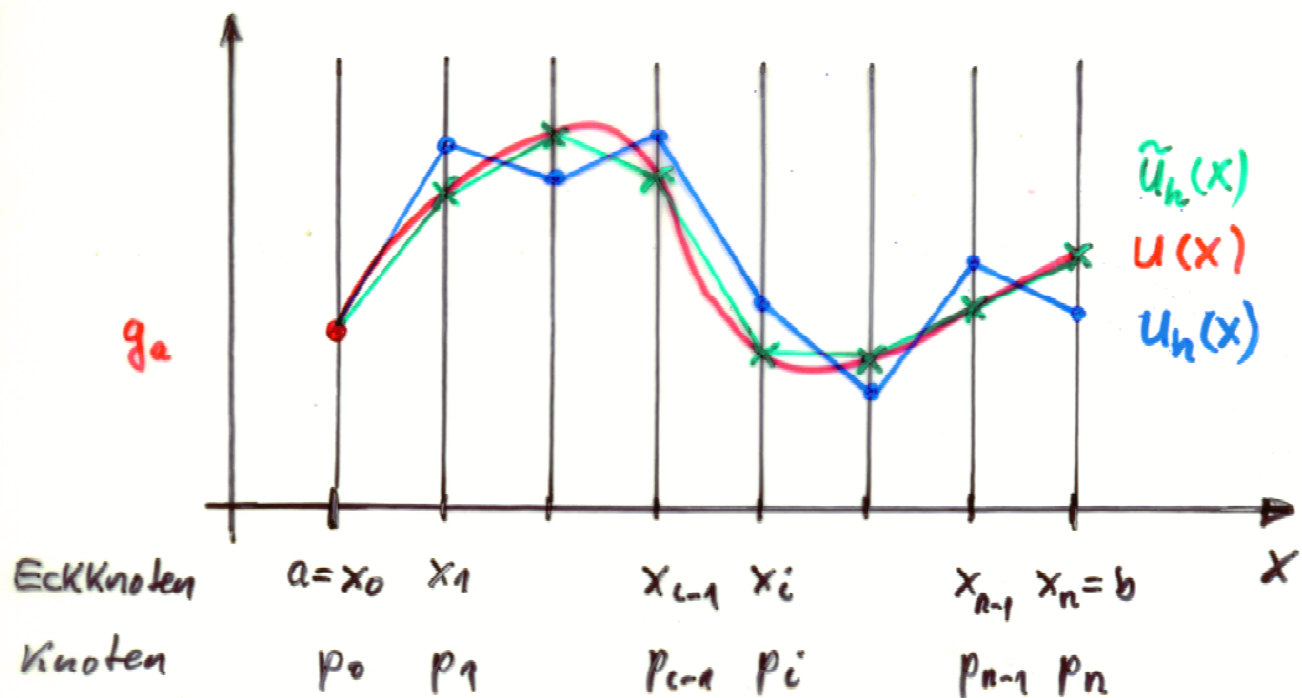
Diskretisierungs-
fehler

Approximations-
fehler

Interpolations-
fehler

Interpolant

$$(18) \quad \tilde{u}_h(x) = \text{Int}_h(u) := \sum_{i=0}^N u(p_i) \varphi_i(x) \in \bar{V}_{gh}$$



Lemma 2.16: (Interpolationsfehlerabschätzung)

Unter den Voraussetzungen

$$(19) \begin{cases} p=1 \\ u'' \in L_2(\delta_i), i=\overline{1,n} \quad (n=NE) \end{cases}$$

gilt die Interpolationsfehlerabschätzung

$$(20) \|u - \tilde{u}_h\|_{H^1(a,b)} \leq (1+c_F^2)^{0.5} \left(\sum_{i=1}^n h_i^2 \|u''\|_{L_2(\delta_i)}^2 \right)^{1/2}$$

$$\leq (1+c_F^2)^{0.5} h \|u''\|_{L_2(a,b)}$$

falls $u'' \in L_2(a,b)$, d.h. $u \in H^2(a,b)$, $h = \max\{h_i\}$ Beweis: siehe Folien* NumOpt 25 h + 25 j ■

Setzt man (20) in (16) ein, dann folgt:

$$(21) \|u - u_h\|_{H^1(a,b)} \leq \frac{\mu_2}{\mu_1} (1+c_F^2)^{0.5} \left(\sum_{i=1}^n h_i^2 \|u''\|_{L_2(x_{i-1}, x_i)}^2 \right)^{1/2}$$

Damit haben wir den folgenden Satz bewiesen:

Satz 2.17: (H^1 -Konvergenz)Vor.: 1) $(V_0), (V_1), (V_2)$ 2) $p=1$ (Lineare Elemente)3) Lsg. $u \in V_g$: (7): $\exists u'' \in L_2(\delta_i) \forall i=\overline{1,n}$.Bh.: Dann gilt die Diskretisierungsfehlerabschätzung

$$(21) \|u - u_h\|_{H^1(a,b)} \leq \frac{\mu_2}{\mu_1} (1+c_F^2)^{1/2} \left(\sum_{i=1}^n h_i^2 \|u''\|_{L_2(x_{i-1}, x_i)}^2 \right)^{1/2}$$

$$\leq \frac{\mu_2}{\mu_1} \sqrt{1+c_F^2} h \|u''\|_{L_2(a,b)}$$

 $u \in V_g \cap H^2(a,b)$

Beweis von Lemma 2.16:

$$\|\cdot\|_1 := \|\cdot\|_{H^1(a,b)}, \quad \|\cdot\|_0 := \|\cdot\|_{L_2(a,b)}$$

$$\|u - \tilde{u}_h\|_1^2 = \underbrace{\|u - \tilde{u}_h\|_0^2}_{z \in V_0} + \underbrace{|u - \tilde{u}_h|_1^2}_{= \int_a^b [(u - \tilde{u}_h)']^2 dx}$$

$$z = u - \tilde{u}_h \in V_0, \text{ da } z(a) = u(a) - \tilde{u}_h(a) = 0$$

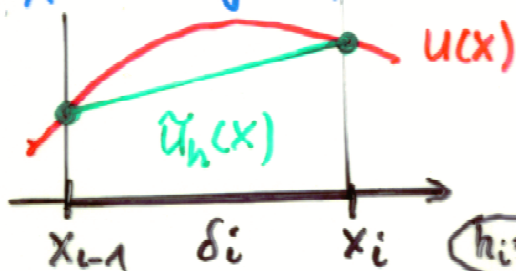
H^1 -Norm

Friedrichsungl.
(vgl. Abs. 2.1)

$$C_F^2 |u - \tilde{u}_h|_1^2 = \|(u - \tilde{u}_h)'\|_0^2 \leq (C_F^2 + 1) |u - \tilde{u}_h|_1^2$$

$$|u - \tilde{u}_h|_1^2 = |z|_1^2 = \int_a^b (z'(x))^2 dx = \sum_{i=1}^n \int_{x_{i-1}}^{x_i} (z'(x))^2 dx$$

Offenbar gilt für den Interpolationsfehler $z = u - \tilde{u}_h$:



$$z(x_j) = u(x_j) - \tilde{u}_h(x_j) = 0 \quad \forall j = \overline{0, n}$$

$$h_i = x_i - x_{i-1}$$

Folglich gilt:

$$\int_{x_{i-1}}^{x_i} |z'(x)|^2 dx = \int_{x_{i-1}}^{x_i} \left| z'(x) - \underbrace{\frac{1}{h_i} \int_{x_{i-1}}^{x_i} z'(\xi) d\xi}_{=0} \right|^2 dx$$

$$= z(x_i) - z(x_{i-1}) = 0$$

$$z'(x) = \frac{1}{h_i} \int_{x_{i-1}}^{x_i} z'(\xi) d\xi \Rightarrow \int_{x_{i-1}}^{x_i} \left[\frac{1}{h_i} \int_{x_{i-1}}^{x_i} (z'(x) - z'(\xi)) d\xi \right]^2 dx = \int_{x_{i-1}}^{x_i} z''(\eta) d\eta$$

$$= \int_{x_{i-1}}^{x_i} \left[\frac{1}{h_i} \int_{x_{i-1}}^{x_i} 1 \cdot \int_{\xi}^x z''(\eta) d\eta d\xi \right]^2 dx = (*)$$

$$(*) = \int_{x_{i-1}}^{x_i} \left[\frac{1}{h_i} \int_{x_{i-1}}^{x_i} 1 \cdot \int_{\xi}^x z''(\eta) d\eta d\xi \right]^2 dx$$

$$\stackrel{\text{Cauchy}}{\leq} \int_{x_{i-1}}^{x_i} \left\{ \frac{1}{h_i^2} \int_{x_{i-1}}^{x_i} 1^2 d\xi \int_{x_{i-1}}^{x_i} \left(\int_{\xi}^x z''(\eta) d\eta \right)^2 d\xi \right\} dx$$

$$= \int_{x_{i-1}}^{x_i} \left\{ \frac{1}{h_i^2} \underbrace{(x_i - x_{i-1})}_{= h_i} \int_{x_{i-1}}^{x_i} \left(\int_{\xi}^x 1 \cdot z''(\eta) d\eta \right)^2 d\xi \right\} dx$$

$$\stackrel{\text{Cauchy}}{\leq} \int_{x_{i-1}}^{x_i} \left(\int_{\xi}^x 1^2 d\eta \right) \cdot \left(\int_{\xi}^x (z''(\eta))^2 d\eta \right) d\xi$$

$$\stackrel{\Lambda}{\leq} \int_{x_{i-1}}^{x_i} 1^2 d\eta \cdot \int_{x_{i-1}}^{x_i} (z''(\eta))^2 d\eta$$

$$= x_i - x_{i-1} = h_i$$

$$\leq \int_{x_{i-1}}^{x_i} \frac{1}{h_i^2} h_i \int_{x_{i-1}}^{x_i} h_i \int_{x_{i-1}}^{x_i} (z''(\eta))^2 d\eta d\xi dx$$

$$= \int_{x_{i-1}}^{x_i} dx \int_{x_{i-1}}^{x_i} d\xi \int_{x_{i-1}}^{x_i} (z''(\eta))^2 d\eta =$$

$$= h_i \cdot h_i \int_{x_{i-1}}^{x_i} \underbrace{(u''(x) - \tilde{u}_h''(x))}_{=0}^2 dx = h_i^2 \int_{x_{i-1}}^{x_i} (u''(x))^2 dx$$

Resultat:

$$\int_{x_{i-1}}^{x_i} |z'(x)|^2 dx \leq h_i^2 \int_{x_{i-1}}^{x_i} (u''(x))^2 dx$$

Damit haben wir gezeigt:

$$\|u - \tilde{u}_h\|_1^2 \leq (1 + c_F^2) |u - \tilde{u}_h|_1^2 = (1 + c_F^2) |z|_1^2$$

$$= (1 + c_F^2) \sum_{i=1}^n \int_{x_{i-1}}^{x_i} |z'(x)|^2 dx \leq$$

$$\leq (1 + c_F^2) \sum_{i=1}^n h_i^2 \int_{x_{i-1}}^{x_i} (u''(x))^2 dx$$

$h = \max h_i$
 $u \in H^2(a,b)$

$$\leq (1 + c_F^2) h^2 \|u''\|_{L_2(a,b)}.$$

q.e.d.

