M A T H E M A T I K IV
ÜBUNGEN ZUR NUMERIK FÜR MECHATRONIKER
WS 2008/2009

AUSGABETERMIN: Mittwoch, d. 15.10.2008

ABGABETERMIN: **Dienstag, d. 11.11.2008, 12:00 Uhr**

NAME (**N-Z**):

MATRIKELNUMMER:

Die Übungen sind grundsätzlich alleine zu machen ! Gruppenarbeit ist nicht erlaubt ! Die Ausarbeitung muss sorgfältig abgefasst werden. Wichtig ist, dass nicht nur die Lösung, sondern auch die Lösungsidee (der Weg zur Lösung) beschrieben wird. Programme sind in Form von gut dokumentierten Programmlisten beizulegen. Testresultate sind durch Beilage übersichtlich gestalteter Original-inputs und Original-outputs zu belegen. Das Abgabeformat ist DIN A4. Heften Sie alle Unterlagen zu einem Übungsblatt zusammen !
Die Tutoren **Christian Irrgeher** (ungerade KW: A-M) und **Markus Kollmann** (gerade KW: N-Z) stehen Ihnen am Donnerstag von 12:00 Uhr – 12:45 Uhr und am Freitag von 10:00 Uhr – 10:45 Uhr ab der KW 43 im Raum KG 519 (Kopfgebäude, 5. Stock) für eventuell auftretende Fragen zur Verfügung.

---

1 Simulation der gedämpften Schwingungen einer fest eingespannten Saite mittels Differenzenapproximationen

1.1 Programmierbeispiel

Die mathematische Modellierung gedämpfter Schwingungen einer fest eingespannten Saite der Länge $L = 1$ führt unter Annahme kleiner Auslenkungen auf die Anfangsrandwertaufgabe (ARWA)

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + k\,\frac{\partial u}{\partial t} - a^2\,\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = f\,(x,t), \;\; x \in (0,1), \;\; t \in (0,t_E), \tag{1}$$

$$\begin{aligned} &\underline{\text{AB:}}\;\; u\,(x,0) &&= u_0\,(x), \quad x \in [0,1],\\ &\qquad \frac{\partial\, u}{\partial\, t}\,(x,0) &&= u_1\,(x), \quad x \in [0,1],\\ &\underline{\text{RB:}}\;\; u\,(0,t) = u\,(1,t) = 0, \;\; t \in (0,t_E]. \end{aligned}$$

Führen Sie eine Computersimulation dieses Schwingungsvorganges mit folgenden gegebenen Daten durch:

$$t_E = 1, a = 1, \quad f\,(x,t) = 0 \quad \forall\,(x,t) \in Q = (0,1) \times (0,t_E), \tag{2}$$

$$u_1\,(x) = 0 \quad \forall\, x \in [0,1],$$

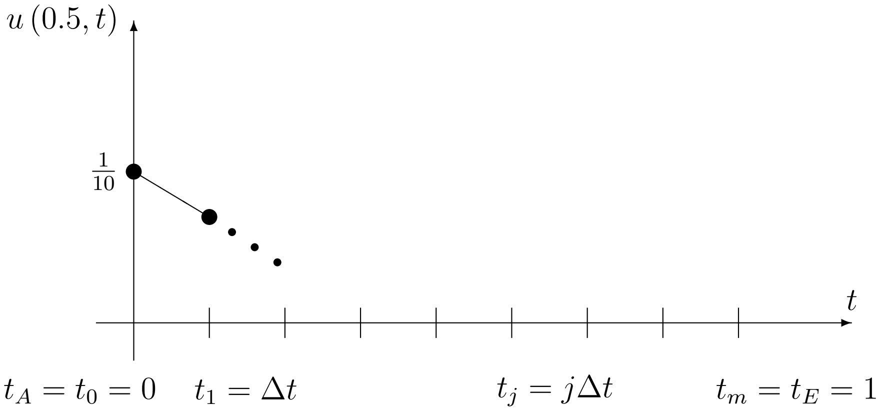
$$u_0\,(x) = \left\{ \begin{array}{ll} \frac{1}{10}\,x & , x \in [0,0.5] \\ \frac{1}{10}\,(1-x), & x \in [0.5,1] \end{array} \right\}, \text{falls } k \in \{0,2,4,6,8\},$$

$$u_0\,(x) = \left\{ \begin{array}{c} x - 0.3,\, x \in [0.3,0.5] \\ 0.7 - x,\, x \in [0.5,0.7] \\ 0 \quad , \quad \text{sonst} \end{array} \right\}, \text{falls } k \in \{1,3,5,7,9\},$$

