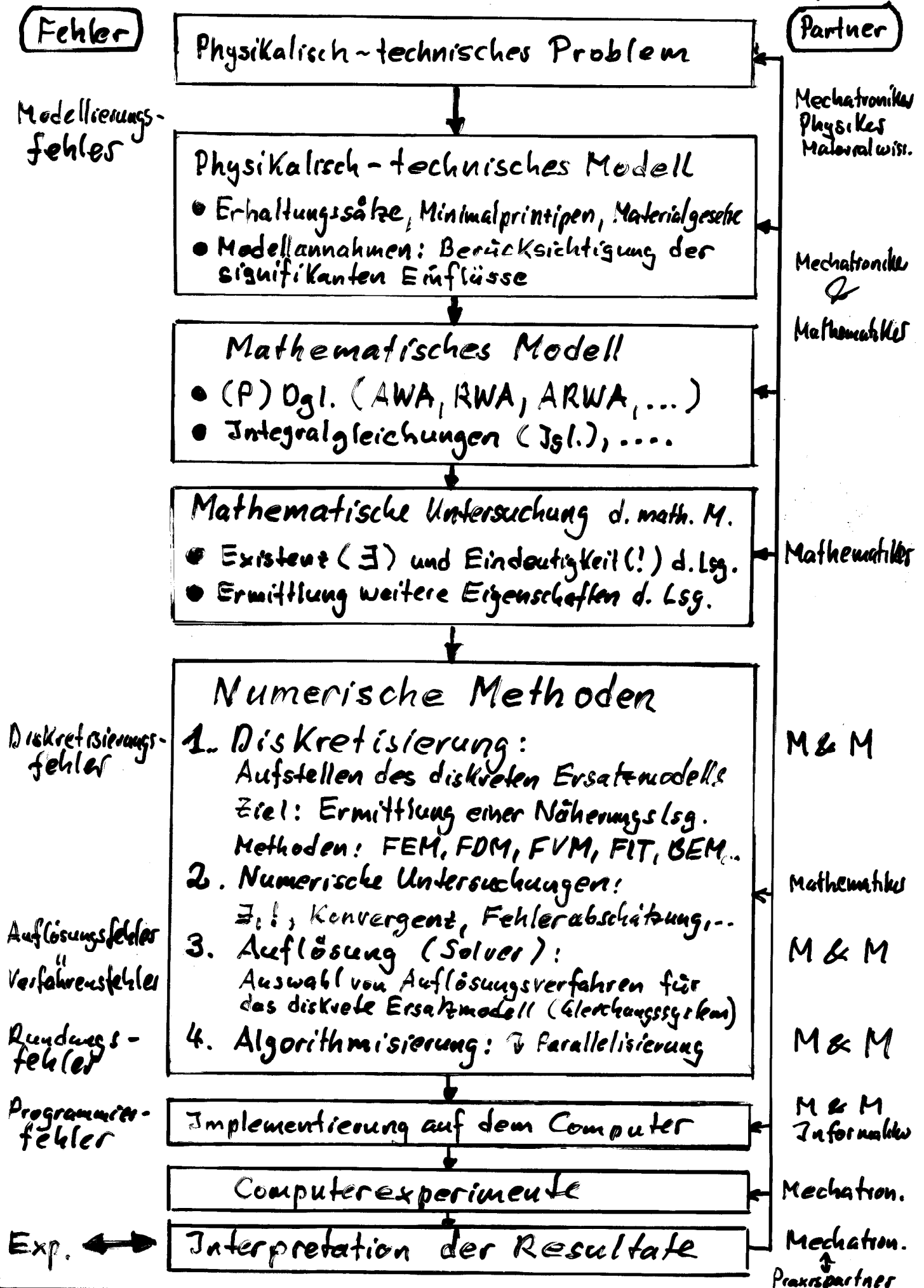
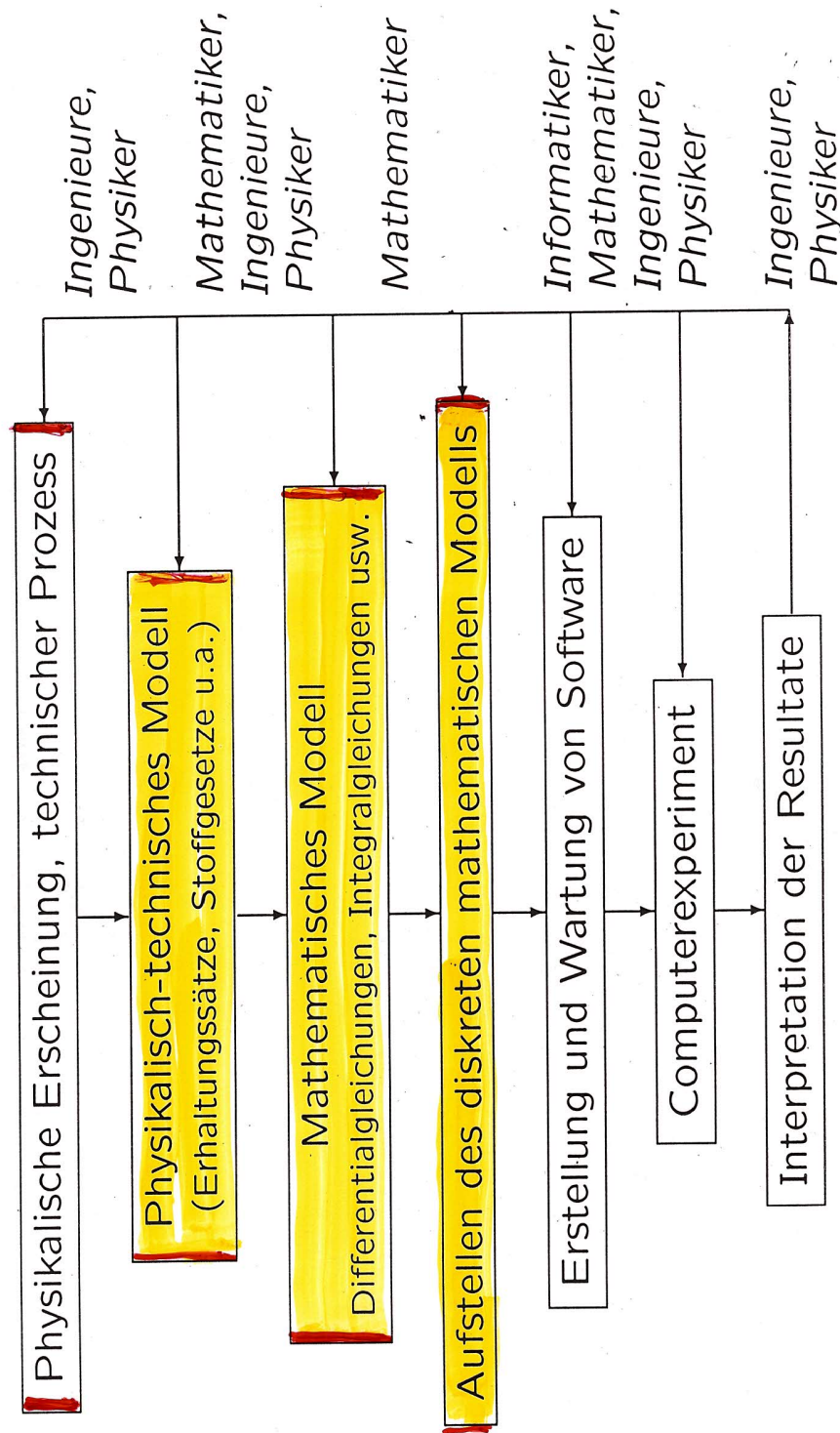