RESÜMEE:

• Interpolationsfehlerabschätzungen:

$$\|u - \tilde{u}_h\|_{H^1(a,b)} = O(h^p)$$

$$\|u - \tilde{u}_h\|_{L_2(a,b)} = O(h^{p+1})$$

$$\|u - \tilde{u}_h\|_{C[a,b]} = O(h^{p+1})$$

$$\text{wobei } \tilde{u}_h(x) = \text{Int}_h(u) := \sum_{i=0}^n u(x_i) \varphi_i(x)$$

• Diskretisierungsfehlerabschätzung:

$$\|u - u_h\|_{H^1(a,b)}^{(7)} = O(h^p)$$

$$\|u - u_h\| \approx \|u - u_h\|_{H^1(a,b)} = O(h^p)$$

$$\|u - u_h\|_{L_2(a,b)} = O(h^{p+1}) \quad (\text{Nitsche-Trick})$$

$$\|u - u_h\|_{C[a,b]} \approx \begin{cases} O(h^{p+1}), & \text{falls } u^{(p+1)} \in L_\infty(a,b), \\ O(h^{p+\frac{1}{2}}), & \text{falls } u^{(p+1)} \in L_2(a,b). \end{cases}$$

• Fehlerabschätzungen für die numerische Integration:

$$\int_a^b u(x) dx \approx \int_a^b \tilde{u}_h(x) dx \quad (\text{verallg. Newton-Cotes})$$

$$\left| \int_a^b u(x) dx - \int_a^b \tilde{u}_h(x) dx \right| = \left| \int_a^b (u(x) - \tilde{u}_h(x)) dx \right| \leq$$

$$\leq \int_a^b |u(x) - \tilde{u}_h(x)| dx$$

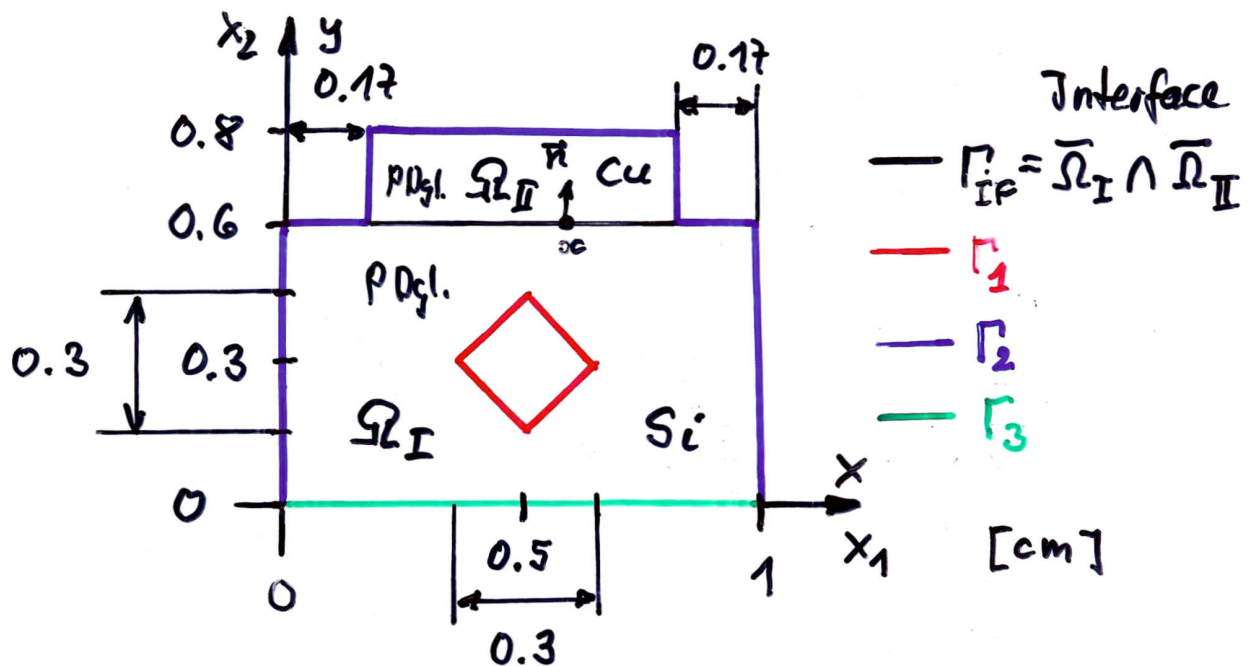
$$O(h^{p+1})$$

$$\stackrel{\text{Cauchy}}{\leq} \sqrt{\int_a^b 1^2 dx} \cdot \sqrt{\int_a^b |u - \tilde{u}_h|^2 dx} = \sqrt{b-a} \|u - \tilde{u}_h\| = O(h^{p+1})$$

■ Beispiel 2.17: Wärmeleitproblem "CHIP"

Ges. Temperaturfeld $u(x)$, $x = (x_1, x_2) \in \overline{\Omega}$

Geg. Gebiet $\bar{\Omega} = \text{"CHIP"}$



- $f \equiv 0$ (Keine Wärmequellen)
- $a \equiv 0$ (Kein Wärmeaustausch in z-Richtung)
- $\lambda_1(x) = \lambda_2(x) = \lambda(x) := \begin{cases} \lambda_{cu} = 3.95 \left[\frac{W}{cm K} \right], & x \in \Omega_{II}, \\ \lambda_{si} = 0.01 \left[\frac{W}{cm K} \right], & x \in \Omega_I. \end{cases}$
 $\uparrow$
 isotrop
- Γ_1 : $g_1 = 500 \text{ K}$
- Γ_2 : $g_2 = 0$ (Isolation)
- Γ_3 : $g_3 = 300 \text{ K}$
 $\alpha = 0.2 \left[\frac{W}{cm^2 K} \right]$

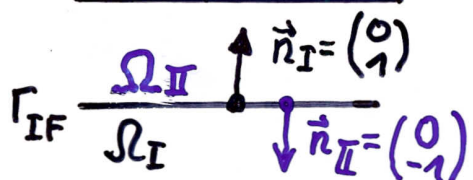
Da in diesem Bsp. der Wärmeleitkoeffizient $\lambda(\cdot)$ unstetig ist (zwei verschiedene Materialien), können wir die PDgl. aus (22) nur in Ω_I und Ω_{II} formulieren. Am Interface Γ_{IF} müssen Interfacebedingungen gestellt werden. Wir erhalten dann die folgende RWA:

Ges. Temperaturfeld $u(\cdot)$ mit $u(\cdot) = u_I(\cdot)$ in Ω_I und $u(\cdot) = u_{II}(\cdot)$ in Ω_{II} :

$$-\frac{\partial}{\partial x_1} \left(\lambda_{Si} \frac{\partial u_I(x)}{\partial x_1} \right) - \frac{\partial}{\partial x_2} \left(\lambda_{Si} \frac{\partial u_I(x)}{\partial x_2} \right) = 0, \quad x = (x_1, x_2) \in \Omega_I$$

$$-\frac{\partial}{\partial x_1} \left(\lambda_{Cu} \frac{\partial u_{II}(x)}{\partial x_1} \right) - \frac{\partial}{\partial x_2} \left(\lambda_{Cu} \frac{\partial u_{II}(x)}{\partial x_2} \right) = 0, \quad x = (x_1, x_2) \in \Omega_{II}$$

+ Interfacebed.: $u_I(x) = u_{II}(x), \quad x \in \Gamma_{IF}$

Γ_{IF}  $-\lambda_{Si} \frac{\partial u_I}{\partial x_2}(x) = -\lambda_{Cu} \frac{\partial u_{II}}{\partial x_2}(x), \quad x \in \Gamma_{IF}$

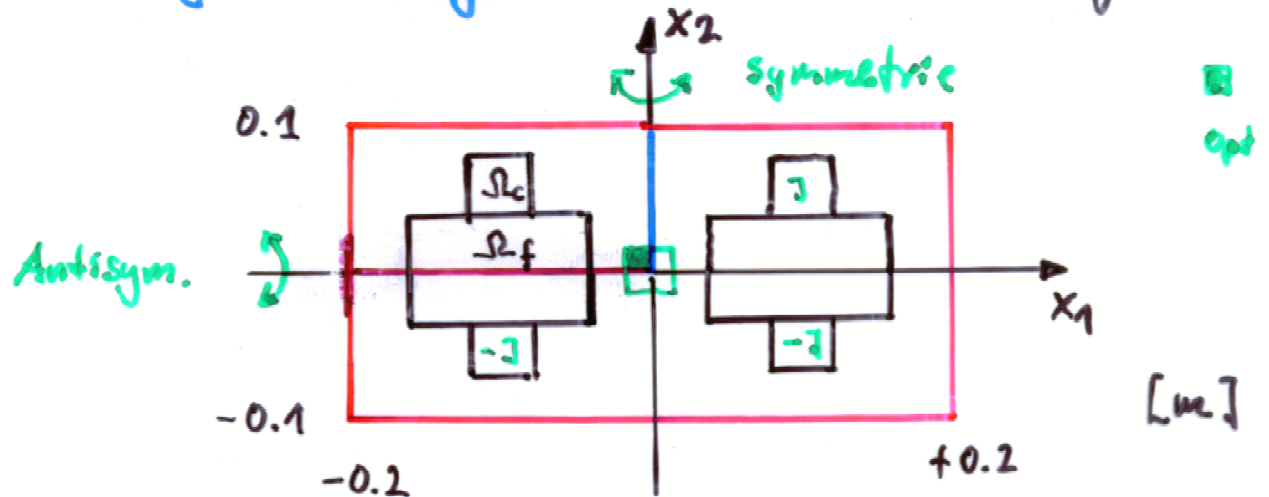
+ Randbed.: • $u(x) = g_1(x), \quad x \in \Gamma_1$

