

Projekte zur Lehrveranstaltung Numerik (für Lehramt)

Walter Zulehner
Institut für Numerische Mathematik
Johannes Kepler Universität Linz

Wintersemester 2010/11

1 Problemstellung

Sei $d \in \mathbb{N}$. Im Speziellen werden die Fälle $d = 1$ (eindimensionaler Fall), $d = 2$ (zweidimensionaler Fall) und $d = 3$ (dreidimensionaler Fall) betrachtet.

Seien $\Omega = (0, 1)^d \subset \mathbb{R}^d$ und $\overline{\Omega} = [0, 1]^d$, sei $\Gamma = \partial\Omega$ der Rand von Ω . Mit Δ wird der Laplace-Operator in $\mathbb{R}^d$ bezeichnet:

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} + \dots + \frac{\partial^2}{\partial x_d^2}.$$

Folgende Problemstellungen werden betrachtet:

Das stationäre Problem: Gesucht ist eine Funktion $u : \overline{\Omega} \longrightarrow \mathbb{R}$ mit

$$\begin{aligned} -a \Delta u(x) &= f(x) && \text{für alle } x \in \Omega, \\ u(x) &= 0 && \text{für alle } x \in \Gamma. \end{aligned}$$

Das instationäre Problem: Gesucht ist eine Funktion $u : \overline{\Omega} \times [0, T] \longrightarrow \mathbb{R}$ mit

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t}(x, t) - a \Delta u(x, t) &= f(x, t) && \text{für alle } x \in \Omega, \ t \in (0, T), \\ u(x, t) &= 0 && \text{für alle } x \in \Gamma, \ t \in (0, T), \\ u(x, 0) &= u_0(x) && \text{für alle } x \in \overline{\Omega}. \end{aligned}$$

Folgende Daten werden im Weiteren verwendet:

$$\begin{aligned} f(x) = f(x, t) &= d \cdot a \cdot \pi^2 \cdot \sin(\pi x_1) \cdot \sin(\pi x_2) \cdots \sin(\pi x_d) \\ u_0(x) &= x_1 \cdot (1 - x_1) \cdot x_2 \cdot (1 - x_2) \cdots x_d \cdot (1 - x_d) \end{aligned}$$

Die exakte Lösung des stationären Problems ist durch

$$u(x) = \sin(\pi x_1) \cdot \sin(\pi x_2) \cdots \sin(\pi x_d)$$

gegeben, von der exakten Lösung $u(x, t)$ des instationären Problems ist bekannt, dass

$$u(x, t) \rightarrow u(x) \quad \text{für } t \rightarrow \infty.$$

Durch Diskretisierung der Ortsvariablen auf einem äquidistanten Gitter mit Feinheit

$$h = \frac{1}{N+1}$$

entsteht für das stationäre Problem das lineare Gleichungssystem

$$K_h \underline{u}_h = \underline{f}_h.$$

Aus dem instationären Problem entsteht ein Anfangswertproblem eines Systems gewöhnlicher Differentialgleichungen

$$\begin{aligned} \underline{u}'_h(t) + K_h \underline{u}_h(t) &= \underline{f}_h \quad \text{für alle } t \in (0, T) \\ \underline{u}_h(0) &= \underline{u}_{0h}. \end{aligned}$$

Der Vektor $\underline{u}_h$ bzw. die vektorwertige Funktion $\underline{u}_h(t)$ bestehen aus den Näherungen $u_{i_1, i_2, \dots, i_d}$ bzw. $u_{i_1, i_2, \dots, i_d}(t)$ der exakten Lösungen $u(x)$ bzw. $u(x, t)$ in den $n = N^d$ Gitterpunkten $x_{i_1, i_2, \dots, i_d} = (i_1 \cdot h, i_2 \cdot h, \dots, i_d \cdot h)$ für $i_1, i_2, \dots, i_d \in \{1, 2, \dots, N\}$.

Durch eine Runge-Kutta-Formel mit konstanter Schrittweite

$$\tau = \frac{T}{m}$$

erhält man Näherungen $u_{i_1, i_2, \dots, i_d}^j$ der exakten Lösung $u(x, t)$ in den Gitterpunkten $x_{i_1, i_2, \dots, i_d}$, $i_1, i_2, \dots, i_d \in \{1, 2, \dots, N\}$, zu den Zeitpunkten t_j , $j = 0, 1, \dots, m$.