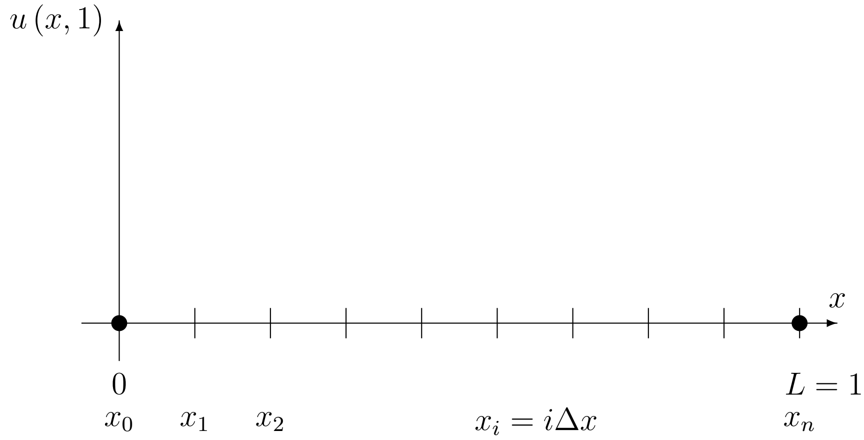
und für alle Studenten die Anfangsbedingungen
$u_0\,(x) = \frac{1}{10}\,\sin \pi x \quad (\forall\, k)$,
wobei $k :=$ letzte Ziffer der Matrikelnummer.

Stellen Sie

a) die Schwingung $u\,(0.5,t)$ im Saitenmittelpunkt $x = 0.5$:



b) und die Schwingung $u\,(x,1)$ zum Zeitpunkt $t_* = t_E = 1$:



graphisch dar.

Wählen Sie zur Orts– und Zeitdiskretisierung das in der Vorlesung (Kapitel 1) angegebene explizite Differenzenschema (8) mit einer geeigneten Diskretisierung des Dämpfungsterms (= Term mit der ersten Zeitableitung), schreiben Sie den dazugehörigen Algorithmus auf und implementieren Sie dann den Algorithmus in einer von Ihnen gewählten Programmiersprache !

Führen Sie die Computersimulation mit der Ortsschrittweite $h = \Delta x = 0.01$ und mit zwei von Ihnen gewählten Zeitschrittweiten $\tau = \Delta t \leq 0.01$ durch ! Interpretieren Sie die erhaltenen Ergebnisse.

1.2 Approximationsuntersuchung

Untersuchen Sie die Genauigkeit der Approximationen

a) des Differentialausdrucks (ohne Dämpfung)

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\,(x_i, t_j) - a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\,(x_i, t_j)$$

durch den Differenzenausdruck

$$\frac{1}{\Delta t^2}\,(u(x_i, t_{j+1}) - 2u(x_i, t_j) + u(x_i, t_{j-1})) - a^2 \frac{1}{\Delta x^2}\,(u(x_{i-1}, t_j) - 2u(x_i, t_j) + u(x_{i+1}, t_j)),$$

d.h. schätzen Sie den Approximationsfehler

$$\Bigg| \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\,(x_i, t_j) - a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\,(x_i, t_j) - \left[\frac{u(x_i, t_{j+1}) - 2u(x_i, t_j) + u(x_i, t_{j-1})}{\Delta t^2} - a^2 \frac{u(x_{i-1}, t_j) - 2u(x_i, t_j) + u(x_{i+1}, t_j)}{\Delta x^2} \right] \Bigg| \leq ?$$

für alle $i \in \{1, 2, \ldots, n-1\}$ und $j \in \{1, 2, \ldots, m-1\}$ ab,

b) und der Anfangsbedingungen $|u\,(x_i, t_1) - (u_0(x_i) + \Delta t \cdot u_1(x_i))| \leq$? $\qquad (t_1 = \Delta t)$

mittels Taylorentwicklung !