• $\frac{\partial u}{\partial n}(x) = 0, \quad x \in \Gamma_2$

• $\frac{\partial u}{\partial n}(x) = \alpha (g_3 - u(x)), \quad x \in \Gamma_3$

Wärmeleitproblem "CHIP" ist das Modellproblem im SKRIPTUM und im Lehrbuch [Jung & Langer]:



■ Beispiel 2.18: Elektromagnet (vgl. Abs. 1.4)Ges. $u(x) = u(x_1, x_2) := A_3(x_1, x_2)$, $x = (x_1, x_2) \in \bar{\Omega}$ Geg. Rechengebiet $\bar{\Omega} = \text{"Elektromagnet" / 4}$  $\Omega = (-0.2, 0) \times (0, 0.1)$ - Rechengebiet $\Omega_f = (-0.16, -0.04) \times (0, 0.04)$ - ferromagnet.
Material $\Omega_c = (-0.12, -0.08) \times (0.04, 0.08)$ - Spule $\Gamma_1 = [-0.2, 0] \times \{0\} \cup \{-0.2\} \times [0, 0.1] \cup$
 $[-0.2, 0] \times \{0.1\}$ - Dirichlet-Rand, $\Gamma_2 = \{0\} \times (0, 0.1)$ - Neumann-Rand, $\mu(x) = \begin{cases} \mu_r := 5400 \mu_0, & x \in \Omega_f \\ \mu_0 := 1.256637 \cdot 10^{-6} \left[\frac{Vs}{Am} \right], & \text{sonst} \end{cases}$ $J_3(x_1, x_2) = J(x) = \begin{cases} J := 10^6 \left[\frac{A}{m^2} \right], & x \in \Omega_c, \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$

Im Kapitel 1, Abs. 1.2. haben wir zur Bestimmung der x_3 -(z -) Komponente $A_3(x_1, x_2)$ des Vektorpotentials $\vec{A} = (0, 0, A_3(x_1, x_2))^T$ die folgende RWA hergeleitet:

Ges. $u(x) = u(x_1, x_2) := A_3(x_1, x_2)$:

$$- \operatorname{div} \left(\frac{1}{\mu(x)} \nabla u(x) \right) = j(x), \quad x \in \Omega,$$

$$+ \text{RB: } u(x) = 0, \quad x \in \Gamma_1,$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial n}(x) &:= \frac{1}{\mu(x)} \nabla u(x) \cdot n(x) = 0, \quad x \in \Gamma_2 \\ &= \frac{1}{\mu_0} \frac{\partial u}{\partial n} \end{aligned}$$

$$\text{d.h.} \quad \frac{\partial u}{\partial n}(x) = 0, \quad x \in \Gamma_2$$

Eigentlich gilt die PDE $-\operatorname{div}(\mu^{-1} \nabla u) = j$ nur in den Teilgebieten Ω_c , Ω_f und $\Omega_{\text{air}} := \Omega \setminus \{\bar{\Omega}_c \cup \bar{\Omega}_f\}$. An den entsprechenden Interfaces müssen die Interfacebedingungen (Stetigkeit des Potentials u und des Flusses $\frac{1}{\mu} \nabla u \cdot n$) gefordert werden!

In der Variationsformulierung werden die Interface-Bedingungen "automatisch" korrekt berücksichtigt!

■ Bemerkungen:

1. Die Variationsformulierung (23) ist eine Verallgemeinerung der klassischen Formul. (22). In (23) können geringere Glattheitsforderungen an die Eingangsdaten $\lambda_1, \lambda_2, a, \alpha, f, g_1, g_2, g_3$ gestellt werden, z.B. langt es, wenn die Materialzahlen $\lambda_1, \lambda_2, a, \alpha$ nur stückweise stetig sind, wie es in der Praxis bei verschiedenen Materialien üblich ist.
2. Jede "hinreichend" glatte verallgem. Lösung $u \in V_0 \cap C^2(\bar{\Omega})$, d.h. Lsg. von (23), ist auch eine klassische Lsg., d.h. Lsg. von (22).
Tatsächlich, durch partielle "Rückintegration" erhalten wir aus (23) sofort:

$$\begin{aligned}
 (23)^* \quad & \int_{\Omega} \left[\lambda_1 \frac{\partial u}{\partial x_1} \frac{\partial v}{\partial x_1} + \lambda_2 \frac{\partial u}{\partial x_2} \frac{\partial v}{\partial x_2} + a u v \right] dx + \int_{\Gamma_3} \alpha u v ds = \int_{\Omega} f v dx + \int_{\Gamma_2} g_2 v ds + \int_{\Gamma_3} g_3 v ds \\
 & \underbrace{\hspace{10em}}_{\substack{\text{Green's formula} \\ \text{for } \lambda_1, \lambda_2}} \quad \underbrace{\hspace{10em}}_{\substack{\text{boundary terms} \\ \text{on } \Gamma_2, \Gamma_3}} \\
 & = \int_{\Omega} \left[-\frac{\partial}{\partial x_1} \left(\lambda_1 \frac{\partial u}{\partial x_1} \right) - \frac{\partial}{\partial x_2} \left(\lambda_2 \frac{\partial u}{\partial x_2} \right) + a u \right] v dx + \int_{\Gamma} \left[\lambda_1 \frac{\partial u}{\partial x_1} n_1 + \lambda_2 \frac{\partial u}{\partial x_2} n_2 \right] v ds \\
 & \quad \forall v \in V_0 \quad \quad \quad = \int_{\Gamma_2} \frac{\partial u}{\partial N} v ds + \int_{\Gamma_3} \frac{\partial u}{\partial N} v ds
 \end{aligned}$$

a) Wählen zunächst $v \in H^1(\Omega) \subset V_0$, d.h. $\int_{\Gamma} v ds = 0$

$$\int_{\Omega} \left[-\frac{\partial}{\partial x_1} \left(\lambda_1 \frac{\partial u}{\partial x_1} \right) - \frac{\partial}{\partial x_2} \left(\lambda_2 \frac{\partial u}{\partial x_2} \right) + a u \right] v dx = 0 \quad \forall v \in H^1(\Omega) \subset V_0$$

Euler-Trick ↓

stetig in $\bar{\Omega}$

Ann. $\exists x \in \Omega: [\cdot](x) \neq 0$

P.D.Gl.

$$\begin{aligned}
 & -\frac{\partial}{\partial x_1} \left(\lambda_1 \frac{\partial u}{\partial x_1} \right) - \frac{\partial}{\partial x_2} \left(\lambda_2 \frac{\partial u}{\partial x_2} \right) + a u - f = 0 \quad \text{in } \Omega, \\
 & \text{d.h. P.D.Gl. gilt in } \Omega \quad ?
 \end{aligned}$$

b) Aus (23)* erhalten wir

$$\int_{\Omega} \underbrace{\left[-\frac{\partial}{\partial x_1} \left(\lambda_1 \frac{\partial u}{\partial x_1} \right) - \frac{\partial}{\partial x_2} \left(\lambda \frac{\partial u}{\partial x_2} \right) + au - f \right]}_{=0} dx + \forall v \in \tilde{V}_0$$

$$+ \int_{\Gamma_2} \left[\frac{\partial u}{\partial n} - g_2 \right] v ds + \int_{\Gamma_3} \left[\frac{\partial u}{\partial n} - \alpha (g_3 - u) \right] v ds = 0$$

d.h.

$$\int_{\Gamma_2 \cup \Gamma_3} \underbrace{\left[\frac{\partial u}{\partial n} - \varphi \right]}_{\text{stetig}} v ds = 0 \quad \forall v \in \tilde{V}_0$$

$$\varphi = \begin{cases} g_2 & \text{auf } \Gamma_2 \\ \alpha (g_3 - u) & \text{auf } \Gamma_3 \end{cases}$$

Eulertrick: Ann. $\exists x \in \Gamma_2 \cup \Gamma_3: [\dots](x)$
 $\dots \downarrow$ natürliche
RB

$$\frac{\partial u}{\partial n} - \varphi = 0, \text{ d.h. } \frac{\partial u}{\partial n} = g_2 \text{ auf } \Gamma_2$$

$$\frac{\partial u}{\partial n} = \alpha (g_3 - u) \text{ auf } \Gamma_3$$

c) Die RB 1. Art, d.h. $u = g_1$ auf Γ_1 , ist erfüllt, da $u \in V_g$!Folglich genügt u in Ω der PDE (a) und erfüllt auf Γ die RB (b) + c), d.h. u ist Lösung von (22), d.h. u ist klassische Lsg. der RWP. ■

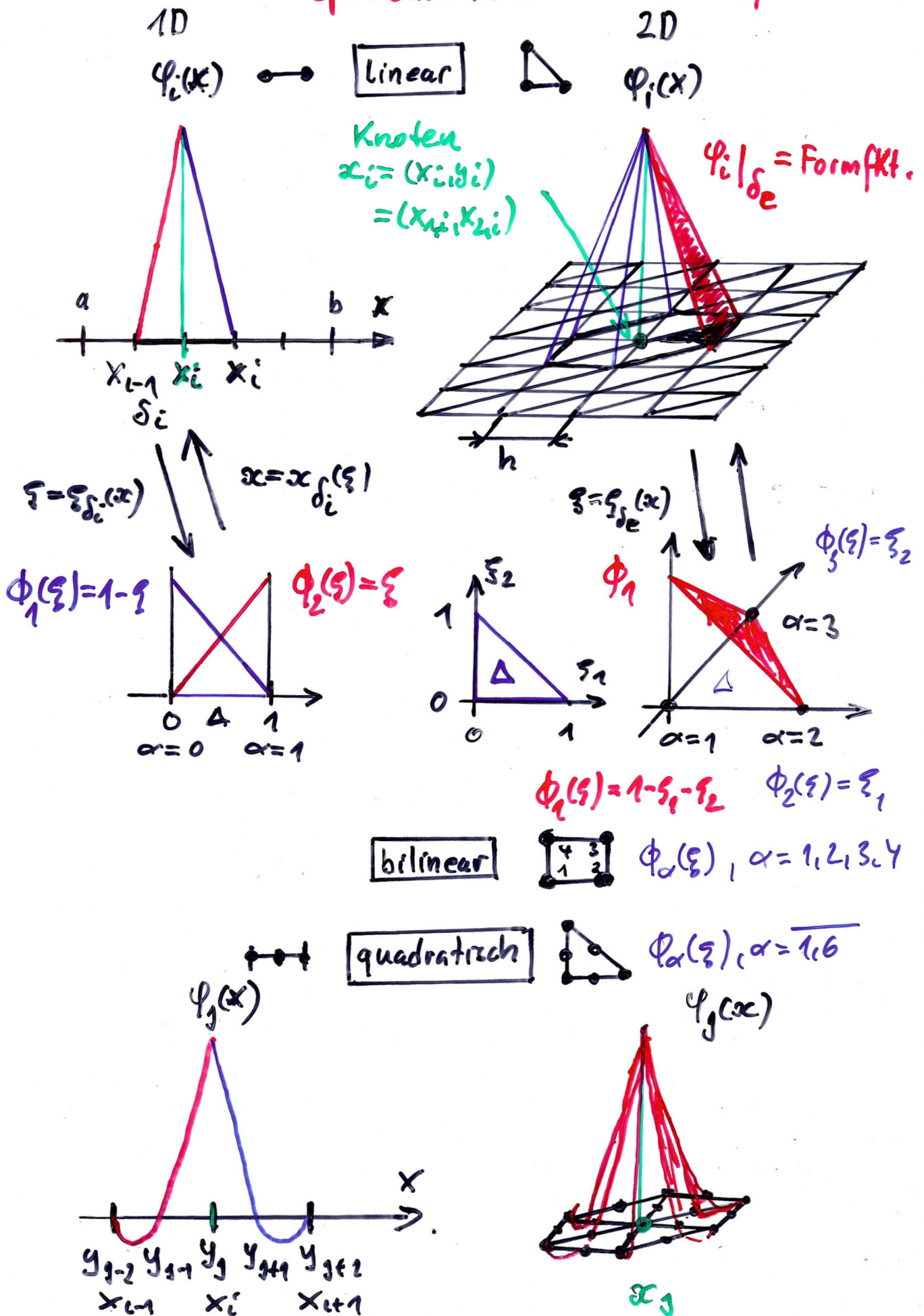
3. Unter den Voraussetzungen (vgl. Abs. 2.8)

