# M A T H E M A T I K IV
# ÜBUNGEN ZUR NUMERIK FÜR MECHATRONIKER
WS 2009/2010

---

AUSGABETERMIN: Mittwoch, 13.1.2010

ABGABETERMIN: **Mittwoch, 17.2.2010, 12:00 Uhr**

NAME (**N-Z**):

MATRIKELNUMMER:

---

Die Übungen sind grundsätzlich alleine zu machen ! Gruppenarbeit ist nicht erlaubt ! Die Ausarbeitung muss sorgfältig abgefasst werden. Wichtig ist, dass nicht nur die Lösung, sondern auch die Lösungsidee (der Weg zur Lösung) beschrieben wird. Programme sind in Form von gut dokumentierten Programmlisten beizulegen. Testresultate sind durch Beilage übersichtlich gestalteter Original-inputs und Original-outputs zu belegen. Das Abgabeformat ist DIN A4. Heften Sie alle Unterlagen zu einem Übungsblatt zusammen !
Die Tutoren **Christian Irrgeher** und **Thomas Takacs** stehen Ihnen am Donnerstag von 12:00 Uhr – 13:30 Uhr ab der KW 43 im Raum KG 519 (Kopfgebäude, 5. Stock) für eventuell auftretende Fragen zur Verfügung.

---

# 4 Numerische Lösung von AWA

## 4.1 Konsistenzuntersuchungen

Verwendet man zur Berechnung des Integrals $\int_t^{t+\tau} f(s,u(s))\,ds$ die Mittelpunktsregel (Gauß 1) und approximiert $u(t+0.5\tau)$ mit dem impliziten Euler-Verfahren so erhält man die *implizite Mittelpunktsregel*:

$$u_{j+1} = u_j + \tau_j f(t_j + \frac{\tau_j}{2}, g_1) \tag{1}$$

$$g_1 = u_j + \frac{\tau_j}{2} f(t_j + \frac{\tau_j}{2}, g_1) \tag{2}$$

$j = 0,1,\ldots,m-1$, mit gegebenen AW $u_0$. Offenbar ist die implizite Mittelpunktsregel eine 1-stufige implizite Runge-Kutta-Formel. Geben Sie das Tableau an und bestimmen Sie durch Taylor-Entwicklung des lokalen Fehlers $d_\tau(t+\tau) = u(t+\tau) - u_\tau(t+\tau)$ die Konsistenzordnung der impliziten Mittelpunktsregel ?

## 4.2 Einfache numerische Experimente mit Runge-Kutta-Verfahren

Wir betrachten das Anfangswertproblem

$$\left.\begin{array}{rcl} u'(t) & = & -\,50\,(u(t) \,-\, \cos(k\pi t))\,, \quad t \in I \,=\, [0,1], \\ u(0) & = & 0\,, \end{array}\right\} \tag{3}$$

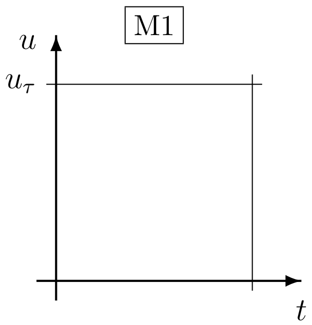
wobei $k$ die letzte Ziffer der Matrikelnummer ist.

a) Man bestimme die exakte Lösung von (3) analytisch !

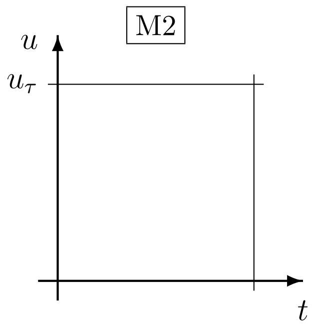
b) Man löse (3) mit den folgenden Runge-Kutta-Verfahren $\boxed{\text{Mx}}$ unter Verwendung der Schrittweiten $\tau \,=\, \frac{1}{20}\,,\ \frac{3}{80}\,,\ \frac{1}{30}\,,\ \frac{1}{40}\,;$

$\boxed{\text{M1}}$ Explizites Euler-Verfahren,
$\boxed{\text{M2}}$ Implizites Euler-Verfahren,
$\boxed{\text{M3}}$ Implizites Mittelpunktsregel.

