

M A T H E M A T I K I V
ÜBUNGEN ZUR NUMERIK FÜR MECHATRONIKER
WS 2009/2010

AUSGABETERMIN: Mittwoch, 13.1.2010

ABGABETERMIN: **Mittwoch, 17.2.2010, 12:00 Uhr**

NAME (**A-M**):

MATRIKELNUMMER:

Die Übungen sind grundsätzlich alleine zu machen ! Gruppenarbeit ist nicht erlaubt ! Die Ausarbeitung muss sorgfältig abgefasst werden. Wichtig ist, dass nicht nur die Lösung, sondern auch die Lösungsidee (der Weg zur Lösung) beschrieben wird. Programme sind in Form von gut dokumentierten Programmlisten beizulegen. Testresultate sind durch Beilage übersichtlich gestalteter Original-inputs und Original-outputs zu belegen. Das Abgabeformat ist DIN A4. Heften Sie alle Unterlagen zu einem Übungsblatt zusammen !

Die Tutoren **Christian Irrgeher** und **Thomas Takacs** stehen Ihnen am Donnerstag von 12:00 Uhr – 13:30 Uhr ab der KW 43 im Raum KG 519 (Kopfgebäude, 5. Stock) für eventuell auftretende Fragen zur Verfügung.

4 Numerische Lösung von AWA

4.1 Konsistenzuntersuchungen

Verwendet man zur Berechnung des Integrals $\int_t^{t+\tau} f(s, u(s)) ds$ die Trapezregel und approximiert $u(t + \tau)$ mit dem Eulerschen Polygonzugverfahren (expliziten Euler) so erhält man das *Verfahren von Heun*:

$$u_{j+1} = u_j + \frac{\tau_j}{2} [f(t_j, u_j) + f(t_j + \tau_j, u_j + \tau_j f(t_j, u_j))] \quad (1)$$

$j = 0, 1, \dots, m - 1$, mit gegebenen AW u_0 . Offenbar ist das Verfahren von Heun eine 2-stufige explizite Runge-Kutta-Formel. Geben Sie das Tableau an und bestimmen Sie durch Taylor-Entwicklung des lokalen Fehlers $d_\tau(t + \tau) = u(t + \tau) - u_\tau(t + \tau)$ die Konsistenzordnung des Verfahrens von Heun ?

4.2 Einfache numerische Experimente mit Runge-Kutta-Verfahren

Wir betrachten das Anfangswertproblem

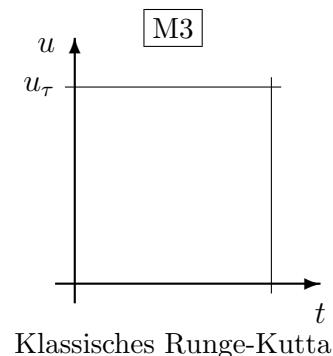
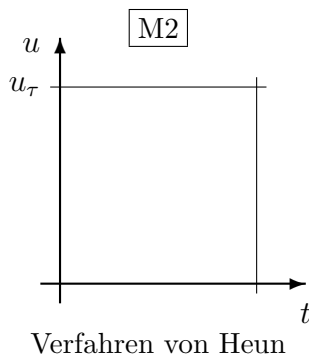
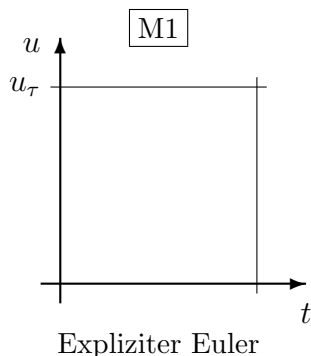
$$\left. \begin{aligned} u'(t) &= -10(k+1)(u + e^{10(k+1)} - 1) \quad , \quad t \in I = [0, 1], \\ u(0) &= 0, \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

wobei k die letzte Ziffer der Matrikelnummer ist.

- a) Man bestimme die exakte Lösung von (2) analytisch !
- b) Man löse (2) mit den folgenden expliziten Runge-Kutta-Verfahren $\boxed{\text{Mx}}$ unter Verwendung der Schrittweiten $\tau = \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}, \frac{1}{32}$ und $\frac{1}{64}$;

- $\boxed{\text{M1}}$ Explizites Euler-Verfahren,
 $\boxed{\text{M2}}$ Verfahren von Heun,
 $\boxed{\text{M3}}$ „klassisches“ Runge-Kutta-Verfahren der Ordnung 4.