(V0) $\exists c = \text{const} > 0: |\langle F, v \rangle| \leq c \|v\|_1 \quad \forall v \in \tilde{V}_0$ (V1) V_0 -Elliptizität: $a(v, v) \geq \mu_1 \|v\|_1^2 \quad \forall v \in \tilde{V}_0$ (V2) V_0 -Beschränkth.: $|a(w, v)| \leq \mu_2 \|w\|_1 \|v\|_1 \quad \forall w, v \in \tilde{V}_0$

Kann man wieder theoretische Resultate zeigen, z.B.:

- $\exists! u \in V_g: (23)$ (Lax-Milgram-Satz)
- Diskretisierungsfehlerabschätzungen (Cea-Satz)

2.10.2. FEM = Galerkin-Ritz-Verfahren mit speziellen Ansatz- und Testfunktionen



Vorteile der Benutzung lokaler, über Formfkt. definierter FE-Ansatzfkt.

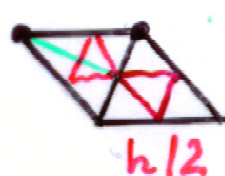
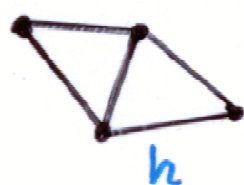
$$\underbrace{\varphi_i(x)}_{\text{Ansatzfkt}} \big|_{\delta_e} := \underbrace{\Phi_\alpha}_{\text{Formfkt}}(\xi_{\delta_e}(x)), \quad x_i \in \delta_e \quad \boxed{i = i(e, d)}$$

1. Steifigkeitsmatrix K_h ist schwach besetzt, da

$$K_{ji} = a(\varphi_i, \varphi_j) = 0 \text{ falls } \text{supp } \varphi_i \cap \text{supp } \varphi_j = \emptyset.$$

2. Elementweise Generierung von K_h und f_h ($\rightarrow$ FE-Technologie) wie in 1D (siehe Abs. 2.6):
 $\rightarrow$ Abs. 2.10.4 für Lin. Dreiecksel. 

3. Durch Netzverfeinerung (" $h \rightarrow 0$ ") 



Lokale
Netzver-
feinerung

Kann Konvergenz ($\hat{=}$ "beliebige" Verbesserung der Genauigkeit) erreicht werden, da wegen Satz 2.15 von Cea gilt:

$$\underbrace{\|u - u_h\|_1}_{H^1(\Omega)} \stackrel{(2.3)}{\leq} \frac{\mu_2}{\mu_1} \min_{w_h \in \tilde{V}_{gh}} \|u - w_h\|_1 \xrightarrow{h \rightarrow 0} 0$$

$= O(h^p)$

falls • $\text{span}\{\Phi_\alpha\} \supset \mathcal{P}_p = \text{Polynome } p\text{-ten Grades}$

$\triangle p=1$;  $p=2$

• $u|_{\delta_e} \in H^{p+1}(\delta_e) \quad \forall e \in E_h$ (Elemente)
 (siehe Abs. 2.8 für 1D Fall).

2.10.3. Netzgenerierung

- Triangularisierung $\mathcal{T}_h = \{\delta_r : r \in \mathbb{R}_h = \{1, \dots, R_h\}\}$
 Zerlegen Rechengebiet $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ (analog: $\Omega \subset \mathbb{R}^3$)
 in finite Elemente δ_r , z.B. in Dreiecke,
 so daß für die Triangularisierung $\mathcal{T}_h := \{\delta_r : r \in \mathbb{R}_h\}$
 gilt:

1. $\bar{\Omega} = \bigcup_{r \in \mathbb{R}_h} \bar{\delta}_r$ bzw (in praxi) $\bar{\Omega}_h = \bigcup_{r \in \mathbb{R}_h} \bar{\delta}_r \xrightarrow{h \rightarrow 0} \bar{\Omega}$

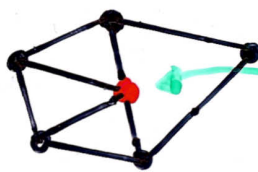
2.

$$\bar{\delta}_r \cap \bar{\delta}_{r'} = \begin{cases} \emptyset & \text{oder} \\ \text{gemeinsame Dreiecksseite oder} \\ \text{gemeinsamer Eckknoten} \end{cases}$$

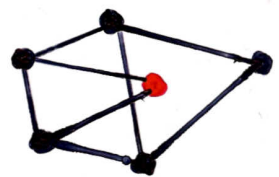
$$\forall r, r' \in \mathbb{R}_h : r \neq r'$$



- Generelle Hinweis zur Generierung einer Vernetzung:
 - unzulässige Vernetzungen:

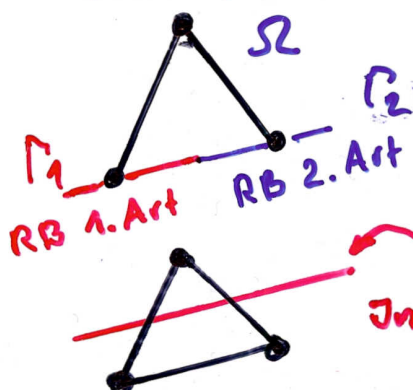


hanging
node

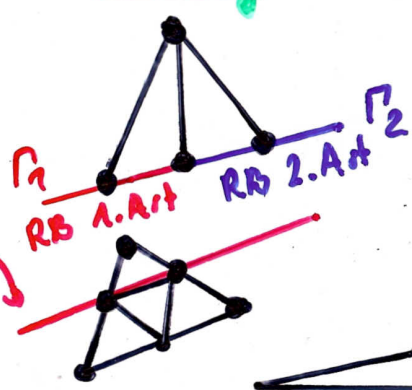


- Vernetzung bei Wechsel der RB und am Interface:

falsch



richtig



- Vermeidung spitzer und stumpfer Winkel:

- Netzgenerator = ein Programm, das aus den geometrischen Daten (CAD-Daten) und evtl. aus qualitativen Daten der PDgl. (RWA) ($\rightarrow$ Element Kennzeichnungen z.B. Materialbereiche (MP); Punkt Kennzeichnungen (XP); Rand Kennzeichnungen etc.) sowie Netzfeinheitsdaten die folgenden Netzdaten erzeugt:

1. Globale Durchnumerierung aller Elemente und Knoten sowie Festlegung der KnotenKoord.:

$$R_h = \{1, 2, \dots, R_h\}, R_h = NE = \text{Number of Elements},$$

$$\bar{w}_h = \{1, 2, \dots, \bar{N}_h\}, \bar{N}_h = NX = \text{Number of Nodes},$$

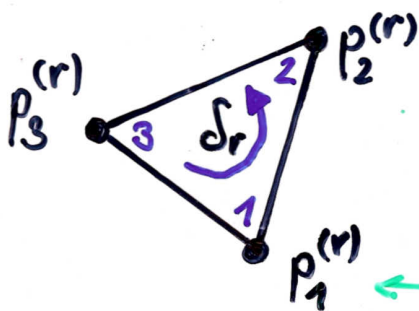
$$x_i = (x_{1,i}, x_{2,i}), i \in \bar{w}_h - \text{Knoten Koordinaten}$$

Bsp.: CHIP: $NX=21$

i	x_i, y_i	XP
-----	------------	----

i	1	2	3	...	19	20	21
x_i	0.0	0.13	0.5	...	0.35	0.5	0.65
y_i	0.0	0.0	0.0	...	0.3	0.45	0.3
XP				...			

