M A T H E M A T I K IV
ÜBUNGEN ZUR NUMERIK FÜR MECHATRONIKER
WS 2009/2010

AUSGABETERMIN: Mittwoch, 11.11.2009

ABGABETERMIN: **Mittwoch, 16.12.2009, 12:00 Uhr**

NAME (**N-Z**):

MATRIKELNUMMER:

Die Übungen sind grundsätzlich alleine zu machen ! Gruppenarbeit ist nicht erlaubt ! Die Ausarbeitung muss sorgfältig abgefasst werden. Wichtig ist, dass nicht nur die Lösung, sondern auch die Lösungsidee (der Weg zur Lösung) beschrieben wird. Programme sind in Form von gut dokumentierten Programmlisten beizulegen. Testresultate sind durch Beilage übersichtlich gestalteter Original-inputs und Original-outputs zu belegen. Das Abgabeformat ist DIN A4. Heften Sie alle Unterlagen zu einem Übungsblatt zusammen !
Die Tutoren **Christian Irrgeher** und **Thomas Takacs** stehen Ihnen am Donnerstag von 12:00 Uhr – 13:30 Uhr ab der KW 43 im Raum KG 519 (Kopfgebäude, 5. Stock) für eventuell auftretende Fragen zur Verfügung.

---

2 Auflösung tridiagonaler Gleichungssysteme

2.1 Programmierbeispiel

Implementieren Sie das in der Vorlesung vorgestellte Verfahren zur Auflösung tridiagonaler Gleichungssysteme (GS) $K\underline{u} = \underline{f}$,

$$\begin{bmatrix} c_1 & -b_1 & & & \\ -a_2 & c_2 & -b_2 & & \mathbf{O} \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ \mathbf{O} & & -a_{n-1} & c_{n-1} & -b_{n-1} \\ & & & -a_n & c_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_{n-1} \\ u_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ \vdots \\ f_{n-1} \\ f_n \end{bmatrix}, \qquad (1)$$

in einer von Ihnen gewählten Programmiersprache. Eingangsdaten (INPUT) sind die Dimension n und die Koeffizienten der Systemmatrix K und der rechten Seite $\underline{f}$. Ausgangsdaten (OUTPUT) sind die Komponenten des Lösungsvektors $\underline{u}$!

2.2 Testbeispiel

Analog zur Vorlesung (Punkt 2.2) betrachten wir jetzt das stationäre, eindimensionale Wärmeleitproblem

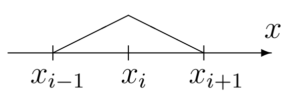
$$
\boxed{
\begin{aligned}
&-u''(x) = f(x) := 1 \quad \forall\, x \in (a,b) := (0,1),\\
&\text{RB:}\quad u(0) = g_a := 1,\\
&\phantom{\text{RB:}\quad} u(1) = g_b := 4,
\end{aligned}
}
$$

Die FE–Diskretisierung mit linearen Elementen auf gleichmäßigem Gitter mit der Schrittweite $h = 1/n$ führt auf das GS (überprüfen Sie das !)

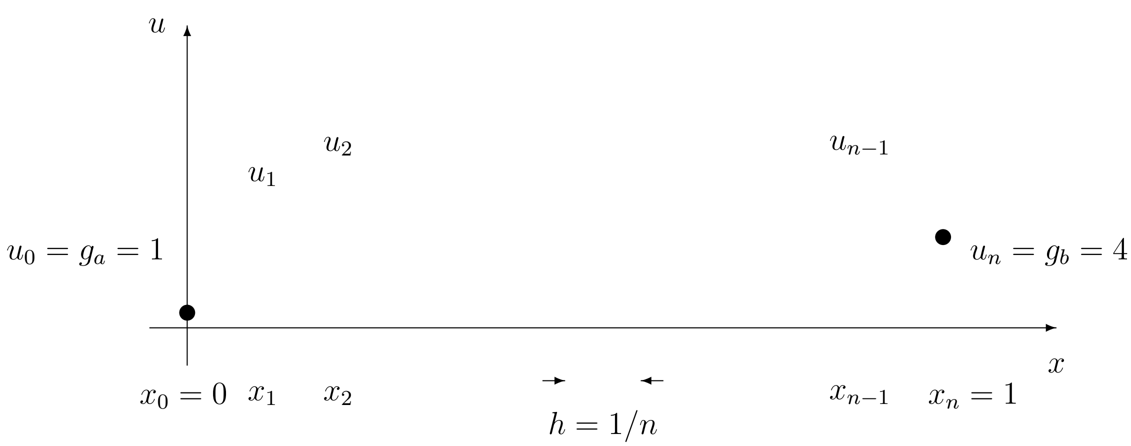
$$
\frac{1}{h}
\begin{bmatrix}
2 & -1 & & \\
-1 & 2 & -1 & \mathbf{O} \\
 & \ddots & \ddots & \ddots \\
\mathbf{O} & -1 & 2 & -1 \\
 & & -1 & 2
\end{bmatrix}
\begin{bmatrix}
u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_{n-2} \\ u_{n-1}
\end{bmatrix}
=
\begin{bmatrix}
\tilde{f}_1 + \frac{1}{h} g_a \\ \tilde{f}_2 \\ \vdots \\ \tilde{f}_{n-2} \\ \tilde{f}_{n-1} + \frac{1}{h} g_b
\end{bmatrix}
\tag{2}
$$