Vom MODELL zur COMPUTERSIMULATION



Vom physikalisch-technischen Problem zur Computersimulation

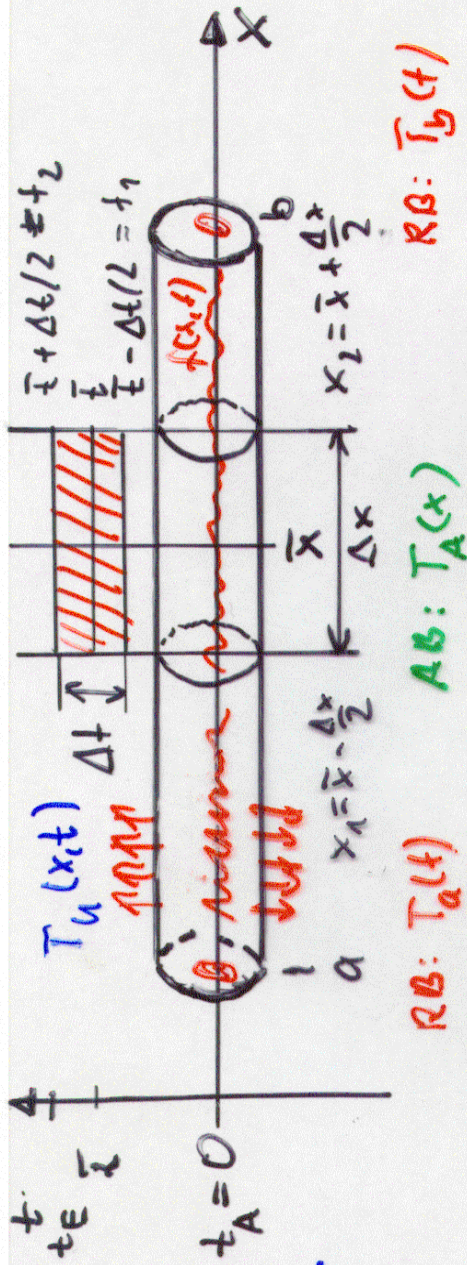


M. Jung, U. Langer: Methode der finiten Elemente für Ingenieure: Eine Einführung in die numerischen Grundlagen und Computersimulation. © B.G. Teubner GmbH, Stuttgart – Leipzig – Wiesbaden, 2001

1.2. BEISPIEL

1.2.1. Wärmeleitung: (stationär, 1D)

Problemstellung:



Physikalisch-technisches Modell: Wärmemengebilanz in Raum und Zeit

Wärmemenge, die im Pkt. x_1 während der Zeitspanne Δt hineinfließt

Wärmemenge, die über den Mantel während der Zeitspanne Δt abgegeben wird

Wärmemenge, die im Pkt. x_2 während der Zeitspanne Δt herausfließt

Wärmemenge, die durch Aufheizung während der Zeitspanne Δt in Δx entsteht

Wärmemenge - Differenz in End- und Anfangszeit

$$1) \int_{t_1}^{t_2} W(x_1, t) dt - \int_{t_1}^{t_2} W(x_2, t) dt - |S| \int_{t_1}^{t_2} \int_{x_1}^{x_2} (T - T_u) dx dt + |S| \int_{t_1}^{t_2} \int_{x_1}^{x_2} f(x, t) dx dt = |S| \int_{x_1}^{x_2} c \rho (T(x, t_2) - T(x, t_1)) dx$$

Fouriersches Gesetz: $W = -\lambda \frac{\partial T}{\partial x} |S|$

+ RB: $T(a, 0) = T_a(t)$, $T(b, 0) = T_b(t)$, $t \in (t_A, t_E)$

(Dirichlet)

+ AB: $T(x, 0) = T_A(x)$, $x \in [a, b]$

■ Mathematische Modelle:

● Modell 1: Instationäre Wärmeleitgl. in Integralbilanzform

(2) Ges. Temperaturfeld $T(x, t)$:

$$\int_{x_1}^{x_2} c \rho (T(x, t_2) - T(x, t_1)) dx - \int_{t_1}^{t_2} \left(\lambda \frac{\partial T}{\partial x}(x_2, t) - \lambda \frac{\partial T}{\partial x}(x_1, t) \right) dt + \int_{t_1}^{t_2} \int_{x_1}^{x_2} \bar{\alpha} T(x, t) dx dt = \int_{t_1}^{t_2} \int_{x_1}^{x_2} f(x, t) dx dt + \int_{t_1}^{t_2} \int_{x_1}^{x_2} \bar{\alpha} T_u(x, t) dx dt$$

$$\begin{aligned} &\forall \bar{x} \in (a, b) \forall \Delta x > 0 : [x_1, x_2] \subset (a, b), \quad x_1 = \bar{x} - \frac{\Delta x}{2}, \quad x_2 = \bar{x} + \frac{\Delta x}{2} \\ &\forall \bar{t} \in (0, t_E) \forall \Delta t > 0 : [t_1, t_2] \subset (0, t_E), \quad t_1 = \bar{t} - \frac{\Delta t}{2}, \quad t_2 = \bar{t} + \frac{\Delta t}{2} \\ &+ RB: T(a, t) = T_a(t), \quad T(b, t) = T_b(t) \quad \forall t \in (0, t_E) \\ &+ AB: T(x, 0) = T_A(x) \quad \forall x \in [a, b] \end{aligned}$$

$$\lim_{\substack{\Delta x \rightarrow 0 \\ \Delta t \rightarrow 0}} \frac{1}{\Delta x \Delta t} (2) \quad \downarrow \text{(Var.)} \quad \uparrow \int_{t_1}^{t_2} \int_{x_1}^{x_2} (3) dx dt$$

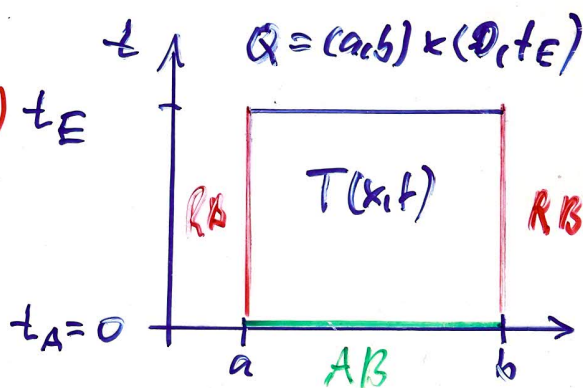
● Modell 2: Inst. Wärmeleitgl. in differentieller Form

(3) Ges. Temperaturfeld $T \in C^{2,1}(Q) \cap C(\bar{Q})$:

$$c \rho \frac{\partial T}{\partial t}(x, t) - \frac{\partial}{\partial x} \left(\lambda \frac{\partial T}{\partial x}(x, t) \right) + \bar{\alpha} T(x, t) = f(x, t) + \bar{\alpha} T_u(x, t) \quad \forall (x, t) \in Q$$

$$+ RB: \left. \begin{aligned} T(a, t) &= T_a(t) \\ T(b, t) &= T_b(t) \end{aligned} \right\} t \in (0, t_E) \quad t_E$$

$$+ AB: T(x, 0) = T_A(x) \quad \forall x \in [a, b]$$



$C^{k,l}(Q)$ $\xleftarrow{\text{K mal stetig diffbar nach } x}$ $\xleftarrow{\text{Raum-Zeit-Zylinder}}$ $\xleftarrow{\text{Q mal stetig diffbar nach } t}$ $\xleftarrow{\text{Continuous}}$

$$C = C^{0,0} = C^0$$

- Zur numerischen Behandlung betrachten wir der Einfachheit halber den Spezialfall der Abkühlung eines homogenen, mantelisierten Metallstabs ohne innere Wärmequellen, d.h.

$$c, \rho, \lambda = \text{const} > 0, \bar{\alpha} = 0, f = 0, a = 0, b = L$$

(4)

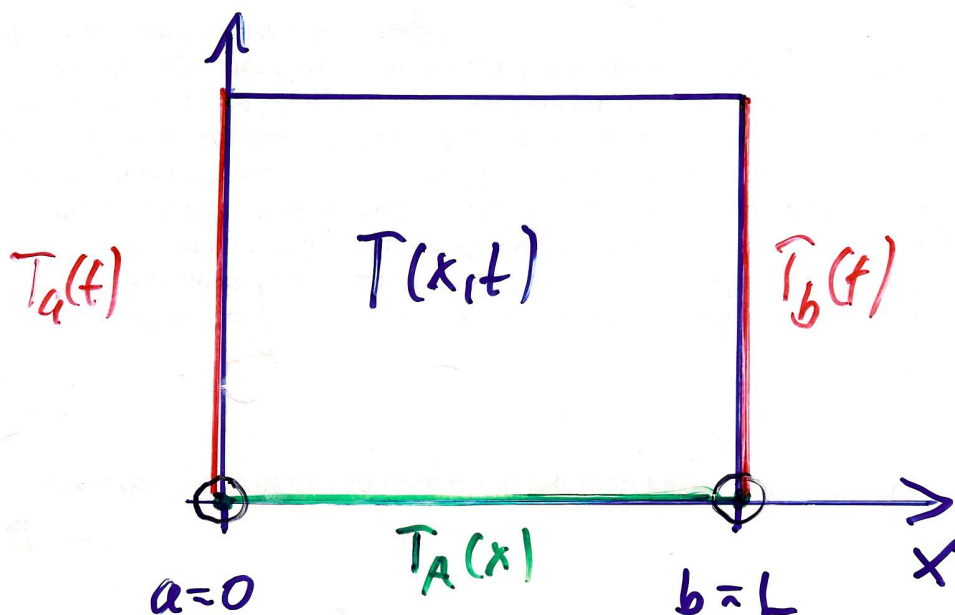
$$\text{Ges. } T(x, t) \in C^{2,1}(Q) \cap C^1(\bar{Q}):$$

$$\frac{\partial T}{\partial t}(x, t) - \alpha \frac{\partial^2 T}{\partial x^2}(x, t) = 0 \quad \forall x \in (0, L) \\ \forall t \in (0, t_E)$$

$$\text{RB: } \left. \begin{array}{l} T(0, t) = T_a(t) \\ T(L, t) = T_b(t) \end{array} \right\} \forall t \in (0, t_E)$$

$$\text{AB: } T(x, 0) = T_A(x) \quad \forall x \in [0, L]$$

wobei $\alpha := \frac{\lambda}{\rho c}$ - Temperaturleitzahl,



(4) Ges. $T(x,t) \in C^{2,1}(Q) \cap C(\bar{Q})$:

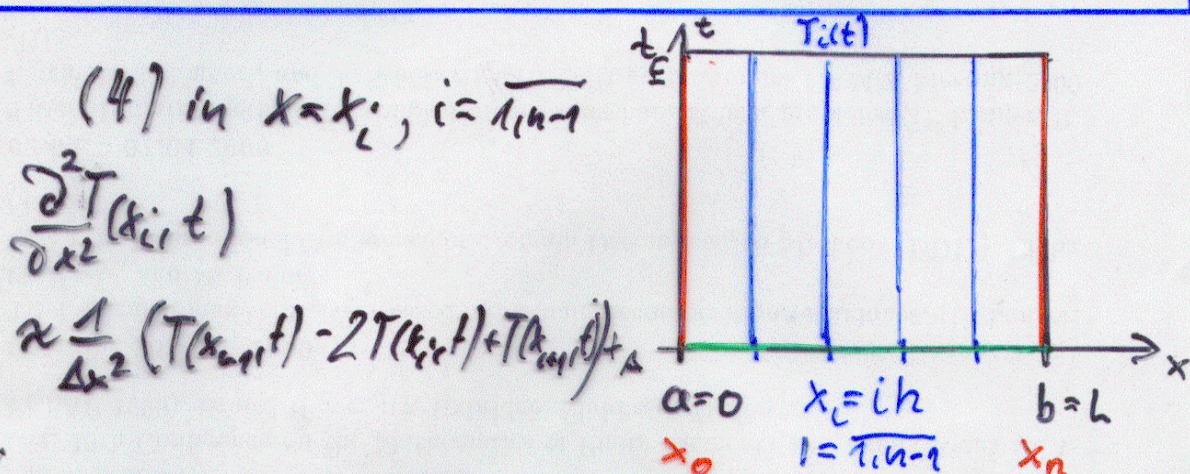
$$\frac{\partial T}{\partial t}(x,t) - \kappa \frac{\partial^2 T}{\partial x^2}(x,t) = 0 \quad \forall (x,t) \in Q := (0,L) \times (0,t_E),$$

$$RB: T(0,t) = T_a(t), T(L,t) = T_b(t) \quad \forall t \in (0,t_E]$$

$$AB: T(x,0) = T_A(x) \quad \forall x \in [0,L]$$

$$\kappa := \lambda / \rho c - \text{Temperaturleit zahl}$$

ARWA



(5) Ges. $T_i(t), i = \overline{1, n-1}: t \in (0, t_E)$

$$\frac{d}{dt} T_i(t) = \kappa \frac{T_{i-1}(t) - 2T_i(t) + T_{i+1}(t)}{\Delta x^2}$$

$$T_0(t) = T_a(t), T_n(t) = T_b(t), t \in (0, t_E)$$

$$T_i(0) = T_A(x_i), i = \overline{0, n}$$

Ges. $\underline{T}(t) = (T_1(t), \dots, T_{n-1}(t))^T$

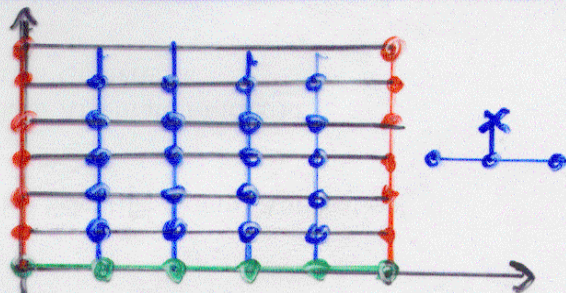
$$\frac{d}{dt} \underline{T}(t) = -K \underline{T}(t) + \underline{b}(t) \quad t \in (0, t_E)$$

$$\underline{T}(0) = \underline{T}_A$$

AWA

(5) in $t = t_j, j = \overline{0, m-1}$

$$\frac{dT_i(t)}{dt} \approx \frac{T_i(t_{j+1}) - T_i(t_j)}{\Delta t}$$



(6) $\frac{T_i^{j+1} - T_i^j}{\Delta t} = \kappa \frac{T_{i-1}^j - 2T_i^j + T_{i+1}^j}{\Delta x^2}, i = \overline{1, n-1}, j = \overline{0, m-1}$

$$RB: T_0^j = T_a(t_j), T_n^j = T_b(t_j), j = \overline{0, m}$$

$$AB: T_i^0 = T_A(x_i), i = \overline{0, n}$$

Euler rückwärts

• Bemerkung 1.1:

1. Die hier vorgestellte Methode der Ortsdiskretisierung heißt **Differenzenverfahren = Finite Difference Method (FDM)**
 → Ausgangspkt. = PDE (Klassische Formulierung)
 Idee: Ersetze Abl. durch Differenzen auf Gitter!

2. Andere Techniken zur Ortsdiskretisierung sind:

FVM = Finite Volume Method

→ Ausgangspkt. = Integralbilanzformul. (2)

FEM = Finite Element Method

→ Ausgangspkt. = Variationsformulierung

→ siehe Kap. 2!

BEM = Boundary Element Method
 = Randelementmethode

→ Ausgangspkt. = Integralgleichungsformul.

3. Die AWA (5) ist ein Spezialfall von AWA der Art:

Ges. Vektorfkt. $u(t) = (u_1(t), \dots, u_N(t))^T$:

$$(5)_u \quad \begin{cases} u'(t) = f(t, u(t)), & t \in (0, T) \\ AB: u(0) = u_0 \end{cases} \quad \text{hier: } T = t_E$$

wobei f geg. Vektorfkt. und $u_0 \in \mathbb{R}^n$ geg. Vektor der AB.

Verfahren zur numerischen Lsg. der AWA (5)_u sind:

- 1) Einschrittverfahren, z. B. Runge-Kutta-Verfahren

→ expliziter Euler (1), impliziter Euler (2), CN (2), ...

- 2) Mehrschrittverfahren, z. B. BDF-Verfahren

Dazu benötigen wir zunächst Verfahren zur num. Integration.

Denn falls $f(t, u(t))$ nicht von u abhängt, dann ist die Lsg.

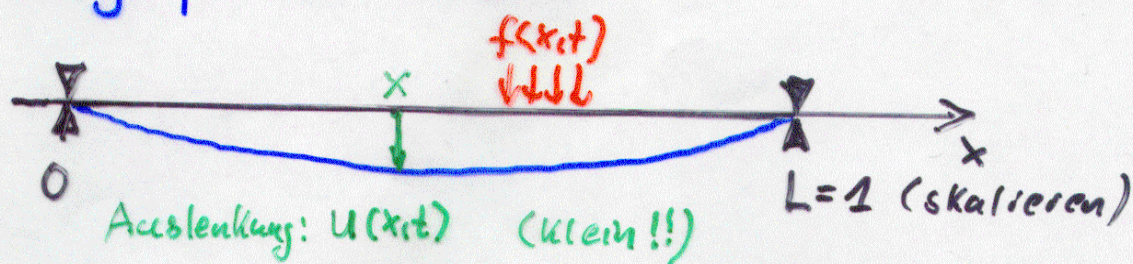
von (5)_u äquivalent zu

$$u(t) = u_0 + \int_0^t f(t) dt,$$

d.h. wir benötigen Verfahren zur num. Ber. von $\int_0^t f(t) dt$!