Für den Spezialfall $N = 1$ erhält man eine skalare lineare Differentialgleichung

$$\underline{u}'_h(t) + 8da \underline{u}_h(t) = da \pi^2$$

mit Anfangsbedingung

$$\underline{u}_h(0) = \frac{1}{4^d}.$$

Die exakte Lösung $\underline{u}_h(t)$ in diesem Spezialfall ist durch

$$\underline{u}_h(t) = \frac{\pi^2}{8} + \left(\frac{1}{4^d} - \frac{\pi^2}{8} \right) e^{-8dat}$$

gegeben.

Konkret werden die folgenden Daten verwendet (Kupferstab, Länge 1 m):

$$T = 7200 \text{ s}, \quad a = \frac{385}{8930 \cdot 394} \frac{m^2}{s} \approx 0.000109424 \frac{m^2}{s}$$

Zur Berechnung der Näherungslösung des stationären Problems bzw. zur Durchführung eines impliziten Runge-Kutta-Verfahrens für das instationäre Problem müssen lineare Gleichungssysteme gelöst werden.

Als direkte Verfahren zur Lösung linearer Gleichungssysteme stehen das Gaußsche Eliminationsverfahren für allgemeine Matrizen bzw. das Gaußsche Eliminationsverfahren für Bandmatrizen zur Auswahl. Als iterative Verfahren stehen die Gradienten-Methode und die CG-Methode zur Auswahl.

Für das stationäre Problem ist der Startwert der iterativen Verfahren durch

$$\underline{u}_h^{(0)} = \underline{u}_{0h}$$

gegeben. Bei einem impliziten Runge-Kutta-Verfahren für das instationäre Problem ist der Startwert zur Berechnung von $\underline{u}_h^{j+1}$ durch

$$\underline{u}_h^{(0)} = \underline{u}_h^j$$

gegeben.

Das Abbruchkriterium der iterativen Verfahren lautet

$$\|r^{(k)}\|_2 \leq \varepsilon \|r^{(0)}\|_2 \quad \text{mit } \varepsilon = 10^{-6}.$$

2 Programmbeschreibung

Das Programm `laplace_equation.exe` zur Berechnung einer Näherungslösung des stationären Problems erzeugt eine Ausgabedatei `x.dat`. Das Programm `heat_equation.exe` zur Berechnung einer Näherungslösung des instationären Problems erzeugt drei Ausgabedateien `x.dat`, `t.dat` und `xt.gnu`. Das Graphikprogramm `wgnuplot.exe` ermöglicht eine grafische Darstellung der Daten dieser (drei) Datei(en).

2.1 Die Programme `laplace_equation.exe` und `heat_equation.exe`

Öffnen Sie (z.B. durch Mausklick) entweder das Programm `laplace_equation.exe` oder `heat_equation.exe`.

Im Eingabe-Dialog des Programms sind

- die Raumdimension d (1, 2 oder 3),
- die Feinheit des Ortsgitters durch Eingabe von N (Anzahl der inneren Gitterpunkte des Intervalls $[0, 1]$,

- im Falle des instationären Problems die Zeitschrittweite durch Eingabe von m (Anzahl der Unterteilungen des Intervalls $[0, T]$,
- im Falle des instationären Problems entweder
 1. das explizite Euler-Verfahren oder
 2. das implizite Euler-Verfahren oder
 3. die explizite Mittelpunktsregel oder
 4. die implizite Mittelpunktsregel,
- im Falle des stationären Problems oder einer impliziten Methode entweder
 1. das Gaußsche Verfahren oder
 2. das Gaußsche Verfahren für Bandmatrizen oder
 3. die Gradienten-Methode oder
 4. die CG-Methode

zur Lösung der entstehenden linearen Gleichungssysteme,

- ein Mess-Gitterpunkt $x_{ip_1, ip_2, \dots, ip_d}$ durch Eingabe des Indexfolge $ip_1 \ ip_2 \ \dots \ ip_d$ (d Indizes in einer Zeile, jeweils durch ein Leerzeichen getrennt),
- im Falle des instationären Problems ein Messzeitpunkt t_{jp} durch Eingabe des Index jp ,
- im Falle des instationären Problems ein Zeitinkrement `m_incr`, siehe die Beschreibung der Ausgabedatei `xt.gnu`

zu spezifizieren.

