M A T H E M A T I K IV
ÜBUNGEN ZUR NUMERIK FÜR MECHATRONIKER
WS 2008/2009

AUSGABETERMIN: Mittwoch, 10.12.2008

ABGABETERMIN: **Mittwoch, 07.1.2009, 12:00 Uhr**

NAME (**A-M**):

MATRIKELNUMMER:

Die Übungen sind grundsätzlich alleine zu machen ! Gruppenarbeit ist nicht erlaubt ! Die Ausarbeitung muss sorgfältig abgefasst werden. Wichtig ist, dass nicht nur die Lösung, sondern auch die Lösungsidee (der Weg zur Lösung) beschrieben wird. Programme sind in Form von gut dokumentierten Programmlisten beizulegen. Testresultate sind durch Beilage übersichtlich gestalteter Original-inputs und Original-outputs zu belegen. Das Abgabeformat ist DIN A4. Heften Sie alle Unterlagen zu einem Übungsblatt zusammen !
Die Tutoren **Christian Irrgeher** (ungerade KW: A-M) und **Markus Kollmann** (gerade KW: N-Z) stehen Ihnen am Donnerstag von 12:00 Uhr – 12:45 Uhr und am Freitag von 10:00 Uhr – 10:45 Uhr ab der KW 43 im Raum KG 519 (Kopfgebäude, 5. Stock) für eventuell auftretende Fragen zur Verfügung.

---

3 Numerische Lösung von 1D RWA mit der FEM

3.1 Variationsformulierung

Schreiben Sie die Variationsformulierung der eindimensionalen (1D) Randwertaufgabe (RWA)

$$-(\lambda u'(x))' + c\rho w u'(x) + \alpha u(x) = f(x) + f_p\,\delta(x-y),\;\; x \in (a,b),$$

mit den Randbedingungen (RB) $u(a) = g_a$ und $-\lambda(b)u'(b) = \alpha_b(u(b) - g_b)$ in der Form

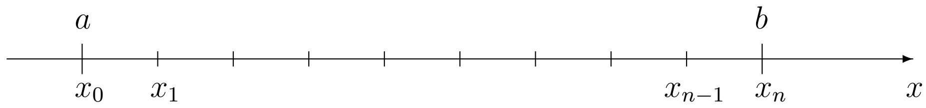
$$\text{Ges. } u \in \mathbf{V}_g : a(u,v) = < F, v > \quad \forall\, v \in \mathbf{V}_0, \tag{1}$$

$$\text{d.h. } \mathbf{V}_g = ?\;\; \mathbf{V}_0 = ?\;\; a(u,v) = ?\quad < F, v > = ?$$

auf, wobei λ, c, ρ gegebene positive Konstanten sind, α, α_b gegebene nichtnegative Konstanten sind, $w, f_p, g_a, g_b \in R$ ebenfalls gegebene, aber beliebige Konstanten sind, $f \in L_2(a,b)$ und $y \in (a,b)$ ebenfalls gegebene Daten der RWA sind. Zeigen Sie, dass die Linearform $< F, \cdot >$ $\mathbf{V}_0$–beschränkt ist, falls $f \in L_2(a,b)$, und dass die Bilinearform $a(\cdot,\cdot)$ $\mathbf{V}_0$–elliptisch und $\mathbf{V}_0$–beschränkt ist, falls λ, c, ρ = const. > 0, α = const. ≥ 0, $\alpha_b \geq 0$, $g_a = 0$ und $w = const. > 0$ sind !

3.2 Programmierbeispiel

Schreiben und implementieren Sie ein FE–Programm zur numerischen Lösung von (1) mit konstanten Koeffizienten λ, c, ρ, w, α unter Verwendung linearer Elemente auf einer gleichmäßigen Vernetzung mit n Elementen.



Eingangsdaten: λ, c, ρ, w, α, f_p, y, $f(x), a, b$ und RB (1., 2., 3. Art) für $x = a$ und $x = b$ sowie n.

Ausgabedaten: a) Tabelle: x_i, u_i $\quad (\approx u(x_i))$
b) Grafik (falls möglich)

3.3 Testbeispiele

Lösen Sie mit Ihrem FE–Programm die 1D RWA (1) mit folgenden Daten:

$a = 0,\ \ b = 1,$
$\lambda = 1,$
$c = 1,\ \ \rho = 1,$
$w = (k + 1) \cdot 10,$ wobei $k :=$ letzte Ziffer der Matrikelnummer,
$\alpha = 0,$
$f = 1, f_p = -1, y = 0.5,$
$g_a = 0,\ \ g_b = 1,\ \ \alpha_b = 10^6.$

Testen Sie mit verschiedenen (geraden) n, und vergrößern Sie n so lange, bis Sie eine „zufriedenstellende" Lösung erhalten ! Finden Sie das kleinste n, das physikalisch sinnvolle Lösungen liefert !

3.4 Zusatzaufgabe (25 Zusatzpunkte)

Berechnen Sie das Integral

$$I = \int_0^1 \sin(k\pi x)\, e^x\, dx$$

näherungsweise durch die zusammengesetzte (= summierte = verallgemeinerte) Trapezregel I_n^{TR} und durch die zusammengesetzte Simpsonregel I_n^{SR} für $n = 1, 2, 4, 8, 16, 32$ und 64. Vergleichen Sie die absoluten Fehler $|I - I_n|$. Wie groß müssen Sie n wählen, damit die relativen Fehler $|I - I_n|/|I_n| \leq 10^{-4}$ sind !