2. Lokale Numerierung der Knoten in jedem δ_r :



$$p_\alpha^{(r)} : x_\alpha^{(r)} = (x_{1,\alpha}^{(r)}, x_{2,\alpha}^{(r)})$$

$$\alpha \in A = A^{(r)} = \{1, 2, 3\}$$

$$\longleftrightarrow i(r, 1)$$

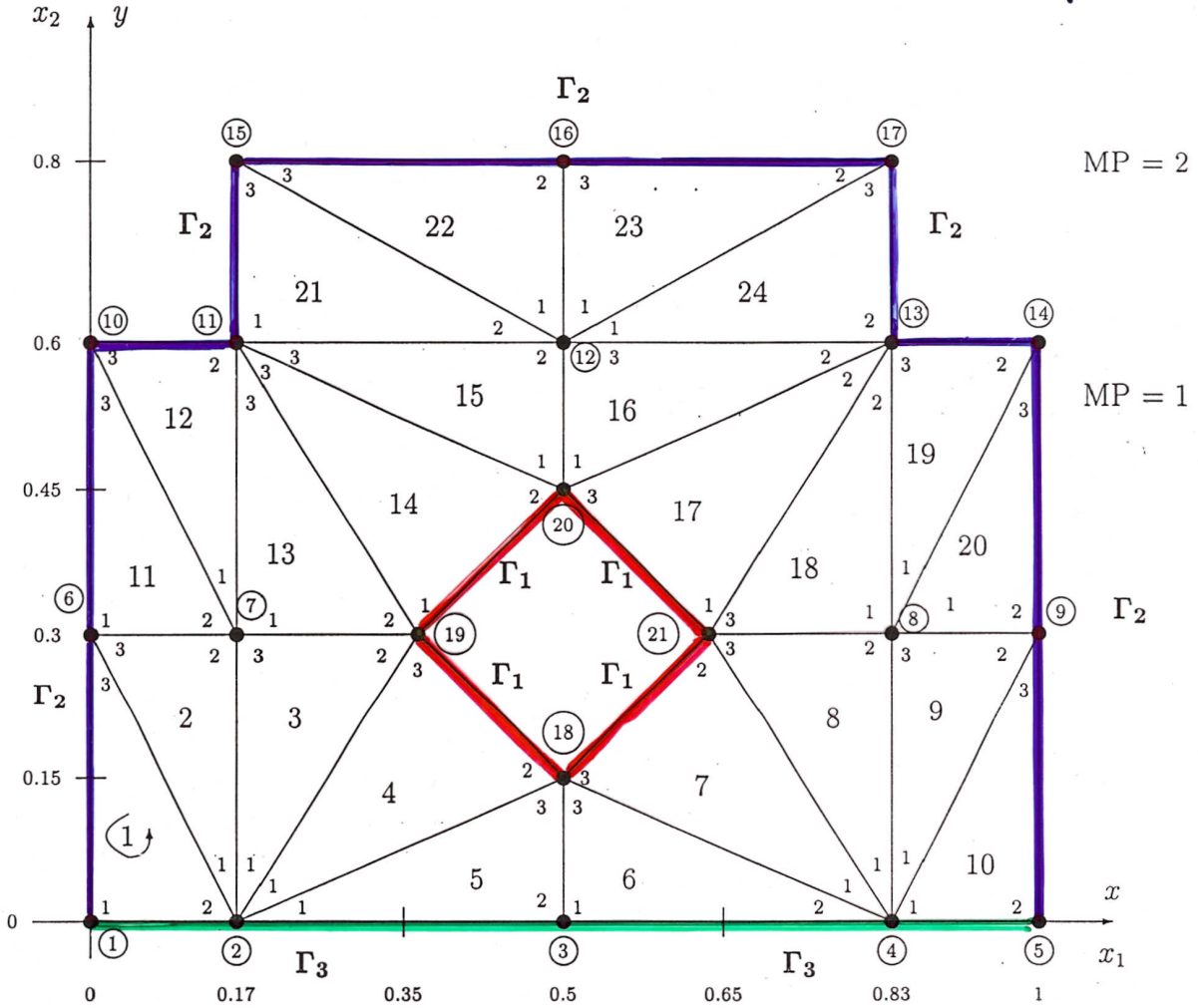
und Festlegung der Zuordnungsvorschrift zwischen lokalen und globalen Knotennummern für jedes $\delta_r, r \in R_h$:

$$r : \alpha \longleftrightarrow i = i(r, \alpha), \alpha \in A^{(r)}, i \in \bar{w}_h$$

$\Rightarrow$ Elementzusammenhangstab.

r	$\alpha \longleftrightarrow i$	MP
-----	--------------------------------	----

- Diskretisierung des Gebietes Ω aus dem Beispiel CHIP! $\rightarrow$ siehe Abs. 2.9:
Beispiel 2.7



⇒ siehe Vernetzungsfile CHIP.NET für FEM2D.***

21	24
0	0
.17	0
.5	0
.83	0
1	0
0	.3
.17	.3
.83	.3
1	.3
0	.6
.17	.6
.5	.6
.83	.6
1	.6
.17	.8
.5	.8
.83	.8
.5	.15
.35	.3
.5	.45
.65	.3

NX, NE

Folie Numopt 28e

x_i, y_i

$i = \overline{1, NX}$

1	2	6	1
2	7	6	1
2	19	7	1
2	18	19	1
2	3	18	1
3	4	18	1
4	21	18	1
4	8	21	1
4	9	8	1
4	5	9	1
6	7	10	1
7	11	10	1
7	19	11	1
19	20	11	1
20	12	11	1
20	13	12	1
20	21	13	1
21	8	13	1
8	14	13	1
8	9	14	1
11	12	15	2
12	16	15	2
12	17	16	2
12	13	17	2

Materialbereich nr.

Elementzusammenhang

$IK(1K), IK(2K), IK(3K), MP(K)$

$K = \overline{1, NE}$

2 Anzahl der geschlossenen Ränder: $\partial\Omega = \Gamma_1 \cup \Gamma_2$
 14 Anzahl der Knoten auf Rand 1
 4 Anzahl der Knoten auf Rand 2

Randbeschreibung



Rand 1

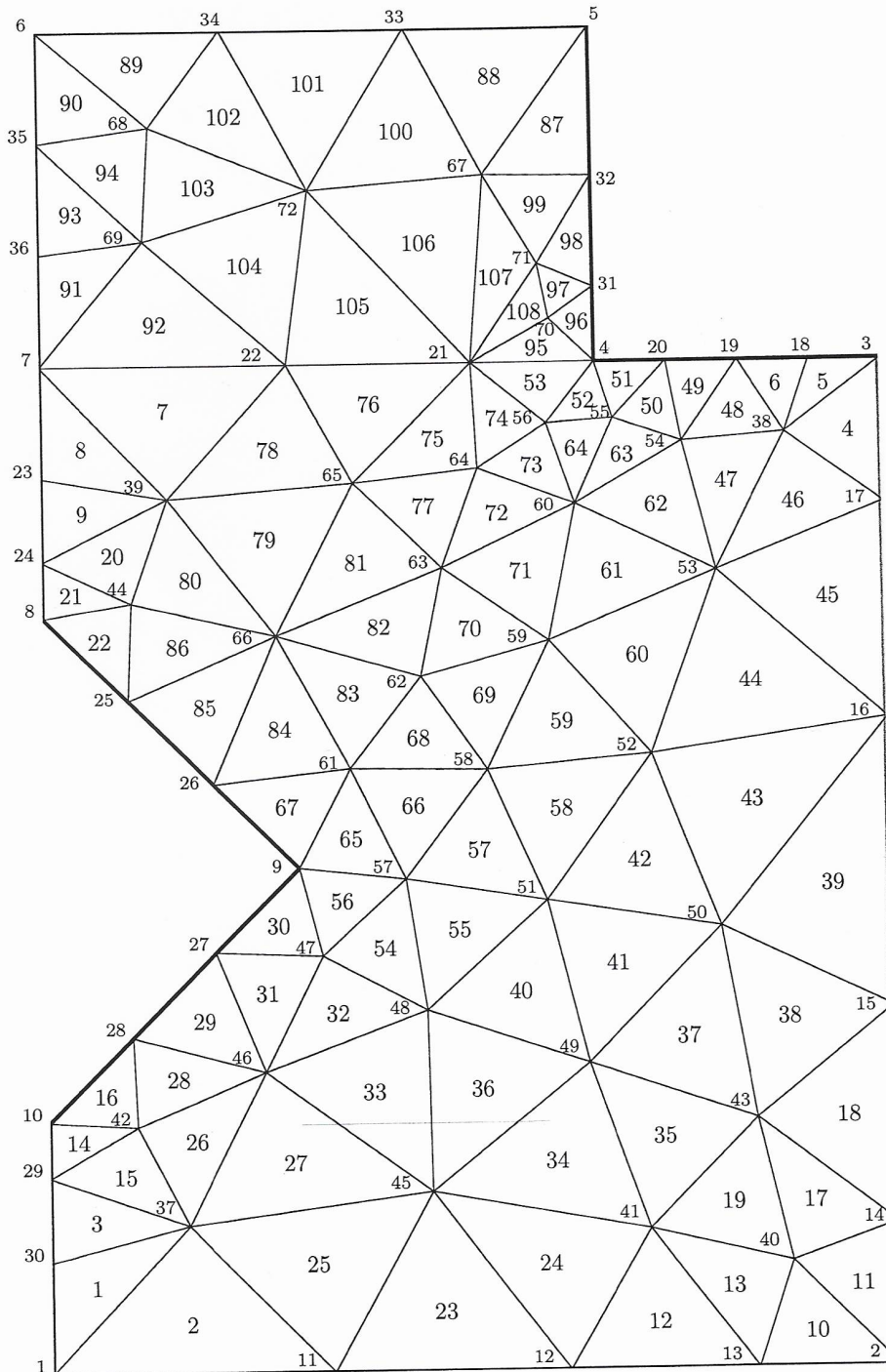
1
2
3
4
5
9
14
13
17
16
15
11
10
6
18
21
20
19

Rand 2

Folie Num 6pt 28 f

21	24		
0	0		
.17	0		
.5	0		
.83	0		
1	0		
0	.3		
.17	.3		
.83	.3		
1	.3		
0	.6		
.17	.6		
.5	.6		
.83	.6		
1	.6		
.17	.8		
.5	.8		
.83	.8		
.5	.15		
.35	.3		
.5	.45		
.65	.3		
1	2	6	1
2	7	6	1
2	19	7	1
2	18	19	1
2	3	18	1
3	4	18	1
4	21	18	1
4	8	21	1
4	9	8	1
4	5	9	1
6	7	10	1
7	11	10	1
7	19	11	1
19	20	11	1
20	12	11	1
20	13	12	1
20	21	13	1
21	8	13	1
8	14	13	1
8	9	14	1
11	12	15	2
12	16	15	2
12	17	16	2
12	13	17	2
2			
14			
4			
1			
2			
3			
4			
5			
9			
14			
13			
17			
16			
15			
11			
10			
6			
18			
21			
20			
19			

Vernetzung mit Knoten- und Elementnummerierung



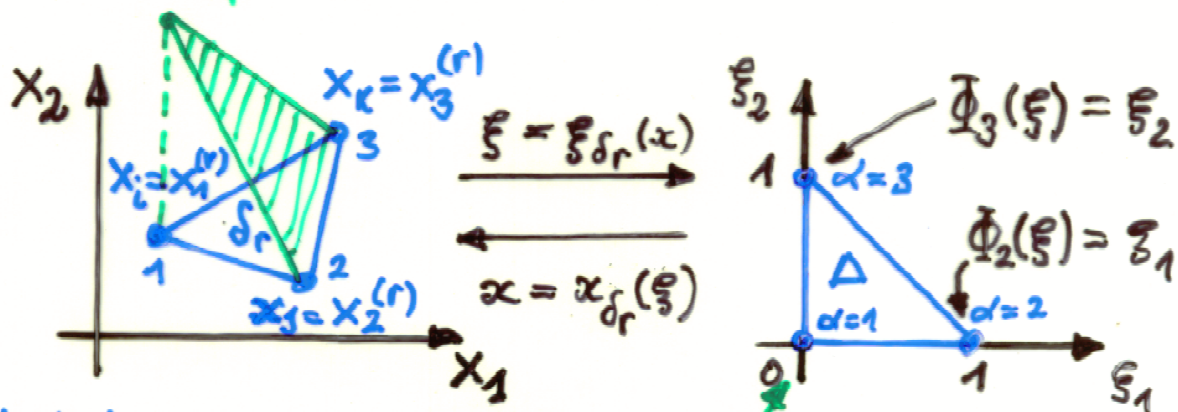
M. Jung, U. Langer: Methode der finiten Elemente für Ingenieure: Eine Einführung in die numerischen Grundlagen und Computersimulation.