Nach dieser Spezifikation erfolgt eine kurze Information über den laufenden Lösungsprozess, und zwar werden

- im Falle des stationären Problems
 1. beim Gaußschen Verfahren und beim Gaußschen Verfahren für Bandmatrizen der Index k des aktuellen Eliminationsschrittes,
 2. bei der Gradienten-Methode und bei der CG-Methode der aktuelle Iterationsindex k und das aktuelle Verhältnis $\|r^{(k)}\|/\|r^{(0)}\|$,
- im Falle des instationären Problems der aktuelle Zeitpunkt t_j

ausgegeben.

Schließlich erfolgt eine Ausgabe der Resultate und zwar

- durch Beschreibung des gewählten Problems und des gewählten Verfahrens und

- im Falle des stationären Problems durch Ausgabe der Ortsschrittweite h , des Mess-Gitterpunktes $x_{ip_1, ip_2, \dots, ip_d}$ und der berechneten Näherung $u_{ip_1, ip_2, \dots, ip_d}$
- im Falle des instationären Problems durch Ausgabe der Ortsschrittweite h , der Zeitschrittweite τ , des Mess-Zeitpunktes t_{jp} , und im Falle einer erfolgreichen Rechnung des Mess-Gitterpunktes $x_{ip_1, ip_2, \dots, ip_d}$ und der berechneten Näherung $u_{ip_1, ip_2, \dots, ip_d}^p$ (Es ist möglich, dass der vorgegebene Mess-Zeitpunkt nicht erreicht wird, dann bricht das Programm mit einer entsprechenden Meldung ab.),
- durch Ausgabe der Rechenzeit.

Zusätzlich erfolgt eine Ausgabe der Resultate in drei Dateien:

- Die Datei **x.dat** enthält
 1. für $d = 1$ die Gitterpunkte x_{i_1} und
 - im stationären Fall die Näherungen u_{i_1} für $i_1 = 0, 1, 2, \dots, N, N + 1$,
 - im instationären Fall die Näherungen $u_{i_1}^{jp}$ für $i_1 = 0, 1, 2, \dots, N, N + 1$ zum Mess-Zeitpunkt t_{jp} ,
 2. für $d = 2$ die Gitterpunkte x_{i_1, i_2} und
 - im stationären Fall die Näherungen u_{i_1, i_2} für $i_1, i_2 = 0, 1, 2, \dots, N, N + 1$,
 - im instationären Fall die Näherungen u_{i_1, i_2}^{jp} für $i_1, i_2 = 0, 1, 2, \dots, N, N + 1$ zum Mess-Zeitpunkt t_{jp} ,
 3. für $d = 3$ die gleichen Informationen wie für $d = 2$, allerdings für den festen dritten Index $i_3 = ip_3$, der durch den Mess-Gitterpunkt gegeben ist, also die Gitterpunkte x_{i_1, i_2, ip_3} und
 - im stationären Fall die Näherungen u_{i_1, i_2, ip_3} für $i_1, i_2 = 0, 1, 2, \dots, N, N + 1$,
 - im instationären Fall die Näherungen u_{i_1, i_2, ip_3}^{jp} für $i_1, i_2 = 0, 1, 2, \dots, N, N + 1$ zum Mess-Zeitpunkt t_{jp} ,
- Die Datei **t.dat** enthält die Zeitpunkte t_j und die Näherungen $u_{ip_1, ip_2, \dots, ip_d}^j$ im Mess-Gitterpunkt für $j = 0, 1, \dots, m$, soweit die Berechnung erfolgreich war.
- Die Datei **xt.gnu** enthält die Informationen der Datei **x.dat**, allerdings nicht zum Mess-Zeitpunkt, sondern für alle erreichbaren Zeitpunkte $t_j = j \cdot \tau$, wobei j ein ganzzahliges Vielfache von **m_incr** ist. Diese Datei enthält auch noch Informationen zur Steuerung einer dynamischen Darstellung der Daten mit Hilfe des Programms **gnuplot**.

2.2 Beispiele

Zeilen, die mit **i** beginnen, sind dem Eingabe-Dialog zuzuordnen, Zeilen, die mit **p** beginnen, enthalten Informationen der gerade laufenden Berechnung, Zeilen, die mit **o** beginnen, enthalten die Ergebnisse der Berechnungen.

Beginnt eine Zeile mit **?**, so werden Eingabedaten erwartet.