1.2.2. Schwingungsgleichung

■ Die Modellierung der Schwingungen einer fest eingespannten Saite



führt auf das mathematische Modell (= ARWA):

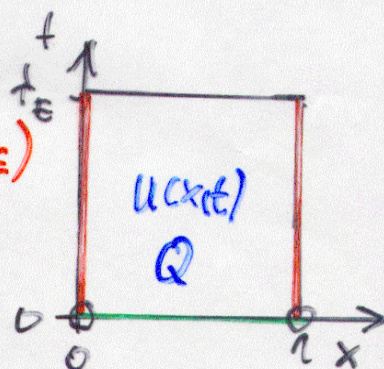
(7) Ges. $u = u(x, t) \in C^2(\bar{Q}) \cap C(\bar{Q}) \cap C^1(\underline{Q})$:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x,t) - a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,t) = f(x,t) \quad \forall (x,t) \in Q = (0,1) \times (0,t_f)$$

RB: 1. Art (Dirichlet) & 1. ARWA

$$u(0,t) = u(1,t) = 0 \quad \forall t \in (0, t_E)$$

$$AB: \begin{cases} u(x, 0) = u_0(x) \\ \frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = u_1(x) \end{cases} \quad \forall x \in [0, 1]$$



- Analog zur Diskretisierung des Wärmeleitproblems ersetzen wir

$[0, 1] \ni x \mapsto x_i = ih$:

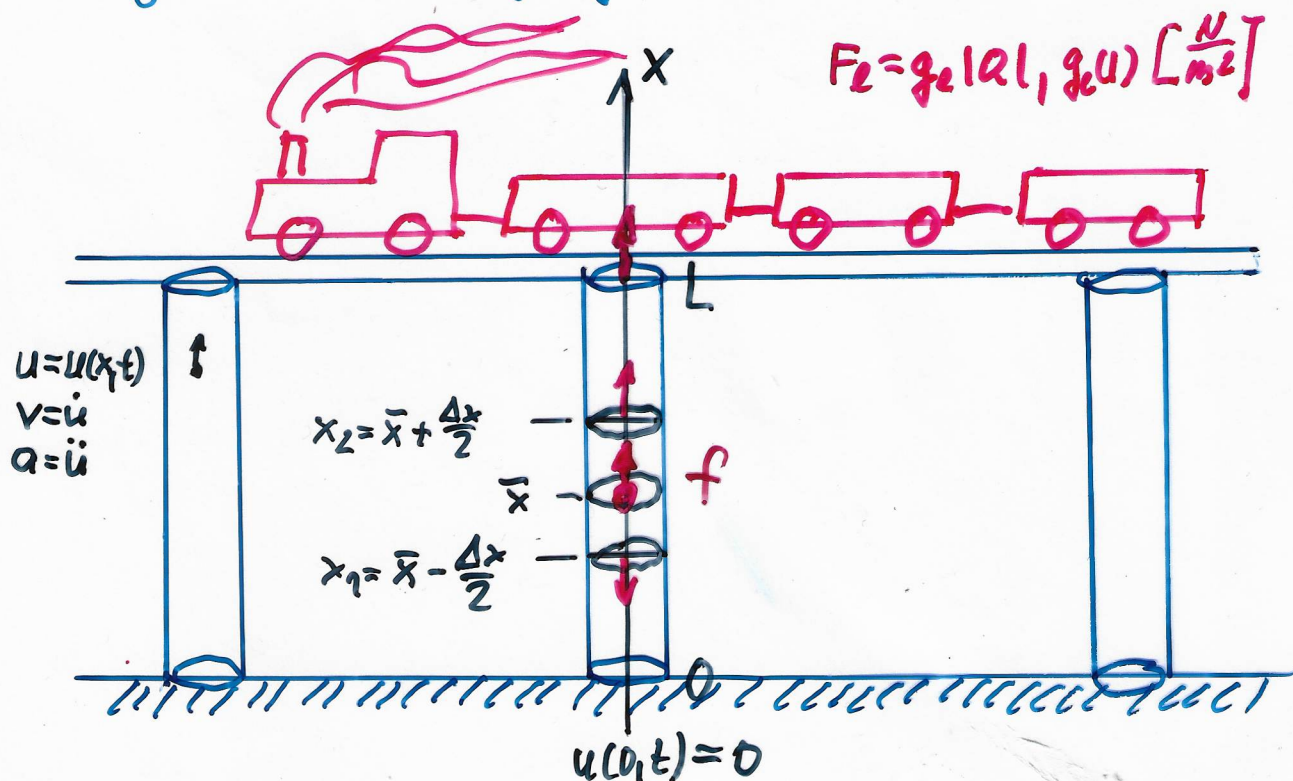
$[0, t_E] \ni t \mapsto t_j = j\tau$:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x_i, t_j) \approx \frac{u(x_{i+1}, t_j) - 2u(x_i, t_j) + u(x_{i-1}, t_j))}{h^2}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x_i, t_j) \approx \frac{u(x_i, t_{j+1}) - 2u(x_i, t_j) + u(x_i, t_{j-1}))}{\Delta t^2}$$

■ Mechanisches Problem: [VL 13: 2.2.2: 55-57]

Longitudinalschwingung eines Stabes (einer Säule)



Newton: Kraft = Masse $\times$ Beschleunigung

$$\underbrace{|Q| G(\bar{x} + \frac{\Delta x}{2}, t) - |Q| G(\bar{x} - \frac{\Delta x}{2}, t)}_{\text{resultierende Oberflächenkraft}} + \underbrace{|Q| \int_{x_1}^{x_2} f(x, t) dx}_{\text{resultierende Volumenkraft}} = \underbrace{\int_{x_1}^{x_2} \rho(x, t) g dx |Q|}_{\text{resultierende Trägheitskraft}}$$

+ Stoffgesetz = HOOK: $\sigma = E \epsilon$

+ Geometrische Beziehung: $\epsilon(x, t) = u'(x, t) = \frac{\partial u}{\partial x}(x, t)$

+ $\rho(x, t) = \ddot{u}(x, t) := \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x, t)$ - Beschleunigung

+ RB: $u(0, t) = 0, \sigma(L, t) := E \frac{\partial u}{\partial x}(L, t) = g_e(t) \quad \forall t \in (0, t_e)$

+ AB: $u(x, 0) = u_0(x), \frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = v_0(x), \quad \forall x \in [0, L]$

$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} (*) \Rightarrow$

(7)

$$\begin{aligned} & \rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x, t) - \frac{\partial}{\partial x} \left(E \frac{\partial u}{\partial x}(x, t) \right) = f(x, t) \quad \forall (x, t) \in Q := (0, L) \times (0, t_e) \\ & + \text{RB: } u(0, t) = 0, E \frac{\partial u}{\partial x}(L, t) = g_e(t) \quad \forall t \in (0, t_e) \\ & + \text{AB: } u(x, 0) = u_0(x), \frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = v_0(x), \quad \forall x \in [0, L] \end{aligned}$$

und ersetzen dann die PDEl. (7) in den inneren Gitterpunkten (x_i, t_j) , $i = \overline{0, n-1}$, $j = \overline{1, m-1}$ des Raum-Zeit-Gitters durch die Differenzengleichung ($u_i^j \approx u(x_i, t_j)$):

$$\frac{u_i^{j+1} - 2u_i^j + u_i^{j-1}}{\tau^2} - a^2 \frac{u_{i+1}^j - 2u_i^j + u_{i-1}^j}{h^2} = \varphi_i^j := f(x_i, t_j).$$

In den Randgitterpunkten ist u_i^j durch die RB ges.:

$$u_0^j = u_n^j = 0 \quad \forall j = \overline{1, m}.$$

In der 0. und in der 1. Zeitschicht erhalten wir die Werte aus den AB:

$$j=0: u_i^0 = u_0(x_i) \quad \forall i = \overline{0, n}$$

$$j=1: u_i^1 = u_i^0 + \tau u_1(x_i) \quad \forall i = \overline{0, \overbrace{1, n-1}^{\text{Komp.}}, n}$$

Motiviert: $u(x_i, t_1) = u(x_i, 0) + \frac{\partial u}{\partial t}(x_i, 0) \tau + O(\tau^2)$

Damit erhalten wir das Differenzenschema:

(8)

Ges. $u_i^j \approx u(x_i, t_j)$:

$$\frac{u_i^{j+1} - 2u_i^j + u_i^{j-1}}{\tau^2} - a^2 \frac{u_{i+1}^j - 2u_i^j + u_{i-1}^j}{h^2} = \varphi_i^j, \quad i = \overline{0, n-1}$$

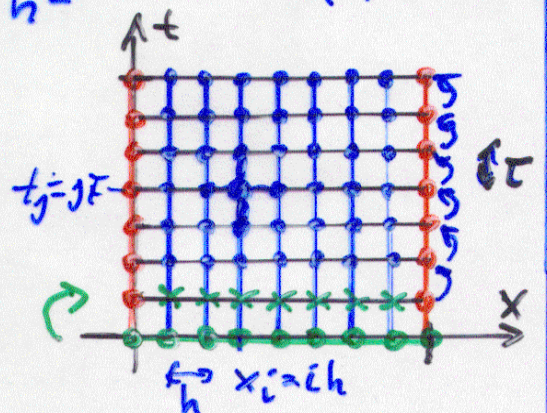
$$j = \overline{1, m-1} = 1, 2, \dots, m-1$$

RB: $u_0^j = u_n^j = 0, \quad j = \overline{1, m}$

AB: $u_i^0 = u_0(x_i)$

$$u_i^1 = u_i^0 + \tau u_1(x_i)$$

$$i = \overline{0, n}$$



■ $\boxed{U1}$ $\Rightarrow$ Numer. Analysis: Approx. + Stabilität $\Leftarrow$ Konv. CFL-Bd.