© B.G. Teubner GmbH, Stuttgart – Leipzig – Wiesbaden, 2001

2.10.4. FEM-Technologie zum elementweisen Aufbau von K_h und $\underline{f}_h$ (vgl. Abs. 2.6.: 1D)

■ Abbildungsprinzip: $\delta_r \longleftrightarrow \Delta$

$$\varphi_i(x)|_{\delta_r} = \varphi_\alpha^{(r)}(x)$$



beliebiges Element $\delta_r \in \mathcal{T}_h$
 $i = i(r, 1), j = j(r, 2), k = k(r, 3)$

Basiselement
 $\Phi_1(\xi) = 1 - \xi_1 - \xi_2$

$$x = x_{\delta_r}(\xi) := J_r \xi + x_i :$$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_{1,j} - x_{1,i} & x_{1,k} - x_{1,i} \\ x_{2,j} - x_{2,i} & x_{2,k} - x_{2,i} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_{1,i} \\ x_{2,i} \end{pmatrix}$$

$$\xi = \xi_{\delta_r}(x) := J_r^{-1}(x - x_i) :$$

$$\begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{pmatrix} = \frac{1}{\det J_r} \begin{pmatrix} x_{2,k} - x_{2,i} & -(x_{1,k} - x_{1,i}) \\ -(x_{2,j} - x_{2,i}) & x_{1,j} - x_{1,i} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 - x_{1,i} \\ x_2 - x_{2,i} \end{pmatrix}$$

$$|\det J_r| = 2 \operatorname{meas} \delta_r, \text{ mit } \operatorname{meas} \delta_r = \int_{\delta_r} dx = \dots$$

$$\varphi_i(x) = \begin{cases} \varphi_i(x)|_{\delta_r} = \varphi_\alpha^{(r)}(x), & x \in \bar{\delta}_r, r \in B_i \text{ (Formfkt.)} \\ 0, & \text{sonst, d.h. } x \in \bar{\Omega} \setminus \bigcup_{r \in B_i} \bar{\delta}_r \end{cases}$$

$$\text{mit } B_i := \{r \in \mathbb{R}_h : x_i \in \bar{\delta}_r\}, \quad \varphi_\alpha^{(r)}(x) = \Phi_\alpha(\xi_{\delta_r}(x)).$$

■ Assemblierungsalgorithmus (vgl. Folie 17b: 10):

Berechnung der Elementsteifigkeitsmatrizen $K^{(r)}$ und der Elementlastvektoren $f^{(r)}$ sowie ihre Assemblierung zu $\hat{K}_h$ und $\hat{f}_h$ (ohne Berücksichtigung der Randbedingungen !!):

Initiate: $\hat{f}_h := \mathbb{0}$, $\hat{K}_h := \mathbb{0}$;

FOR $r := 1$ STEP 1 UNTIL R_h DO (Schleife über alle El.)

FOR $\alpha := 1$ STEP 1 UNTIL 3 DO (lokale Knoten / DOF)

BEGIN

* compute $f_\alpha^{(r)} := (b)$

* determine $i := i(r, \alpha)$; E2T: $r: \alpha \leftrightarrow i$

* update $\hat{f}_i := \hat{f}_i + f_\alpha^{(r)}$

FOR $\beta := 1$ STEP 1 UNTIL 3 DO

BEGIN

* compute $K_{\alpha\beta}^{(r)} := (b)$

* determine $j := j(r, \beta)$; E2T

* update $\hat{K}_{ij} := \hat{K}_{ij} + K_{\alpha\beta}^{(r)}$

END

ENDFOR

END

ENDFOR

ENDFOR

$r = 1, 2, \dots, R_h = NE$ (Schleife über alle Elemente)

$$f^{(r)} = [f_\alpha^{(r)}]_{\alpha \in A_r} = \begin{bmatrix} x \\ x \\ x \end{bmatrix} \xrightarrow[r: \alpha \leftrightarrow i]{\oplus} \hat{f}_h = [\hat{f}_i]_{i \in \bar{w}_h} \in \mathbb{R}^{\bar{N}_h}$$

$$K^{(r)} = [K_{\alpha\beta}^{(r)}]_{\alpha, \beta \in A_r} = \begin{bmatrix} x & x & x \\ x & x & x \\ x & x & x \end{bmatrix} \xrightarrow[r: \beta \leftrightarrow j]{\oplus} \hat{K}_h = [\hat{K}_{ij}]_{i, j \in \bar{w}_h} = \overset{\bar{N}_h \times \bar{N}_h}{\text{Matrix}}$$

■ Zur Berechnung von $\underline{f}^{(r)}$ und $\underline{K}^{(r)}$, $r = \overline{1, R_h}$ für Modellproblem (23) = VF von (22):

(23) Ges. $u \in \bar{V}_g := \{v \in \bar{V} := H^1(\Omega) : v = g_1 \text{ auf } \Gamma_1\}$:

$$\int_{\Omega} [\lambda_1 \frac{\partial u}{\partial x_1} \frac{\partial v}{\partial x_1} + \lambda_2 \frac{\partial u}{\partial x_1} \frac{\partial v}{\partial x_2} + a u v] dx + \int_{\Gamma_2} \alpha u v ds = \int_{\Omega} f v dx + \int_{\Gamma_2} g_2 v ds + \int_{\Gamma_3} \alpha g_3 v ds$$

$$\underline{a}(u, v) = \langle \underline{F}, v \rangle \quad \forall v \in \bar{V}_0$$

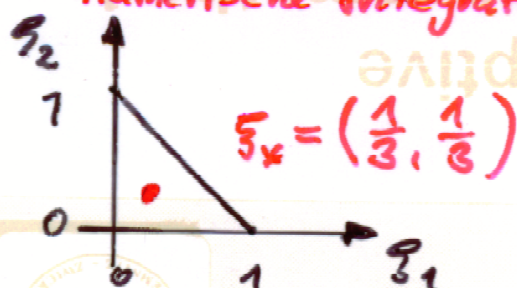
2. RB 3. 1. RB 3. RB 3.
 1. Elementlastvektoren $\underline{f}^{(r)} = [f_{\alpha}^{(r)}]_{\alpha \in A_r = A = \{1, 2, 3\}}$:

$$f_{\alpha}^{(r)} = \int_{\delta_r} f(x) \varphi_{\alpha}^{(r)}(x) dx$$

$$\uparrow \delta_r \rightarrow \Delta \quad = \int_{\Delta} f(x_{\delta_r}(\xi)) \underbrace{\Phi_{\alpha}(\xi) |J_r|}_{= |\det J_r|} d\xi$$

$$\approx f(x_{\delta_r}(\xi_*)) \Phi_{\alpha}(\xi_*) |J_r| \underbrace{\text{meas } \Delta}_{= 1/2}$$

numerische Integration: Lehrbuch Abs. 4.5.5
 S. 232-238



$$\boxed{f_{\alpha}^{(r)} := f(x_{\delta_r}(\xi_*) \Phi_{\alpha}(\xi_*) |J_r| \cdot \frac{1}{2}}$$

2. Elementsteifigkeitsmatrizen $K^{(r)} = [K_{\alpha\beta}^{(r)}]_{\alpha,\beta=1}^3$

$$K_{\alpha\beta}^{(r)} = \int_{\delta_r} \left[\lambda_1(x) \frac{\partial \varphi_\beta^{(r)}(x)}{\partial x_1} \frac{\partial \varphi_\alpha^{(r)}(x)}{\partial x_1} + \lambda_2(x) \frac{\partial \varphi_\beta^{(r)}(x)}{\partial x_2} \frac{\partial \varphi_\alpha^{(r)}(x)}{\partial x_2} + a(x) \varphi_\beta^{(r)}(x) \varphi_\alpha^{(r)}(x) \right] dx$$

$$\delta_r \rightarrow \Delta \quad \frac{\partial}{\partial x_1} = \frac{\partial}{\partial \xi_1} \frac{\partial \xi_1}{\partial x_1} + \frac{\partial}{\partial \xi_2} \frac{\partial \xi_2}{\partial x_1} = \dots$$

$$\begin{aligned} &= \int_{\Delta} \left[\lambda_1(x_{\delta_r}(\xi)) \left(\frac{\partial \phi_\beta}{\partial \xi_1} \frac{\partial \xi_1}{\partial x_1} + \frac{\partial \phi_\beta}{\partial \xi_2} \frac{\partial \xi_2}{\partial x_1} \right) \left(\frac{\partial \phi_\alpha}{\partial \xi_1} \frac{\partial \xi_1}{\partial x_1} + \frac{\partial \phi_\alpha}{\partial \xi_2} \frac{\partial \xi_2}{\partial x_1} \right) + \right. \\ &\quad \left. + \lambda_2(x_{\delta_r}(\xi)) \left(\frac{\partial \phi_\beta}{\partial \xi_1} \frac{\partial \xi_1}{\partial x_2} + \frac{\partial \phi_\beta}{\partial \xi_2} \frac{\partial \xi_2}{\partial x_2} \right) \left(\frac{\partial \phi_\alpha}{\partial \xi_1} \frac{\partial \xi_1}{\partial x_2} + \frac{\partial \phi_\alpha}{\partial \xi_2} \frac{\partial \xi_2}{\partial x_2} \right) + \right. \\ &\quad \left. + a(x_{\delta_r}(\xi)) \phi_\beta(\xi) \phi_\alpha(\xi) \right] |\mathcal{J}_{\delta_r}| d\xi \end{aligned}$$

$$\approx \left[\begin{array}{cc} -1 & -1 \end{array} \right]_{\xi=\xi_*} |\mathcal{J}_{\delta_r}|_{\xi=\xi_*} \underbrace{\text{meas } \Delta}_{=1/2}$$



$$\xi_* = \left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3} \right)$$

mit (im Falle linearer Formfunktionen)

$$\phi_1(\xi) = 1 - \xi_1 - \xi_2 \quad \frac{\partial \phi_1}{\partial \xi_1} = -1 \quad \frac{\partial \phi_1}{\partial \xi_2} = -1$$

$$\phi_2(\xi) = \xi_1 \quad \frac{\partial \phi_2}{\partial \xi_1} = 1 \quad \frac{\partial \phi_2}{\partial \xi_2} = 0$$

$$\phi_3(\xi) = \xi_2 \quad \frac{\partial \phi_3}{\partial \xi_1} = 0 \quad \frac{\partial \phi_3}{\partial \xi_2} = 1$$