Im ersten Beispiel wird `heat_equation.exe` ausgeführt und es werden alle Zeitschritte des instationären Problems erfolgreich durchgeführt:

```
i
i  E I N G A B E - D I A L O G :
i
i  Raumdimension d
?  2
i  Ortsdiskretisierung N
?  9
i  Zeitdiskretisierung m
?  300
i  Runge-Kutta-Formel      explizite Euler-Methode      = 1
i                          implizite Euler-Methode      = 2
i                          explizite Mittelpunktsregel = 3
i                          implizite Mittelpunktsregel = 4
?  1
i  Indizes ip_1 ip_2 des Mess-Gitterpunktes x_ip:
i                          Beachte 1 <= ip_1, ip_2 <= 9
?  5 5
i  Index jp des Messzeitpunktes t_jp: Beachte 0 <= jp <= 300
?  300
i  Zeitinkrement: m_incr
?  30
p
p  I N F O S   U E B E R   D E N   L A U F E N D E N   P R O Z E S S :
p
p  Aktueller Zeitpunkt t   = 7200
o
o  E R G E B N I S :
o
o  Instationaeres Problem: explizite Euler-Methode
o
o  Schrittweiten: h = 0.1   tau = 24
o  Anzahl der Unbekannten: n = 81
o
o  Mess-Zeitpunkt:          t_jp = 7200   wurde erreicht!
```

```

o Mess-Gitterpunkt:      x_ip = (0.5,0.5)
o Loesung im Messpunkt: u_ip = 1.06066
o
o Rechenzeit: 0.01s
o
i P R O G R A M M - S T O P    =    1 :
? 1

```

Im zweiten Beispiel wird `heat.equation.exe` ausgeführt und es wird der Mess-Zeitpunkt nicht erreicht:

```

i
i E I N G A B E - D I A L O G :
i
i Raumdimension d
? 1
i Ortsdiskretisierung N
? 9
i Zeitdiskretisierung m
? 100
i Runge-Kutta-Formel      explizite Euler-Methode      = 1
i                          implizite Euler-Methode      = 2
i                          explizite Mittelpunktsregel = 3
i                          implizite Mittelpunktsregel = 4
? 3
i Index ip_1 des Mess-Gitterpunktes x_ip:
i          Beachte 1 <= ip_1 <= 9
? 5
i Index jp des Messzeitpunktes t_jp: Beachte 0 <= jp <= 100
? 100
i Zeitinkrement: m_incr
? 10
p
p I N F O S    U E B E R    D E N    L A U F E N D E N    P R O Z E S S :
p
p Aktueller Zeitpunkt t  = 792
o
o E R G E B N I S :
o
o Instationaeres Problem: explizite Mittelpunktsregel
o
o Schrittweiten: h = 0.1    tau = 72
o Anzahl der Unbekannten: n = 9

```

```

o
o Mess-Zeitpunkt: t_jp = 7200    wurde nicht erreicht!
o
o Rechenzeit: 0s
o
i P R O G R A M M - S T O P    =    1 :
? 1

```

Im dritten Beispiel wird `laplace_equation.exe` ausgeführt, also ein stationäres Problem gerechnet:

```

i
i E I N G A B E - D I A L O G :
i
i Raumdimension d
? 3
i Ortsdiskretisierung N
? 19
i Gleichungsloeser          Gauss                      = 1
i                           Gauss fuer Bandmatrizen     = 2
i                           Gradienten-Methode          = 3
i                           CG-Methode                  = 4
? 4
i Indizes ip_1 ip_2 ip_3 des Mess-Gitterpunktes x_ip:
i                           Beachte 1 <= ip_1, ip_2, ip_3 <= 19
? 5 5 5
p
p I N F O S    U E B E R    D E N    L A U F E N D E N    P R O Z E S S :
p
p CG-Methode: k = 25    res_k/res_0 = 6.46503e-07
o
o E R G E B N I S :
o
o Stationaeres Problem: CG-Methode
o
o Schrittweite: h = 0.05
o Anzahl der Unbekannten: n = 6859
o
o Mess-Gitterpunkt:      x_ip = (0.25,0.25,0.25)
o Loesung im Messpunkt: u_ip = 0.354281
o
o Rechenzeit: 0.01s

```

```
o
i P R O G R A M M - S T O P   =   1 :
? 1
```

2.3 Das Grafikpaket gnuplot

Laden Sie die für Ihr Betriebssystem geeignete Version von `gnuplot` herunter, extrahieren Sie alle Dateien.