$\Rightarrow$ Algorithmus

N-2

$\Rightarrow$ Implementierung $\Rightarrow$ Computerexp. $\Rightarrow$ Diskussion der

1.3. Typische mathematische Modelle für PDgl. und ihr technischer Hintergrund

1.3.1. ARWA für parabolische PDgl.

■ Ges. $u(x,t) \in \mathcal{X} \subset C^{2,1}(Q)$:

$$(9) \quad \frac{\partial u}{\partial t}(x,t) - a \Delta u(x,t) = f(x,t), \quad (x,t) \in Q := \Omega \times (0,t_E)$$

$\uparrow$ LAPLACE-Operator

+ RB: 1. Art = Dirichlet: $u(x,t) = g_1(x,t), x \in \Gamma = \partial\Omega, t \in (0,t_E)$

2. Art = Neumann: $-a \frac{\partial u}{\partial n}(x,t) = g_2(x,t) \quad - \quad -$

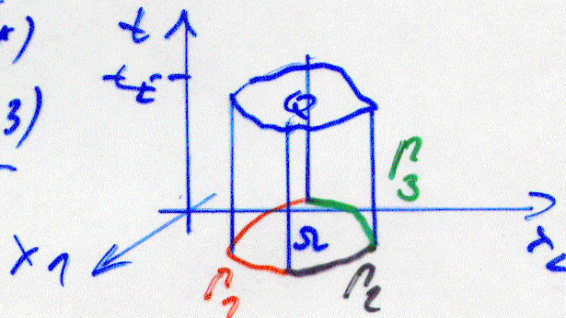
3. Art = Robin: $-a \frac{\partial u}{\partial n} = \alpha(u - u_R) \quad - \quad -$

4. Art = gemischt: i. Art auf $\Gamma_i, i = 1, 3$

+ AB: $u(x,0) = u_0(x), x \in \bar{\Omega}$

wobei $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ - Rechengebiet (*)

d - Ortsdimension ($d=1,2,3$)



■ Modelliert z. B.:

- Stationäre Wärmeausbreitung (2 Wärmelestdgl.)

- Stationäre Diffusionsprozesse (2 Diffusionsgl.)

: etc

■ Semidiscretisierung im Ort (FDM, FEM) führt auf AWA für System gew. Dgl. 1. Ordnung zur Bestimmung von $\underline{u}(t) := (u_1(t), \dots, u_N(t))^T$:

$$(10) \quad \begin{cases} \dot{\underline{u}}(t) = \underline{f}(t, \underline{u}(t)) := -K \underline{u}(t) + \underline{b}(t), t \in (0,t_E) \\ +AB: \underline{u}(0) = \underline{u}_0 \end{cases}$$

wobei $\dot{\underline{u}}(t) := \frac{d\underline{u}}{dt}(t) = (\dot{u}_1(t), \dots, \dot{u}_N(t))^T$

9

- 2 -

1.3.2. ARWA für hyperbolische PDgl.

■ Ges. $u(x,t) \in X \subset C^{2,2}(Q) \equiv C^2(Q)$:

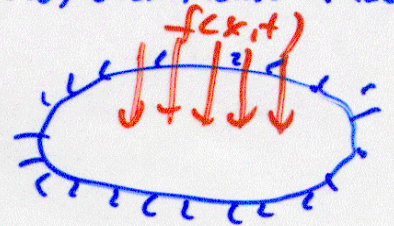
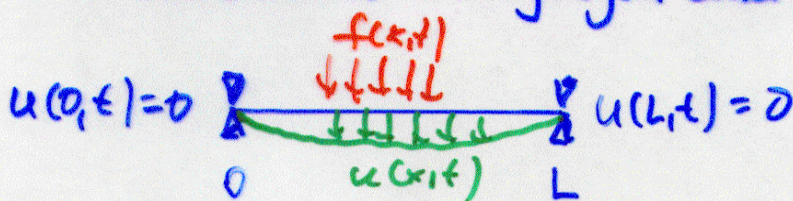
$$(11) \quad \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x,t) - a \Delta u(x,t) = f(x,t), \quad (x,t) \in Q := \Omega \times (0, t_E)$$

+ RB: 1.-4. Art $\leadsto$ 1.-4. ARWA

$$+ AB: \left. \begin{array}{l} u(x,0) = u_0(x) \\ \frac{\partial u}{\partial t}(x,0) = u_1(x) \end{array} \right\} x \in \bar{\Omega} \subset \mathbb{R}^d$$

■ Modelliert z.B.:

- Longitudinalschwingungen eines Stabes (1D: $d=1$)
- Transversalschwingungen einer Saite (1b) oder Membran (2D)



- Ausbreitung von Druckwellen in der Akustik
: etc.

$\Rightarrow$ (11) heißt auch Schwingungs- oder Wellengleichung

■ Semidiscretisierung im Ort (FDM, FEM) führt auf AWA für Systeme gew. Dgl. 2. Ordnung zur Bestimmung von $\underline{u}(t) = (u_1(t), \dots, u_n(t))^T$:

$$(12) \quad \begin{cases} \ddot{\underline{u}}(t) = f(t, \underline{u}(t)) := -K \underline{u}(t) + \underline{b}(t), & t \in (0, t_E) \\ + AB: \underline{u}(0) = \underline{u}_0, \\ \quad \quad \underline{\dot{u}}(0) = \underline{u}_1. \end{cases}$$

1.3.3. RWA für elliptische PDgl.

■ Asymptotische Verteilung: $t \rightarrow \infty$

Ableitung aus parabolischen PDgl. für " $t \rightarrow \infty$ " unter stationären Bedingungen:

$$\text{Annahmen: } \left. \begin{array}{l} f(x,t) \approx f(x) \\ g(x,t) = g(x) \\ a = \text{const} > 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} u(x,t) \rightarrow u(x) \\ \frac{\partial u}{\partial t}(x,t) \rightarrow 0 \\ t \rightarrow \infty \end{array} \right\}$$

Folglich ist die asymp. (stationäre) Verteilung $u(x)$ Lösung der RWA:

$$(13) \quad \boxed{-\Delta u(x) = \frac{1}{a} f(x) \text{ in } \Omega} \quad \text{Poissonsgleichung}$$

$\downarrow$ 1.-4. RWA

Bsp.: - Asymp. (stationäre) Temperaturverteilung
 - " " " Schadstoffverteilung
 - Potential von elektrischen Feldern
 $\leadsto$ Potentialgleichung

■ Statische und quasistatische Gleichgewichtszustände:

Ableitung aus hyperbolischer PDgl. möglich:

Ann.: $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x,t) \approx 0 \quad \forall (x,t) \in Q$

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x,0) \approx 0 \quad \forall x \in \bar{\Omega}, \quad a = \text{const} > 0$$

$\Rightarrow$ quasistatisch:

$$\boxed{\begin{array}{l} -\Delta \dot{u}(x,t) = \frac{1}{a} \dot{f}(x,t) \text{ in } \Omega \\ + \text{RB: 1.-4. Art auf } \Gamma \\ + \text{AB: } u(x,0) = u_0(x) \text{ in } \bar{\Omega} \end{array}}$$

Quasizeitparameter

$\downarrow$ inkrementelle Methoden (Homotopie-Methoden)

Ann.: $f(x,t) = f(x)$, $g_i(x,t) = g(x)$, $a = \text{const} > 0$
 $\Rightarrow$ statisch:

$$(13) \quad \boxed{\begin{array}{l} -\Delta u(x) = \frac{1}{a} f(x) \text{ in } \Omega \\ + \text{RB: 1. - 4. Art auf } \Gamma \end{array}} \quad \text{Poisson-Gleichung}$$

Bsp.: - Zugstab im statischen Gleichgewicht (10)
 - Gleichgewichtslage einer Saite bzw. Membran

Periodische Lösungen von hyperbolischen PDEl.