Man veranschauliche die Ergebnisse graphisch durch Vergleich der numerischen Lösungen für $\tau = \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}, \frac{1}{32}$ und $\frac{1}{64}$ mit der analytischen Lösung :



- c) Man trage in die folgende Tabelle $\boxed{u_\tau(1)}$ als Approximation von $u(1) = \dots$ für die betrachteten Verfahren $\boxed{\text{Mx}}$ ein :

Mx \	τ	$\longrightarrow$					$u(1)$
		1/4	1/8	1/16	1/32	1/64	
M1	(*)						
	(E)					—	
M2	(*)						
	(E)					—	
M3	(*)						
	(E)					—	

- wobei (*) = ursprüngliches Verfahren
 (E) = Verbesserung der Werte durch globale Extrapolation nach der Formel

$$\hat{u}_\tau(t) = u_{\tau/2}(t) + \frac{u_{\tau/2}(t) - u_\tau(t)}{2p - 1}$$

mit p = Konsistenzordnung des Verfahrens.

4.3 Zusatzaufgabe (50 Zusatzpunkte)

4.3.1 2-stufige explizite Runge-Kutta-Verfahren (25 Zusatzpunkte)

2-stufige explizite Runge-Kutta-Verfahren sind durch das Tableau

$$\begin{array}{c|cc} 0 & & \\ c_2 & a_{21} & \\ \hline & b_1 & b_2 \end{array}$$

gegeben. Leiten Sie durch Taylor-Entwicklung des lokalen Fehlers $d_\tau(t + \tau) = u(t + \tau) - u_\tau(t + \tau)$ allgemeine Bedingungen für die Koeffizienten a_{21} , b_1 , b_2 , c_2 her, die garantieren, dass die Runge-Kutta-Formel die Konsistenzordnung 2 hat ! Gibt es 2-stufige explizite Runge-Kutta-Verfahren der Konsistenzordnung 3 ?

4.3.2 Satellitenbahnberechnung (25 Zusatzpunkte)

Die Bahn eines Satelliten in der Ebene des Erde-Mond-Systems lässt sich durch das folgende System von Dgl. 2. Ordnung beschreiben:

$$\begin{aligned} y_1'' &= y_1 + 2y_2' - (1 - \mu) \frac{y_1 + \mu}{D_1} - \mu \frac{y_1 - (1 - \mu)}{D_2} , \\ y_2'' &= y_2 - 2y_1' - (1 - \mu) \frac{y_2}{D_1} - \mu \frac{y_2}{D_2} , t \in [0, T] , \\ + \text{ AB : } \quad y_1(0) &= 0.994 \\ y_1'(0) &= 0 \\ y_2(0) &= 0 \\ y_2'(0) &= -2.001\,585\,106\,379\,082\,522\,405\,378\,622\,24 , \\ \text{mit } D_1 &= [(y_1 + \mu)^2 + y_2^2]^{3/2} , \\ D_2 &= [(y_1 - (1 - \mu))^2 + y_2^2]^{3/2} , \\ \mu &= 0.012277471 \end{aligned} \tag{3}$$

Für diese Daten ergibt sich eine periodische Lösung mit der Periode

$$t_{per} = t = \underline{17.065\,216\,560\,157\,962\,558\,891\,720\,6249} .$$

- 1) Man überführe (3) in eine äquivalente AWA für ein System gewöhnlicher Dgl. 1. Ordnung !
- 2) Man löse dieses System numerisch mit den folgenden Integrationsverfahren :

M1 Klassisches Runge-Kutta-Verfahren mit dem Tableau

0				
1/2	1/2			
1/2	0	1/2		
1	0	0	1	
	1/6	1/3	1/3	1/6

mit $\tau = T/m$, $m = 6000$ und $m = ?$ (eigene Wahl).

M2 Verfahren eigener Wahl !

- 3) Man stelle die Lösungstrajektoren $(y_{1\tau}(t), y_{2\tau}(t))$, $t \in I_\tau = \{t_0, t_1, \dots, t_m\}$, linear interpoliert, grafisch dar !