Öffnen Sie (z.B. durch Mausklick) das Programm `wgnuplot.exe`. Es erscheint ein Fenster mit einem Eingabe-Prompt:

```
gnuplot>
```

Wechseln Sie zuerst das Arbeitsverzeichnis durch Eingabe des Befehls (nach dem Prompt)

```
gnuplot> cd '<directory-name>'
```

Dabei ist `<directory-name>` der Name jenes Verzeichnisses, in dem sich die Programme `laplace_equation.exe` und `heat_equation.exe` befinden.

Durch Eingabe des Befehls

```
gnuplot> load "xt.gnu"
```

werden in einem eigenen Fenster die Resultate der einzelnen Zeitschritte im Abstand von einer Sekunde grafisch dargestellt.

Für eindimensionale Probleme ($d = 1$) werden durch Eingabe des Befehls

```
gnuplot> plot "x.dat" with lines
```

oder

```
gnuplot> plot "x.dat" with linespoints
```

die Resultate im Mess-Zeitpunkt grafisch dargestellt.

Für zwei- und dreidimensionale Probleme ($d = 2, 3$) werden durch Eingabe des Befehls

```
gnuplot> splot "x.dat" with lines
```

oder

```
gnuplot> splot "x.dat" with linespoints
```

die Resultate im Mess-Zeitpunkt grafisch dargestellt.

Durch Eingabe des Befehls

```
gnuplot> plot "t.dat" with lines
```

oder

```
gnuplot> plot "t.dat" with linespoints
```

die Resultate im Mess-Gitterpunkt grafisch dargestellt.

Durch Eingabe des Befehls

```
gnuplot> exit
```

wird das Grafikprogramm geschlossen.

ACHTUNG: Anstelle von ... `with lines` ... bzw. ... `with linespoints` ... kann man auch kurz ... `w l` ... bzw. ... `w lp` ... schreiben.

Das Programm `heat_equation.exe` erzeugt bei jedem Durchlauf die Ausgabedateien `x.dat`, `t.dat` und `xt.gnu`. Kopiert man z.B. die Ausgabedatei `t.dat` nach einem ersten Durchlauf auf die Datei `t1.dat` und nach einem zweiten Durchlauf (mit anderen Eingabedaten) auf die Datei `t2.dat`, so lassen sich die beiden Ergebnisse durch den Befehl

```
gnuplot> plot "t1.dat" w lp, "t2.dat" w lp
```

gleichzeitig darstellen. Analoges gilt für die Datei `x.dat` und für die gleichzeitige Darstellung für mehr als zwei Dateien.

Durch Eingabe des Befehls (Setzung von Parametern)

```
gnuplot> a = 0.000109424; d = 1
```

und anschließend durch Eingabe des Befehls

```
gnuplot> plot "t.dat" w lp, (pi**2)/8 + (1./4**d-(pi**2)/8)*exp(-8*d*a*x)
```

lässt sich die Näherungslösung mit der exakten instationären Lösung im Spezialfall vergleichen.

Durch Eingabe des Befehls

```
gnuplot> plot "x.dat" w lp, sin(pi*x)
```

lässt sich die Näherungslösung mit der exakten Lösung des stationären Problems im ein-dimensionalen Fall vergleichen. Durch Eingabe des Befehls

```
gnuplot> splot "x.dat" w lp, sin(pi*x)*sin(pi*y)
```

lässt sich die Näherungslösung mit der exakten Lösung des stationären Problems im zwei- und dreidimensionalen Fall vergleichen.

3 Themenbereiche

Untersuchen Sie folgende Themenbereiche:

3.1 Der Diskretisierungsfehler bezüglich der Ortsvariablen x

Wie verhält sich der Diskretisierungsfehler für das stationäre Problem in Abhängigkeit der Ortsschrittweite h ?

Zum Beispiel: Wie verändert sich der Diskretisierungsfehler im Mess-Gitterpunkt, falls h sukzessive halbiert wird? Welche Vermutung der Form

$$u_{ip_1, ip_2, \dots, ip_d} - u(x_{ip_1, ip_2, \dots, ip_d}) = O(h^p)$$

erhält man daraus?

Es genügt, den Fall $d = 1$ zu untersuchen.

3.2 Der Diskretisierungsfehler der expliziten Euler-Methode bezüglich der Zeitvariablen t

Wie verhält sich der Diskretisierungsfehler der expliziten Euler-Methode für das instationäre Problem in Abhängigkeit der Zeitschrittweite τ für den Spezialfall $N = 1$?