Btr. 2. B. 1. ARWA für (9): $\frac{\partial u}{\partial t} - a \Delta u = f$, RB, AB

Ann.: $f(x,t) = a f(x) e^{i\omega t}$ ($i = \sqrt{-1}$)

$g(x,t) = g(x) e^{i\omega t}$ Frequenz: ω

Ansatz: $u(x,t) = u(x) e^{i\omega t}$

$$(11) \Rightarrow i^2 \omega^2 e^{i\omega t} u(x) - a e^{i\omega t} \Delta u(x) = a e^{i\omega t} f(x)$$

$$(15) \quad \boxed{\begin{array}{l} -\Delta u(x) - k^2 u(x) = f(x), x \in \Omega \\ + \text{RB: } u(x) = g(x), x \in \Gamma \\ \text{mit } k^2 = \omega^2 / a \end{array}} \quad \text{Helmholtz-Gleichung}$$

Frage nach Eigenschwingungen $\lambda = k^2$:

$$(16) \quad \boxed{\begin{array}{l} \text{Ges. } u(x) \neq 0: -\Delta u(x) = \lambda u(x), x \in \Omega \\ \text{Ewp} \quad u(x) = 0, x \in \Gamma \end{array}}$$

■ Ortsdiscretisierung (FEM, FVM, FDM, ...)

- Poisson-Gl. (13), (14): $\rightarrow$ Großdimensioniertes GS

$$-\Delta u = f \text{ in } \Omega$$

+ RB auf Γ

$$K \underline{u} = \underline{f}$$

Steifigkeitsmatrix

Wärmeleitmatrix

Lastvektor

Quellvektor

- EWP (16)

$$-\Delta u = \lambda u \text{ in } \Omega$$

$u = 0$ auf Γ

- $\rightarrow$ Matrixeigenwertproblem

$$K \underline{u} = \lambda M \underline{u} \quad (\text{FEM})$$

Steifigkeitsmatrix

EW

Massenmatrix

1.3.4. Verallgemeinerungen

- Allgem. skalare PDgl. 2. Ordnung:

$-a \Delta u$
ellipt. Anteil

$\mapsto$

allgemeiner ellipt.
Differentialoperator

z.B. Wärmeleit - Wärmetransport - Problem

$$-\sum_{i,j=1}^d \frac{\partial}{\partial x_i} \left(a_{ij} \frac{\partial u}{\partial x_j} \right) + \sum_{i=1}^d a_i \frac{\partial u}{\partial x_i} + a u$$

Wärmeleitung
Diffusion

Wärmetransport
Konvektion

Wärmeausstrahlung
Reaktion

13

Systeme gekoppelter PDE!

- 1) Dynamisch erregter 3D linear elast Körper:
 $\Rightarrow$ Navier - Lamé - Gleichungen

(17) Ges. Verschiebungsfeld $u(x,t) = (u_1(x,t), u_2(x,t), u_3(x,t))$!

$$\rho \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} + c \frac{\partial u_i}{\partial t} - \sigma_{ij,j} = f_i(x,t) \quad \text{in } Q = \Omega \times (0, t_E)$$

$i = 1, 2, 3$ $\uparrow$ Spann. Bewegungsgl.

+ Stoffgesetz (Hook): $\sigma_{ij} = D_{ijkl} \varepsilon_{kl}$

+ geom. Beziehungen: $\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} (u_{i,j} + u_{j,i})$ $\uparrow$ Def.

+ RB: $u = 0$ auf Γ_1 $\left. \begin{array}{l} \sigma_{ij} n_j = g_i \text{ auf } \Gamma_2 \end{array} \right\} \forall t \in (0, t_E)$

$\Gamma = \partial\Omega = \Gamma_1 \cup \Gamma_2$

+ AB: $u(x, 0) = u_0(x)$ $\left. \begin{array}{l} \frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = u_1(x) \end{array} \right\} \forall x \in \bar{\Omega}$

= ARWA für hyperbolisches System von PDE!

- 2) Lamé'sche Gleichung = statische Fall

- 3) Navier-Stokes Gleichungen zur Beschreibung instationärer Strömungen inkomp. viskose Fluide

- 4) MAXWELL-Gleichungen: elektromagn. Felder
 etc etc.

Navier-Stokes Gleichungen
zur Beschreibung instationärer
Strömungen inkompressibler,
viskoser Fluide:

$$\text{Ges. } u(x,t) = (u_1(x,t), u_2(x,t), u_3(x,t))^T$$

- Geschwindigkeitsfeld,

$p(x,t)$ - Druckfeld:

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \frac{1}{Re} \Delta u + u \cdot \nabla u + \nabla p = f \text{ in } Q_T$$

(Impulsgleichung)

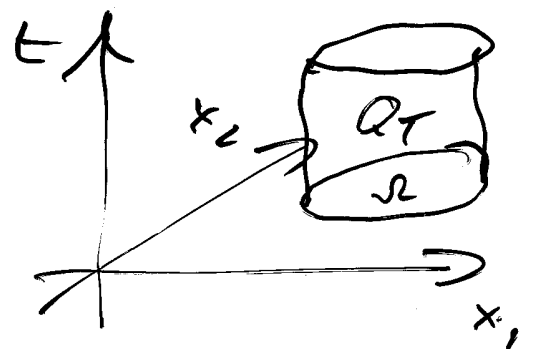
$$\operatorname{div} u = 0 \quad (\text{Kontinuitätsgleichung})$$

$$\text{+ RB: z.B. } u = 0 \text{ auf } \Gamma = \partial\Omega \quad \forall t \in [0, T]$$

$$\text{+ AB: } u(x, 0) = u_0(x) \quad \forall x \in \overline{\Omega}$$

wobei Re - dimensionslose Reynoldszahl

$$Q_T = \Omega \times (0, T)$$



MAXWELL - Gleichungen
zur Beschreibung elektro-
magnetischer Felder:

$$\operatorname{rot} H = J + \frac{\partial D}{\partial t}$$

$$\operatorname{rot} E = - \frac{\partial B}{\partial t}$$

$$\operatorname{div} B = 0$$

$$\operatorname{div} D = \rho$$

+ Materialgleichungen

$$B = \mu(H) H$$

...

+ Interfacebedingungen

+ RB

+ AB

1.4. Modellierung elektromagnetischer Felder zur Simulation und Optimierung elektromagnetischer Produkte und Prozesse

- Startpunkt sind die Maxwell-Gl. aus Folie 12c:
 $\operatorname{div} B = 0 \Rightarrow \exists \text{ Vektorpotential } A = (A_1, A_2, A_3)^T$
 $\nabla \cdot B = 0 \quad B = \operatorname{curl} A = \operatorname{rot} A = \nabla \times A$

- Damit lassen sich die Maxwell-Gleichungen auf das folgende System PDgl. (PDEs) führen:

$\text{ZB: } \underbrace{\epsilon}_{\text{Permittivität}} \frac{\partial^2 A}{\partial t^2} + \underbrace{\sigma}_{\text{el. Leitf.}} \frac{\partial A}{\partial t} + \operatorname{curl} \left(\underbrace{\frac{1}{\mu}}_{\substack{= \nu\text{-Reluktivität} \\ \text{eingespeigelter Strom}}} \operatorname{curl} A \right) = \underbrace{J}_{\substack{\text{per. mag. Feld} \\ \text{per. mag. Strom}}} := J_i - \operatorname{curl} \frac{\mu}{\mu_0} M + \frac{\partial p}{\partial t}$

$(x) \begin{cases} J(x,t) = \hat{J}(x) e^{i\omega t} - \text{harmonische Erreg.} \\ \nu \neq \nu(|\operatorname{curl} A|), \text{ d.h. linear!} \\ \text{Ansatz: } A(x,t) = \hat{A}(x) e^{i\omega t} \\ \text{Komplex} \end{cases}$

$\text{FB: } \operatorname{curl} (\nu \operatorname{curl} \hat{A}) - (\omega^2 \epsilon - i\omega \sigma) \hat{A} = \hat{J}$

siehe z.B.: ... /LVA/2009w/MatModTech

Spezialfall 1: Wirbelstromprobleme

Vor.: Verschiebungsströme $\frac{\partial p}{\partial t}$ können vernachlässigt werden, d.h. $\frac{\partial p}{\partial t} \approx 0$.