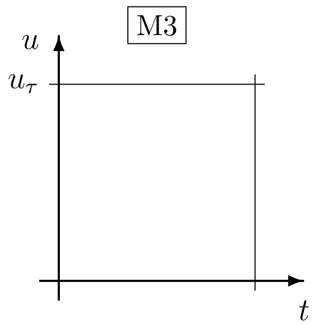
Man veranschauliche die Ergebnisse graphisch durch Vergleich der numerischen Lösungen für $\tau \,=\, \frac{1}{20}\,,\ \frac{3}{80}\,,\ \frac{1}{30}\,,\ \frac{1}{40}$ mit der analytischen Lösung :



Expliziter Euler



Impliziter Euler



Mittelpunktsregel

c) Man starte die explizite Eulermethode bei $t_0 \,=\, 1/2$ mit der exakten Lösung $u(t_0) \,=\, u(1/2)$ unter Verwendung der Schrittweite $\tau \,=\, 1/20$ und stelle das Resultat wieder im Vergleich mit der analytischen Lösung graphisch dar.
Ab welcher Schrittweite muß das Verfahren stabil werden ?

d) Lösen Sie (3) nochmals mit dem impliziten Euler-Verfahren und der Schrittweite $\tau \,=\, 1/(2+k)$. Stellen Sie das Resultat wieder im Vergleich mit der analytischen Lösung graphisch dar.

e) Man trage in die folgende Tabelle $\boxed{u_\tau(1)}$ als Approximation von $u(1) \,=\, \ldots$ für die betrachteten Verfahren $\boxed{\text{Mx}}$ ein :

| $\tau$ / Mx \ | $\longrightarrow$ 1/20 | 3/80 | 1/30 | 1/40 | $u(1)$ |
|---|---|---|---|---|---|
| M1 | | | | | |
| M2 | | | | | |
| M3 | | | | | |

## 4.3 Zusatzaufgabe (50 Zusatzpunkte)

### 4.3.1 2-stufige explizite Runge-Kutta-Verfahren (25 Zusatzpunkte)

2-stufige explizite Runge-Kutta-Verfahren sind durch das Tableau

$$\begin{array}{c|cc} 0 & & \\ c_2 & a_{21} & \\ \hline & b_1 & b_2 \end{array}$$

gegeben. Leiten Sie durch Taylor-Entwicklung des lokalen Fehlers $d_\tau(t+\tau) = u(t+\tau) - u_\tau(t+\tau)$ allgmeine Bedingungen für die Koefizienten $a_{21}$, $b_1$, $b_2$, $c_2$ her, die garantieren, dass die Runge-Kutta-Formel die Konsistenzordnung 2 hat ! Wählen Sie die Koeffizienten $b_1$, $b_2$ und $c_2$ für den Fall der reinen Integration $u'(t) = f(t)$ (d.h.$f_u$ ist identisch 0) so, dass der lokale Fehler bezüglich der Ordnung optimal wird !

### 4.3.2 Chemische Reaktionen (25 Zusatzpunkte)

Die *Robertson–Reaktion* wird durch das Dgl.-System

$$\boxed{\begin{array}{rcl} c_A'(t) &=& -0.04\, c_A(t) + 10^4\, c_B(t) c_C(t) \qquad , \\ c_B'(t) &=& 0.04\, c_A(t) - 3 \cdot 10^7\, c_B^2(t) - 10^4\, c_B(t) c_C(t) \qquad , \\ c_C'(t) &=& 3 \cdot 10^7\, c_B^2(t) \qquad , t \in [0,T]\ ,\ T = 0.3 \\ + \text{ AB :} & & c_A(0) = 1 \qquad c_B(0) = 0 \qquad c_C(0) = 0 \end{array}} \tag{4}$$

beschrieben. Aufgrund der Größenordnungsunterschiede in den Reaktionsgeschwindigkeitskoeffizienten ist zu erwarten, daß das Dgl.-System (4) steif ist. Lösen Sie die AWA (4) mit einem geeigneten Integrationsverfahren und stellen Sie den zeitlichen Verlauf der Konzentrationen $c_A(t)$, $c_B(t)$ und $c_C(t)$ (getrennt) grafisch dar !