Zum Beispiel: Wie verändert sich der Diskretisierungsfehler im Mess-Zeitpunkt, falls τ sukzessive halbiert wird? Welche Vermutung der Form

$$\underline{u}_h^{jp} - \underline{u}_h(t_{jp}) = O(\tau^q)$$

erhält man daraus?

Es genügt, den Fall $d = 1$ zu untersuchen.

3.3 Vergleich der Genauigkeit der verschiedenen Runge-Kutta-Methoden

Wie verhält sich der Diskretisierungsfehler der verschiedenen Runge-Kutta-Formeln für den Spezialfall $N = 1$?

Zum Beispiel: Führen Sie die explizite Euler-Methode mit einer bestimmten Schrittweite durch. Wie verhält sich der Fehler bei der gleichen Schrittweite für die explizite Mittelpunktsregel. Oder auch: Bei welcher Schrittweite erhält man für die explizite Mittelpunktsregel ungefähr den gleichen Diskretisierungsfehler wie bei der expliziten Euler-Methode?.

3.4 Stabilität der expliziten Runge-Kutta-Verfahren

Finden Sie experimentell eine Stabilitätsbedingung der Form

$$a\tau \leq C h^2.$$

Zum Beispiel: Verkleinern oder vergrößern Sie τ bei festem h und beobachten Sie, ob die Lösung beschränkt bleibt. Für die explizite Euler-Methode kann das Ergebnis mit der Analyse aus der Vorlesung im eindimensionalen Fall verglichen werden.

3.5 Stabilität der impliziten Runge-Kutta-Formeln

Gibt es ähnliche Stabilitätsprobleme wie bei den expliziten Runge-Kutta-Formeln?

3.6 Vergleich der Effizienz der direkten Methoden

Vergleichen Sie für das stationäre Problem das Verhalten der Rechenzeiten der direkten Verfahren in Abhängigkeit von n . Wie gut stimmen die Erkenntnisse mit der Analyse aus der Vorlesung überein?

Bestimmen Sie aus der Rechenzeit eine ungefähre MFLOPS-Rate für Ihren Rechner unter der Annahme dass das Gaußsche Verfahren ungefähr $n^3/3$ FLOPs benötigt.

3.7 Vergleich der Effizienz der iterativen Methoden

Vergleichen Sie für das stationäre Problem das Verhalten der Iterationszahlen und der Rechenzeiten der iterativen Verfahren in Abhängigkeit von n . Wie gut stimmen die Erkenntnisse mit der Analyse aus der Vorlesung überein?

3.8 Vergleich der Effizienz der direkten und iterativen Methoden

Geben Sie eine Rechenzeit vor und untersuchen Sie für das stationäre Problem, bis zu welcher Dimension die einzelnen Verfahren innerhalb dieser Rechenzeit ein Ergebnis liefern.

Ermitteln Sie das größte dreidimensionale Problem, das auf Ihrem Rechner in einer vernünftigen Zeit gelöst werden kann.

4 Beurteilung

Die Erkenntnisse zu den einzelnen Themenbereichen sind kurz, klar und nachvollziehbar schriftlich darzustellen. Beschreiben Sie jedenfalls genau den verwendeten Rechner (Modell, Prozessor, Prozessorleistung, Größe der Hauptspeichers) und das Betriebssystem.

Die positive Beurteilung der bearbeiteten Themenbereiche ist Voraussetzung zur Zulassung zu einer abschließenden mündlichen Prüfung.

Die Gesamtnote setzt sich zu

- zwei Drittel aus der Beurteilung der schriftlichen Ausarbeitung der Themenbereiche, und der Aussprache über diese Ausarbeitung im Rahmen der abschließenden mündlichen Prüfung und
- zu einem Drittel aus der Beurteilung der abschließenden mündlichen Prüfung über den gesamten Stoff der Lehrveranstaltung

zusammen.

Für eine positive Gesamtnote muss jeder Teil positiv absolviert werden. Der erste Teil ist positiv absolviert, falls mindestens 4 der 8 Themenbereiche erfolgreich bearbeitet werden. Dabei sind mindestens ein Themenbereich aus $\{3.1, 3.2, 3.3\}$, mindestens ein Themenbereich aus $\{3.4, 3.5\}$ und mindestens ein Themenbereich aus $\{3.6, 3.7, 3.8\}$ zu wählen. Durch die erfolgreiche Bearbeitung von mehr als 4 Themenbereichen verbessert sich die Note entsprechend.