mit $g_a = 1$, $g_b = 4$, $\tilde{f}_i := h \quad \forall\, i = \overline{1, n-1}$, $h = 1/n$.
Lösen Sie das GS (2) für $n = 100$ und $n = 1000$, d.h. für $h = (b-a)/n = 1/n = 10^{-2}$ und $h = 10^{-3}$. Stellen Sie die FE–Näherungslösung

$$
u_h(x) = g_a \varphi_0(x) + \sum_{i=1}^{n-1} u_i \varphi_i(x) + g_b \varphi_n(x),
$$

mit $\varphi_i(x) =$ 

(stückweise lineare Ansatzfunktionen) grafisch dar, d.h.



Lösen Sie die Randwertaufgabe analytisch und geben Sie den maximalen Fehler

$$
\max_{i=0,1,\ldots,n} |u(x_i) - u_h(x_i)|
$$

in den Gitterpunkten für $h = 10^{-2}$ und $h = 10^{-3}$ an !

2.3 Überprüfung der Durchführbarkeits- und Stabilitätsbedingungen entsprechend Satz 2.6

Überprüfen Sie die Durchführbarkeits- und Stabilitätsbedingungen entsprechend Satz 2.6 für die folgenden beiden Matrizen:

a) Systemmatrix des GS (2);

b) Parameterabhängige (a, τ, h)–Matrix

$$K = \begin{bmatrix} c & -b & & \\ -b & c & -b & \mathbf{O} \\ & \ddots & \ddots & \ddots \\ \mathbf{O} & -b & c & -b \\ & & -b & c \end{bmatrix}_{(n-1)\times(n-1)}$$

mit $c = 1 + 2\,a^2\,\tau^2/h^2$ und $b = a^2\,\tau^2/h^2$, sowie $\tau \equiv \Delta t$, $h \equiv \Delta x$, $a > 0$, $\sigma \in [0, 1]$.

2.4 Fakultative Zusatzaufgabe: Implizite Zeitintegrationsschemata (25 Zusatzpunkte)

Man löse die Schwingungsprobleme aus der Übung 1 mit dem rein impliziten Schema:

$$\begin{cases} \dfrac{u_i^{j+1} - 2u_i^j + u_i^{j-1}}{\Delta t^2} - a^2 \dfrac{u_{i+1}^{j+1} - 2u_i^{j+1} + j_{i-1}^{j+1}}{\Delta x^2} = 0,\ i = \overline{1, n-1},\ j = \overline{1, m-1} \\ \underline{RB:}\ u_0^j = u(0, t_j) := 0,\ u_n^j = u(1, t_j) := 0,\ j = 1, \ldots, m \\ \underline{AB:}\ u_i^0 = u_0(x_i),\ i = 0, 1, \ldots, n, \\ \qquad u_i^1 = u_i^0 + \Delta t\, u_1(x_i),\ i = 0, 1, \ldots, n. \end{cases} \tag{3}$$

Wählen Sie die Ortsschrittwerte Δx und die Zeitschrittwerte Δt geeignet. (vgl. Übung 1). In (3) ist auf jedem Zeitschritt zur Bestimmung der $[u_i^{j+1}]_{i=\overline{1,n-1}}$ ein tridiagonales, lineares Gleichungssystem zu lösen. Benutzen Sie dazu das von Ihnen unter Punkt 2.1 programmierte Verfahren.