$\text{ZB: } \sigma \frac{\partial A}{\partial t} + \operatorname{curl} (\nu \operatorname{curl} A) = J \text{ in } Q_T = \Omega \times (0,T)$

$\text{FB: } \operatorname{curl} (\nu \operatorname{curl} \hat{A}) + i\omega \sigma \hat{A} = \hat{J} \text{ in } \Omega$

■ Spezialfall 2: Magnetostatik

Vor.: $A = A(x) = A(x_1, x_2, x_3)$, d.h. $\frac{\partial A}{\partial t} = 0$.

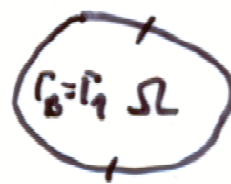
Ges. $A = (A_1, A_2, A_3)$:

$$\text{curl } (\nu \text{ curl } A) = J := J_i - \text{curl } \frac{\mu_0}{\mu} M \text{ in } \Omega$$

(Magnetostatik)

30

+ RB: z.B. $A \times n = 0$ auf $\Gamma_B (\Rightarrow B \cdot n = 0!)$



$\nu \text{ curl } A \times n = -J_s$ auf $\Gamma_H (\Rightarrow H \times n = -\frac{1}{\nu} J_s)$

! Coulomb Erziehung (gauge)
 $\text{div } A = 0$

Bsp.: Elektromagnet, elektrische Maschine, ...

■ Spezialfall 3: Elektrostatik

Ann.: zeitunabhängig und $\sigma = 0$ (nichtleitend)

Dann folgt aus den Maxwell-Gleichungen:

$$\text{curl } E = 0 \Rightarrow E = -\nabla \varphi \quad (\exists \text{ Skalarpotential})$$

$$\text{div } D = \rho$$

$$D = \epsilon E = -\epsilon \nabla \varphi$$

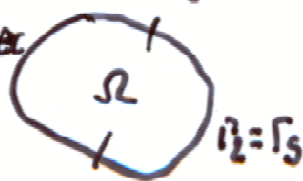
die folgende Randwertaufgabe:

Ges. elektrisches Skalarpotential $\varphi = \varphi(x)$:

$$-\text{div}(\epsilon \nabla \varphi) = \rho \text{ in } \Omega \subset \mathbb{R}^d, d=1,2,3$$

+ RB: z.B. geg. Oberflächenladungen (surface charges)

$\Gamma_1 = \Gamma_{PEC}$



$$\epsilon \nabla \varphi \cdot n \equiv -D \cdot n = -\rho_s \text{ auf } \Gamma_S$$

und geg. elektr. Potential (Spannung)

$$\varphi = u \text{ auf } \Gamma_{PEC}$$

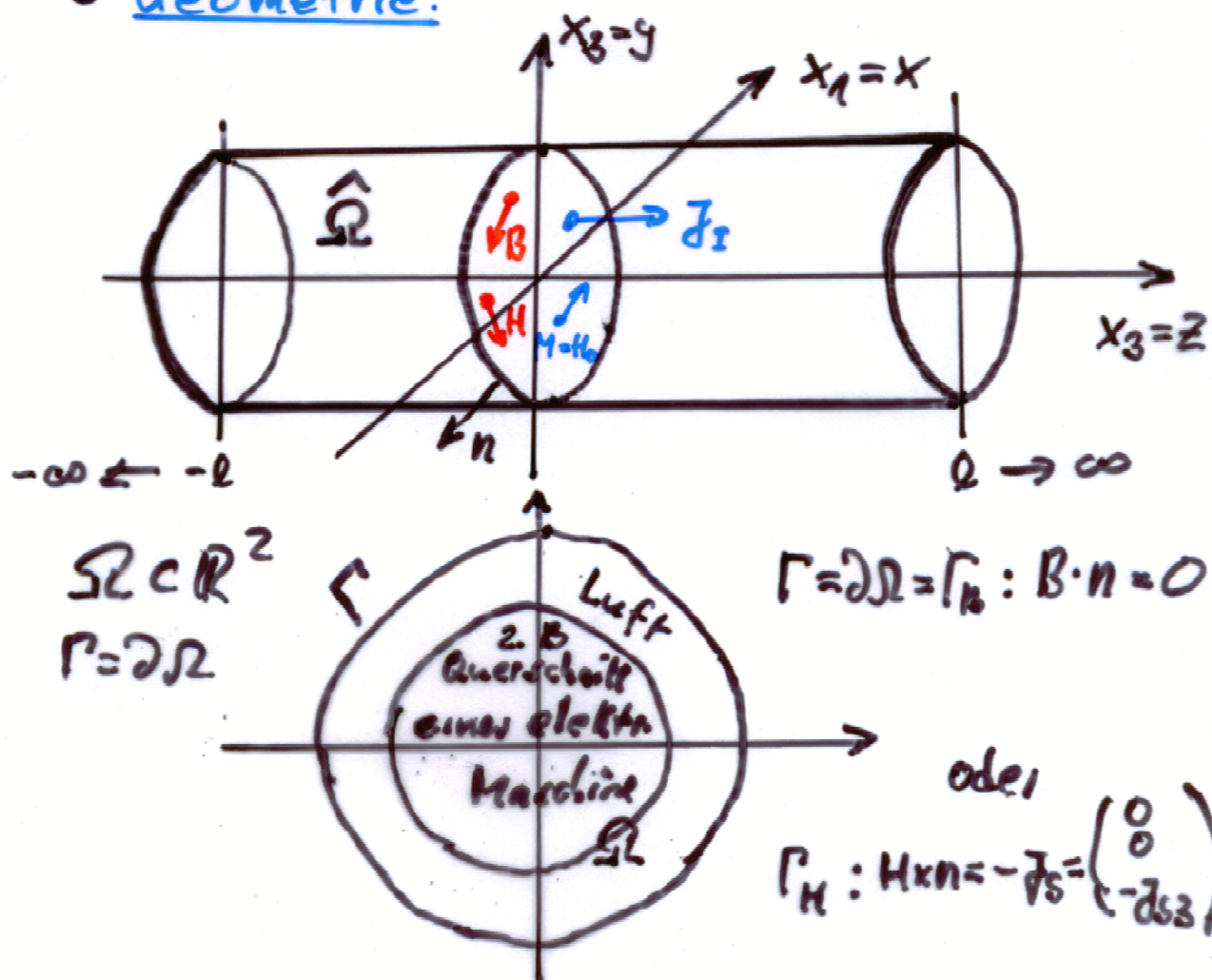
(Elektrostatik)

31

Bsp.: Transformatoren (ABB)

■ Magnetostatik in 2D (z.B. elektrische Maschinen):

● Geometrie:



● Voraussetzung:

1. $\hat{\Omega} = \Omega \times (-l, l)$ mit $l \gg \text{diam } \Omega$,
2. $J = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ J_{s3}(x_1, x_2) \end{pmatrix}$, $x = (x_1, x_2) \in \Omega$,
($\Rightarrow \text{div } J = 0$!)
3. $M = H_0 = \begin{pmatrix} H_{01}(x_1, x_2) \\ H_{02}(x_1, x_2) \\ 0 \end{pmatrix}$, $x = (x_1, x_2) \in \Omega$,
4. $H = \begin{pmatrix} H_1(x_1, x_2) \\ H_2(x_1, x_2) \\ 0 \end{pmatrix}$, $x = (x_1, x_2) \in \Omega$.

- Unter diesen Voraussetzungen folgt sofort ^{12g}

$$B = B(x) = \begin{pmatrix} B_1(x_1, x_2) \\ B_2(x_1, x_2) \\ 0 \end{pmatrix}, \quad x = (x_1, x_2) \in \Omega,$$

BH-Relation

$$0 = B_3 = (\text{curl } A)_3 = (\nabla \times A)_3 = \partial_1 A_2 - \partial_2 A_1 = 0$$

Das ist offenbar mit dem Ansatz

$$A = A(x) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ A_3(x_1, x_2) \end{pmatrix}$$

sofort erfüllt. Des Weiteren gilt automatisch die Coulomb-Eichung

$$\text{div } A = \nabla \cdot A = \frac{\partial A_1}{\partial x_1} + \frac{\partial A_2}{\partial x_2} + \frac{\partial A_3}{\partial x_3} = A_{i,i} = 0$$

und

$$B = \nabla \times A = \begin{pmatrix} +\partial_2 A_3 \\ -\partial_1 A_3 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$|B| = |\nabla \times A| = |\nabla A_3| \quad \text{mit } \nabla = \begin{pmatrix} \partial_1 \\ \partial_2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} \text{curl} \left[\underbrace{\nu(|\text{curl } A|)}_{\text{green}} \text{curl } A \right] &= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -\partial_1 [\nu \partial_1 A_3] - \partial_2 [\nu \partial_2 A_3] \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} H_1(x_1, x_2) \\ H_2(x_1, x_2) \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \nu B_1(x_1, x_2) \\ \nu B_2(x_1, x_2) \\ 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -\text{div} [\nu(|\nabla A_3|) \nabla A_3] \end{pmatrix}$$

$$\text{z.B.: } \text{div} := \frac{\partial}{\partial x_1} + \frac{\partial}{\partial x_2}$$