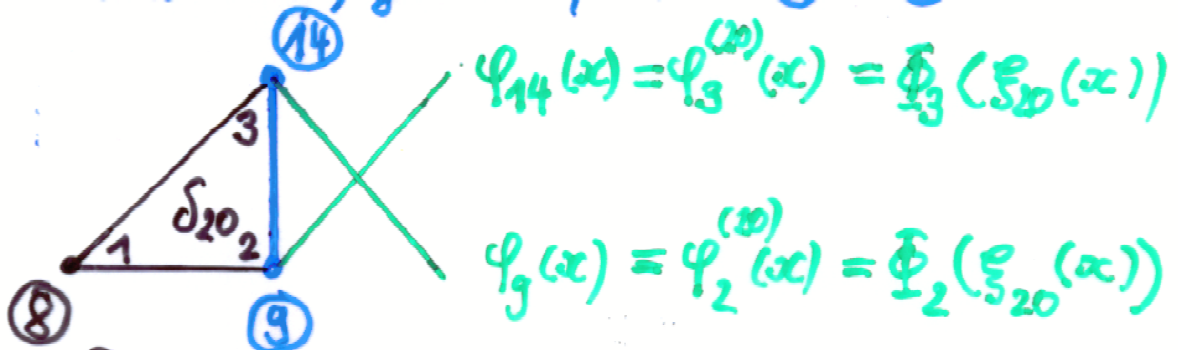
$$K_{\alpha\beta}^{(r)} := \left[\begin{array}{cc} -1 & -1 \end{array} \right]_{\xi=\xi_*} |\mathcal{J}_{\delta_r}| \cdot \frac{1}{2}$$

Ausgeschriebene Formeln siehe Skriptum, Abs. 4.4.3

3. Einbau der natürlichen Randbedingungen

a) Inhomogene RB 2. Art: $\int_{\Gamma_2} g_2 \varphi_j ds \xrightarrow{\oplus} f_j \rightarrow \hat{f}_h$

Anteile werden wieder elementweise (rand-kantenweise) generiert, z.B. ⑨ - ⑭



[X]
[X]

$$\int_{\textcircled{9}} g_2 \varphi^{(9)} ds = \int_0^1 g_2(x_{S_{20}}(\xi)) \Phi_2(\xi) (x_{2,14} - x_{2,9}) d\xi \xrightarrow{\oplus} f_9 \rightarrow \hat{f}_h$$

$$\int_{\textcircled{9}} g_2 \varphi^{(14)} ds = \int_0^1 g_2(x_{S_{20}}(\xi)) \Phi_3(\xi) (x_{2,14} - x_{2,9}) d\xi \xrightarrow{\oplus} f_{14} \rightarrow \hat{f}_h$$

MP

$$\approx g_2(x_{S_{20}}(\frac{1}{2})) \Phi_3(\frac{1}{2}) (x_{2,14} - x_{2,9})$$

Def. Menge $E_{2,h} := \{e_2 \in \partial S_r \cap \Gamma_2 : \text{inhom. RB 2. Art}\}$
aller Elementkanten mit inhomogenen RB 2. Art:

FOR $e_2 \in E_{2,h}$ DO

FOR $\alpha \in A_{e_2} \subset A = \{1, 2, 3\}$ DO

BEGIN

* compute $f_\alpha^{(e_2)} := \int_{e_2} g_2(x) \varphi_2^{(e_2)}(x) ds = \textcolor{red}{(1)}$

* determine $i = i(r, \gamma) = i(e_2, \alpha)$

* update $\hat{f}_i := \hat{f}_i + f_\alpha^{(e_2)}$

END
ENDFOR
ENDFOR

$$b) \text{ RB 3. Art: } \int_{\Gamma_3} q_3 \varphi_j ds \xrightarrow{\oplus} f_j \longrightarrow \hat{f}_h \quad (\uparrow)$$

$$\int_{\Gamma_3} \alpha \varphi_i \varphi_j ds \xrightarrow{\oplus} \hat{K}_{ij} \longrightarrow \hat{K}_h$$

Def. $E_{3,h} := \{e_3 \subset \partial\delta_r \cap \Gamma_3 : \text{RB 3. Art}\}$

```

FOR  $e_3 \in E_{3,h}$  DO
  FOR  $\alpha \in A_{e_3} \subset A = \{1, 2, 3\}$  DO
    FOR  $\beta \in A_{e_3}$  DO
      BEGIN
        * compute  $K_{\alpha\beta}^{(e_3)} = \int_{e_3} \alpha(x) \varphi_{\alpha}^{(e_3)}(x) \varphi_{\beta}^{(e_3)}(x) ds = \dots$ 
        * determine  $i := i(e_3, \alpha) = i(r, \alpha)$ 
                    $j := j(e_3, \alpha) = j(r, \alpha)$ 
        * update  $\hat{K}_{ij} := \hat{K}_{ij} + K_{\alpha\beta}^{(e_3)}$ 
      END
    ENDFOR
  ENDFOR
ENDFOR

```

Bsp. CHIP:

$$E_{3,h} = \{ \overset{1}{\textcircled{1}} - \overset{2}{\textcircled{2}}, \overset{1}{\textcircled{2}} - \overset{2}{\textcircled{3}}, \overset{1}{\textcircled{3}} - \overset{2}{\textcircled{4}}, \overset{1}{\textcircled{4}} - \overset{2}{\textcircled{5}} \}$$

$$= \{1, 2, 3, 4, 5\}$$

Beispiel CHIP:

Folie NumOpt 29g

K_h

$$\begin{aligned} u_{18} &= g_1(x_{18}) \\ u_{19} &= g_1(x_{19}) \\ u_{20} &= g_1(x_{20}) \\ u_{21} &= g_1(x_{21}) \end{aligned}$$

$$u_h = \frac{f}{f_h}$$

	1	2	3	4	5	6	7	...	17	18	19	20	21
1								...					
2								...					
3								...					
4								...					
5								...					
6								...					
7								...					
...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...
17								...					
18								...					
19								...					
20								...					
21								...					

$r: \alpha$

$i: x_{i1}, x_{i2}$

$$\left\{ \sum_{j \in \mathcal{Y}_h = \{18, \dots, 21\}} K_{ij} g_1(x_j) \right\}$$

$$\begin{aligned} r &= \begin{matrix} 1 & 2 & 3 \\ \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{matrix} \end{matrix} & \begin{matrix} 2 & 3 & \dots \end{matrix} & \begin{matrix} 24 \in \mathbb{R}_h \end{matrix} \\ K^{(r)} &: \begin{bmatrix} \times & \times & \times \\ \times & \times & \times \\ \times & \times & \times \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} \end{bmatrix} & \dots & \begin{bmatrix} \end{bmatrix} \\ f^{(r)} &: \begin{bmatrix} \times \\ \times \\ \times \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} \end{bmatrix} & \dots & \begin{bmatrix} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Einarbeitung RB: 2. Art: inhomogen $\rightarrow \hat{f}_h$
 3. Art: 1-2, 2-3, 3-4, 4-5 $\leftarrow K_h$
 1. Art: $\rightarrow$ (↑) (CHIP: home!)

$$K_h u_h = f_h$$

Folie NumOpt 30

2.10.5. Eigenschaften des Linearen FE-GS (23)

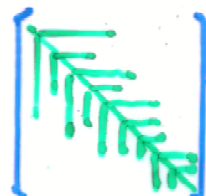
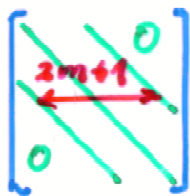
1. großdimensioniert: $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ ($d=1, 2, 3$)
 $N = N_h = \text{Anzahl der Unbekannten} = \# \text{DOF} = O(h^{-d})$
 $= 10^4 \dots 10^6 \dots 10^9$ in Praxis
 $\Rightarrow h = N^{-1/d} = \text{Diskretisierungsparameter}$

2. schwach besetzt:

$$K_{ij} = 0 \quad \forall i, j \in \bar{\omega}_h : \text{supp } \varphi_i \cap \text{supp } \varphi_j = \emptyset$$

$$\Rightarrow \text{NNE} = \text{NichtNullElemente} = O(h^{-d}) = O(N_h)$$

3. Band- bzw. Profil-Matrix:



K_h

$$\Rightarrow m = \text{BW} = \text{Bandweite} = O(h^{-(d-1)})$$

$$\hookrightarrow K_{ij} = 0, \text{ falls } |i-j| \geq m, \text{ i.B. } m=1 \text{ tridiagonal}$$

Die BW ist abhängig von der Durchnumerierung!
 $\downarrow$ Algorithmen zur Optimierung der Durchnumerierung.

4. Wegen der Vererbungsrelation

$$(28) \quad (K_h u_h, v_h) = a(u_h, v_h) \quad \forall u_h, v_h \longleftrightarrow u_h, v_h \in \tilde{V}_{0h}$$

gehen Eigenschaften von $a(\cdot, \cdot)$ auf K_h über!!

$$\text{z.B. } \text{SPD} \Leftrightarrow \text{SPD}$$

5. schlecht konditioniert: $K_h \varphi_h = \lambda_h \varphi_h$ EWP

$$\Rightarrow \lambda_{\min}(K_h) = O(h^d), \quad \lambda_{\max}(K_h) = O(h^{d-2})$$

$$\Rightarrow \kappa(K_h) = \text{cond}_2(K_h) := \frac{\lambda_{\max}(K_h)}{\lambda_{\min}(K_h)} = O(h^{-2}) \xrightarrow{h \rightarrow 0} \infty!$$

2.11. Nichtlineare Probleme

- Falls in PDgl. bzw. RB nichtlineare Terme auftreten, z.B.:

PDgl.: $-\sum_{i=1}^d \frac{\partial}{\partial x_i} (a_i(x, u, \nabla u)) + a(x, u, \nabla u) = f(x), x \in \Omega \subset \mathbb{R}^d$

z.B. $-\Delta u(x) + e^{u(x)} = f(x), x \in \Omega$

oder

$-\operatorname{div}(v(x, |\nabla u(x)|) \nabla u(x)) = f(x), x \in \Omega$

RB: $\frac{\partial u}{\partial n} = \alpha(u_A^4 - u^4)$ auf Γ_3 (Strahlungsrandbed.)

dann erhalten mittels FE-Diskr. ein nichtlineares GS der Art

(29) Ges. $\underline{u}_h = [u_i]_{i \in \omega_h} \in \mathbb{R}^{N_h}$: $K_h(\underline{u}_h) = \underline{f}_h$ in $\mathbb{R}^{N_h}$

zur Bestimmung der Knotenwerte $u_i, i \in \omega_h$.

