M A T H E M A T I K IV
ÜBUNGEN ZUR NUMERIK FÜR MECHATRONIKER
WS 2009/2010

AUSGABETERMIN: Mittwoch, 09.12.2009

ABGABETERMIN: **Mittwoch, 20.1.2010, 12:00 Uhr**

NAME (**A-M**):

MATRIKELNUMMER:

Die Übungen sind grundsätzlich alleine zu machen ! Gruppenarbeit ist nicht erlaubt ! Die Ausarbeitung muss sorgfältig abgefasst werden. Wichtig ist, dass nicht nur die Lösung, sondern auch die Lösungsidee (der Weg zur Lösung) beschrieben wird. Programme sind in Form von gut dokumentierten Programmlisten beizulegen. Testresultate sind durch Beilage übersichtlich gestalteter Original-inputs und Original-outputs zu belegen. Das Abgabeformat ist DIN A4. Heften Sie alle Unterlagen zu einem Übungsblatt zusammen !
Die Tutoren **Christian Irrgeher** und **Thomas Takacs** stehen Ihnen am Donnerstag von 12:00 Uhr – 13:30 Uhr ab der KW 43 im Raum KG 519 (Kopfgebäude, 5. Stock) für eventuell auftretende Fragen zur Verfügung.

---

3 Numerische Lösung von 1D RWA mit der FEM

3.1 Variationsformulierung

Schreiben Sie die Variationsformulierung in der Form

$$\begin{aligned}
&\text{Ges. } u \in \mathbf{V}_g : a(u,v) = \langle F, v \rangle \quad \forall\, v \in \mathbf{V}_0, && (1)\\
&\text{d.h.}\ \ \mathbf{V}_g = ?\\
&\qquad\ \ \mathbf{V}_0 = ?\\
&\qquad\ \ a(u,v) = ?\\
&\qquad\ \ \langle F, v \rangle = ?
\end{aligned}$$

der eindimensionalen (1D) Randwertaufgabe (RWA)

$$-(\lambda u'(x))' + c\rho w u'(x) + \alpha u(x) = f(x),\ \ x \in (a,b),$$

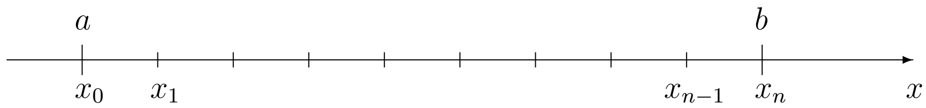
mit den Randbedingungen (RB)

$$u(a) = u_a \ \text{ und } \ u(b) = u_b$$

auf ! Zeigen Sie, daß die Bilinearform $a(\cdot,\cdot)$ $\mathbf{V}_0$–elliptisch und $\mathbf{V}_0$–beschränkt ist, falls λ, c, ρ = const. > 0, α = const. ≥ 0 und $w = 0$ sind !

3.2 Programmierbeispiel

Schreiben und implementieren Sie ein FE–Programm zur numerischen Lösung von (1) mit konstanten Koeffizienten λ, c, ρ, w, α unter Verwendung linearer Elemente auf einer gleichmäßigen Vernetzung mit n Elementen.



Eingangsdaten: λ, c, ρ, w, α, $f(x)$ und RB (1., 2., 3. Art) für $x = a$ und $x = b$.

Ausgabedaten: a) Tabelle: x_i, u_i $\quad(\approx u(x_i))$
b) Grafik (falls möglich)

3.3 Testbeispiele

Lösen Sie mit Ihrem FE–Programm die 1D RWA (1) mit folgenden Daten:

$$\begin{aligned}
&a = 0,\;\; b = 1,\\
&\lambda = 1,\\
&c = 1,\;\; \rho = 1,\\
&w = -(l+1)\cdot 10,\;\; \text{wobei } l := \text{letzte Ziffer der Matrikelnummer},\\
&\alpha = 0,\\
&f = 0,\\
&u(0) = 1,\;\; u(1) = 0.
\end{aligned}$$

Testen Sie mit verschiedenen n, und vergrößern Sie n so lange, bis Sie eine „zufriedenstellende“ Lösung erhalten ! Finden Sie das kleinste n, das physikalisch sinnvolle Lösungen liefert !

3.4 Zusatzaufgabe (25 Zusatzpunkte)

Lösen Sie die RWA aus Punkt 3.2 analytisch ! Berechnen Sie den relativen Fehler

$$e_{\text{rel}} := \frac{\max\limits_{i=\overline{0,n}} |u(x_i) - u_h(x_i)|}{\max\limits_{j=\overline{0,n}} |u(x_i)|}\,,$$

in der (diskreten) Maximumnorm, wobei $u(x)$ die analytisch berechnete exakte Lösung der RWA und $u_i = u_h(x_i)$, $i = \overline{0,n}$ die mit dem FE–Programm berechnete FE–Näherungslösung sind. Stellen Sie den relativen Fehler e_{rel} in Abhängigkeit von n (bzw. $h = (b-a)/n = 1/n$) in einer Tabelle oder grafisch dar !