- Randbedingungen:

$$\Gamma_B: 0 = B \cdot n = \begin{pmatrix} \partial_2 A_3 \\ -\partial_1 A_3 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} n_1 \\ n_2 \\ 0 \end{pmatrix} = \partial_2 A_3 \cdot n_1 - \partial_1 A_3 \cdot n_2$$



$$\Gamma_B = -\nabla A_3 \times \begin{pmatrix} n_1 \\ n_2 \end{pmatrix} = \frac{\partial}{\partial t} A_3 = 0$$

z.B. $A_3 = 0$ auf Γ_B

$$\Gamma_H: \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -j_{i,3} \end{pmatrix} = \underbrace{[\nu(|\nabla \times A|) \nabla \times A]}_{=H} \times n =$$

$$= \nu(|\nabla A_3|) \begin{pmatrix} \partial_2 A_3 \\ -\partial_1 A_3 \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} n_1 \\ n_2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$= \nu(|\nabla A_3|) \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \partial_2 A_3 n_2 + \partial_1 A_3 n_1 \end{pmatrix}$$

- Resultat: 3D Magnetostatik $\rightarrow$ 2D Magnetostatik

Ges. $u = A_3(x) = A_3(x_1, x_2)$:

$$-\operatorname{div}(\nu(x, |\nabla u|) \nabla u(x)) = j_{i,3} + \frac{\mu_0}{\mu} \left(\frac{\partial H_{02}}{\partial x_1} - \frac{\partial H_{01}}{\partial x_2} \right)$$

$$x = (x_1, x_2) \in \Omega \subset \mathbb{R}^2$$

+ RB auf $\Gamma = \partial\Omega$:

$$u = 0 \text{ auf } \Gamma_B = \Gamma_1 = \Gamma_{\text{Dirichlet}}$$

$$\nu(|\nabla u|) \nabla u \cdot n = -j_{s,3} \text{ auf } \Gamma_H = \Gamma_2 = \Gamma_{\text{Neumann}}$$

- Beispiel: Elektromagnet $\rightarrow$ Folien 12i+j
Elektrische Maschinen

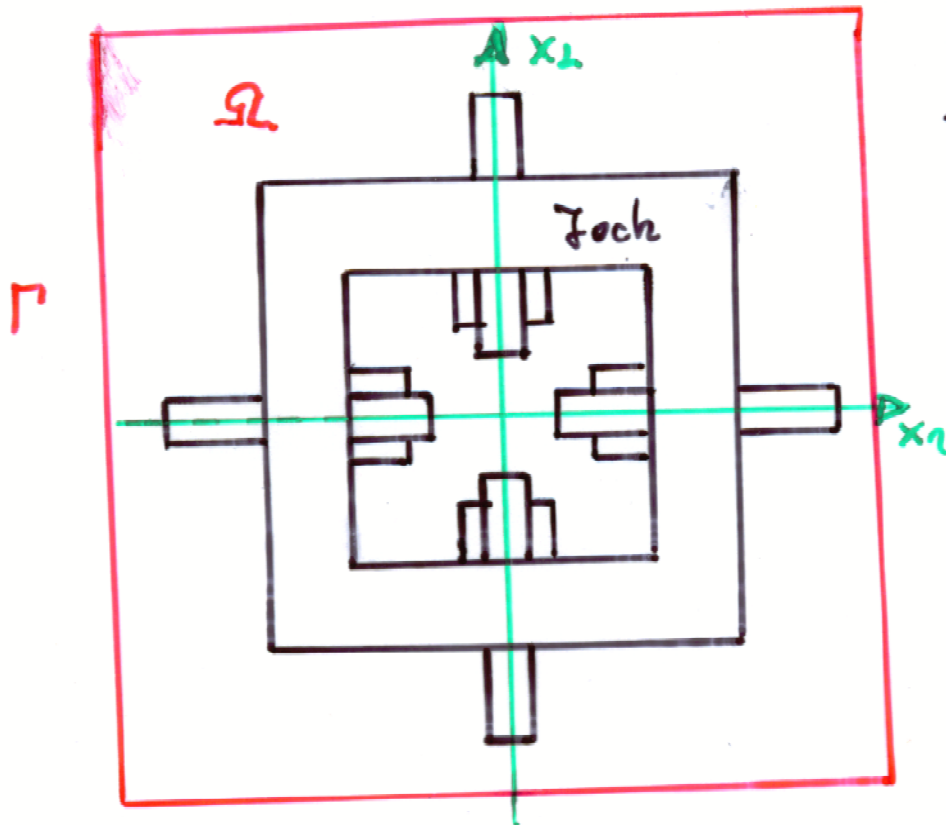
• Beispiel: Elektromagnet

3D-Elektromagnet:

$$\operatorname{curl}(\nu \operatorname{curl} A) = j \text{ in } \Omega$$

$$A \times n = 0 \text{ auf } \hat{\Gamma}$$

2D-Modell im Querschnitt:



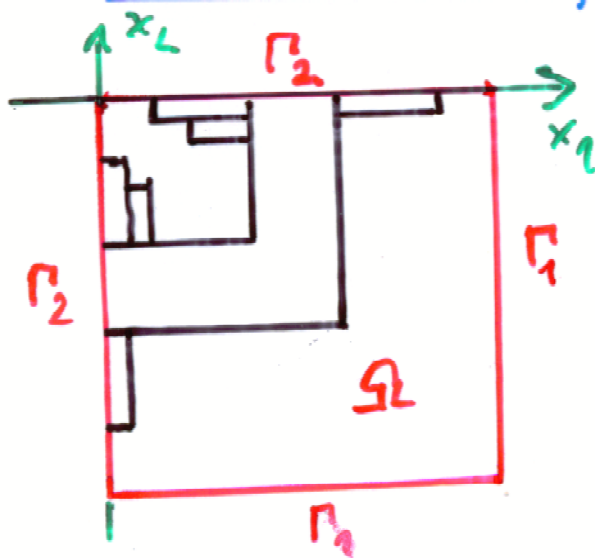
$$\text{Ges. } u = A_3(x_1, x_2)$$

$$-\operatorname{div}(\nu \nabla u) = j \text{ in } \Omega,$$

$$u = 0 \text{ auf } \Omega$$

$$\nu = \frac{1}{\mu_0 \mu} \text{ - Relukt}$$

Modellreduktion auf $\frac{1}{4}$ durch Symmetrie:



$$\text{Ges. } u = A_3(x_1, x_2):$$

$$-\frac{\partial}{\partial x_1} \left(\nu(x) \frac{\partial u}{\partial x_1} \right) - \frac{\partial}{\partial x_2} \left(\nu(x) \frac{\partial u}{\partial x_2} \right)$$

$$= j_{i3}(x), \quad x = (x_1, x_2) \in \Omega$$

+ RB:

$$u = 0 \text{ auf } \Gamma_1$$

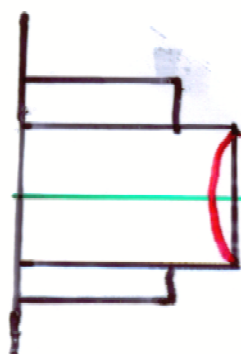
$$\nu \frac{\partial u}{\partial n} = 0 \text{ auf } \Gamma_2 \text{ (Symmetrie)}$$

Optimal Design Problem:

$$\min_{d \in D_{ad}} \frac{1}{|\Omega_m| |B_{req}|} \int_{\Omega_m} |B(d) - B_{req}|^2 dx$$

s.t. .

$$B(d) = \begin{pmatrix} \partial_x u \\ -\partial_x u \\ 0 \end{pmatrix} : \begin{aligned} & -\operatorname{div}(\nu \nabla u) = f \text{ in } \Omega \\ & u = 0 \text{ auf } \Gamma_1 \\ & \nu \frac{\partial u}{\partial n} = 0 \text{ auf } \Gamma_2 \end{aligned}$$



d z.B. Spline; ...

$$d \in D_{ad} \stackrel{\text{z.B.}}{:=} \{ \mathbb{R}^4 : \underline{d}_i \leq d_i \leq \bar{d}_i, i=1,4 \}$$