- Das nichtlineare GS (29) kann man z.B. mit dem Newton-Verfahren lösen, siehe Kap. 5:

lin. GS $\rightarrow \underbrace{K_h'(\underline{u}_h^k)}_{\text{= Jacobi-Matrix = } (N_h \times N_h)\text{-Matrix}} \underline{w}_h^k = \underline{f}_h - K_h(\underline{u}_h^k), \underline{u}_h^{k+1} = \underline{u}_h^k + \underline{w}_h^k \xrightarrow{k \rightarrow \infty} \underline{u}_h$

- Beispiel: 2d Magnetostatik (Elektromotor, Abs. 1.4) $x \in \Omega$

(30)_{KF} • Ges. $u = A_3 \in X$: $-\operatorname{div}(v(x, |\nabla u(x)|) \nabla u(x)) = \underbrace{f(x)}_{\text{eingep. St.}} + \underbrace{\frac{\mu_0}{h} \left(\frac{\partial H_{02}}{\partial x_1} - \frac{\partial H_{01}}{\partial x_2} \right)}_{\text{Permanentmag.}}$
 + RB: $u(x) = 0 \forall x \in \Gamma = \partial\Omega$

- Variationsformulierung: nichtlin. lin.

(30)_{VF} Ges. $u \in \tilde{V}_g = \tilde{V}_0 := \tilde{H}^1(\Omega)$: $a(u, v) = \langle F, v \rangle \forall v \in \tilde{V}_0$
 mit $a(u, v) = \int_{\Omega} v(x, |\nabla u(x)|) \nabla u(x) \cdot \nabla v(x) dx$
 $\langle F, v \rangle = \int_{\Omega} f(x) v(x) dx$

- FE-Galerkin-Schema $\leftrightarrow$ FE-GS (nichtlinear)

(30)_h Ges. $\underline{u}_h \in \tilde{V}_{gh} = \tilde{V}_{0h}$: $a(\underline{u}_h, \underline{v}_h) = \langle F, \underline{v}_h \rangle \forall \underline{v}_h \in \tilde{V}_{0h} \subset \tilde{V}_0$

(30)_h $\underline{u}_h \in \mathbb{R}^{N_h}$: $K_h(\underline{u}_h) = \underline{f}_h$ mit $K_h(\underline{u}_h) = \tilde{K}_h(\underline{u}_h) \underline{u}_h$

Hauptsatz der Integral- und Differentialrechnung

 $d=1$
 $d=1, 2, 3$

$$(3) \int_a^b w'(x) dx = w(b) - w(a) \quad \left| \int_{\Omega} \frac{\partial w}{\partial x_i}(x) dx = \int_{\partial \Omega} w(x) n_i(x) ds \right.$$

$$w = u \cdot \varphi$$

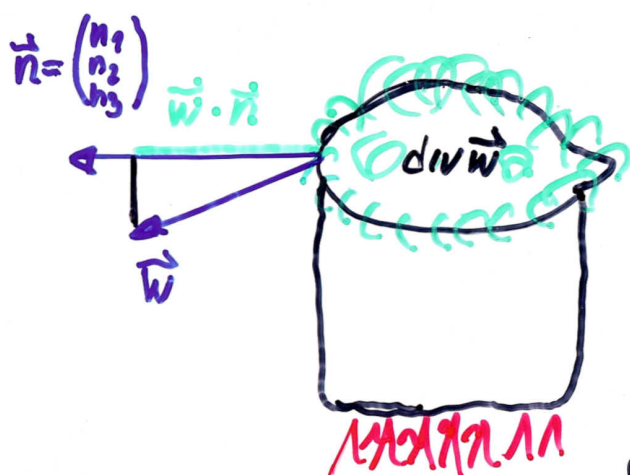
$$(2) \int_a^b u \varphi' dx = - \int_a^b u' \varphi dx + u \varphi \Big|_a^b \quad \int_{\Omega} u \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} dx = - \int_{\Omega} \frac{\partial u}{\partial x_i} \varphi dx + \int_{\partial \Omega} u \varphi n_i ds$$

$\varphi(a) = \varphi(b) = 0$ $\varphi = 0$ auf $\partial \Omega$

Formel der partiellen Integration

Übung: Zeigen Sie mit Hilfe von (3) den Gaußschen Integralsatz

$$(4) \int_{\Omega} \operatorname{div} \vec{w} dx = \int_{\partial \Omega} \vec{w} \cdot \vec{n} ds \quad \forall \vec{w} = \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{pmatrix} \in C^1(\bar{\Omega})$$



Beweis: trivial

$w = w_i$ in (3)

$$\sum_{i=1}^d$$

$$\int_{\Omega} \underbrace{\sum_{i=1}^d \frac{\partial w_i}{\partial x_i}}_{\operatorname{div} \vec{w}} dx = \int_{\partial \Omega} \underbrace{\sum_{i=1}^d w_i n_i}_{\vec{w} \cdot \vec{n}} ds$$

Galerkin - Ritz - FEM

Variationsformulierung

Minimumproblem

$$u \in \tilde{V}_g : a(u, v) = \langle F, v \rangle \quad \forall v \in \tilde{V}_0 \quad \longleftrightarrow \quad u \in \tilde{V}_g : J(u) = \min_{v \in \tilde{V}_g} J(v)$$

$$\begin{aligned} \tilde{V}_{gh} &\subset \tilde{V}_g \\ \tilde{V}_{0h} &\subset \tilde{V}_0 \end{aligned}$$

$a(\cdot, \cdot)$
sym., positiv

$$\tilde{V}_{gh} \subset \tilde{V}_g$$

Galerkin

Ritz

$$u_h \in \tilde{V}_{gh} : a(u_h, v_h) = \langle F, v_h \rangle \quad \forall v_h \in \tilde{V}_{0h}$$

$$u_h \in \tilde{V}_{gh} : J(u_h) \leq J(v_h) \quad \forall v_h \in \tilde{V}_{gh}$$

$$v_h = \varphi^{(j)} \quad j \in \omega_h$$

$$u_h = \sum_{i \in \omega_h} u^{(i)} \varphi^{(i)} + \sum_{i \in \chi_h} u_x^{(i)} \varphi^{(i)}$$

$$\frac{\partial J(u_h)}{\partial u^{(j)}} = 0 \quad j \in \omega_h$$

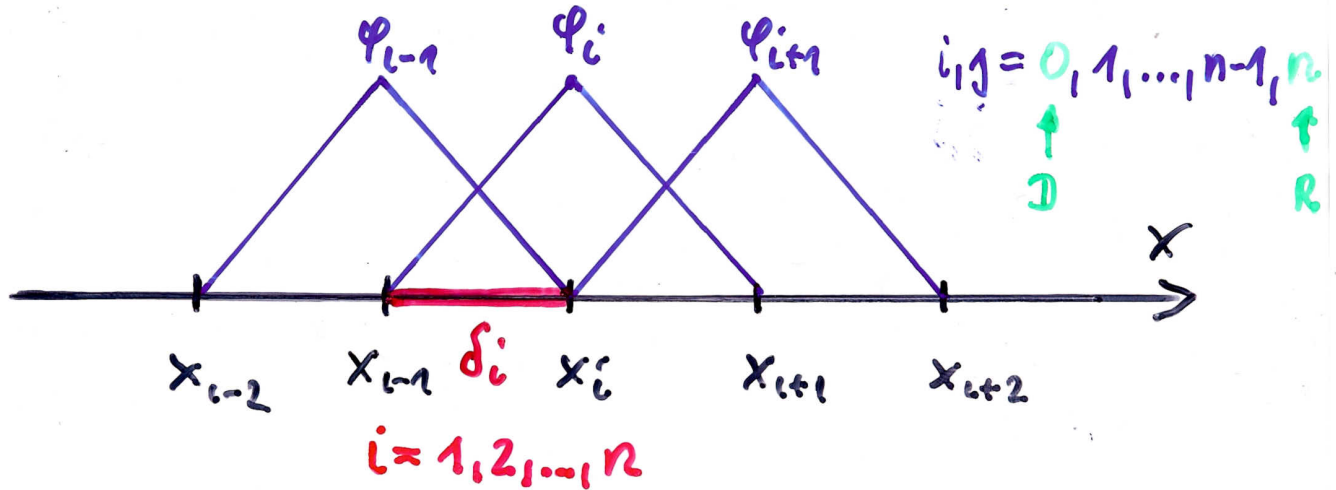
Galerkin - Ritz - System = endlichdim. GS

$$\text{Ges. } \underline{u}_h = [u^{(j)}]_{j \in \omega_h} \in \mathbb{R}^{N_h} : \sum_{i \in \omega_h} u^{(i)} a(\varphi^{(i)}, \varphi^{(j)}) = \langle F, \varphi^{(j)} \rangle - \sum_{i \in \chi_h} u_x^{(i)} a(\varphi^{(i)}, \varphi^{(j)})$$

$$K_h \underline{u}_h = \underline{f}_h$$

mit $J(v) := \frac{1}{2} a(v, v) - \langle F, v \rangle$ - Ritzsches Energiefunkt.

$$K_{ij} = a(\varphi_j, \varphi_i) = \int_a^b \varphi_j'(x) \varphi_i'(x) dx + \alpha_b \delta_{ni} \delta_{nj}$$



$$K_{i-1, i-1} = \int_{x_{i-2}}^{x_{i-1}} \varphi_{i-1}'(x) \varphi_{i-1}'(x) dx + \int_{x_{i-1}}^{x_i} \varphi_{i-1}'(x) \varphi_{i-1}'(x) dx$$

$$K_{i-1, i} = \int_{x_{i-1}}^{x_i} \varphi_{i-1}'(x) \varphi_i'(x) dx$$

$$K_{i, i-1} = \int_{x_{i-1}}^{x_i} \varphi_{i-1}'(x) \varphi_i'(x) dx$$

$$K_{ii} = \int_{x_{i-1}}^{x_i} \varphi_i'(x) \varphi_i'(x) dx + \int_{x_i}^{x_{i+1}} \varphi_i'(x) \varphi_i'(x) dx$$

$$i = 1, 2, \dots, n, \quad n = NE$$