5. Eigenwertprobleme

1. Sei
$$A = \begin{pmatrix} -1 & -2 & 8 \\ -3 & 0 & 8 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

   (a) Approximieren Sie den *betragsgrößten* Eigenwert der Matrix A und den zugehörigen Eigenvektor, indem Sie 5 Schritte der Vektoriteration mit dem Startvektor $\underline{x}^1 = (1,1,1)^\top$ ausführen und zur Eigenwertbestimmung den Rayleigh-Quotienten benutzen!

   (b) Approximieren Sie den *betragskleinsten* Eigenwert der Matrix A und den zugehörigen Eigenvektor, indem Sie 5 Schritte der Vektoriteration *für die inverse Matrix* (Inverse Iteration) mit dem Startvektor $\underline{x}^1 = (1,1,1)^\top$ ausführen und zur Eigenwertbestimmung den Rayleigh-Quotienten benutzen!

   (c) Approximieren Sie einen Eigenwert der Matrix A und den zugehörigen Eigenvektor, indem Sie 5 Schritte der Vektoriteration mit der Matrix $A - I$ und dem Startvektor $\underline{x}^1 = (1,1,1)^T$ ausführen!

   (d) Der fehlende dritte Eigenwert ist $\lambda = 2$. Geben Sie für die Matrix A in Abhängigkeit von μ an, welchen Eigenwert man mit Hilfe der Vektoriteration (Inversen Vektoriteration) erhält!
   Approximieren Sie den fehlenden dritten Eigenwert der Matrix A und den zugehörigen Eigenvektor, indem Sie 5 Schritte der (Inversen) Vektoriteration mit dem Startvektor $\underline{x}^1 = (1,1,1)^\top$ ausführen! Verschieben Sie zu diesem Zweck das Spektrum geeignet! Interpretieren Sie das Ergebnis!

   (e) Kann man den *betragskleinsten* Eigenwert der Matrix A durch Vektoriteration *mit der Matrix* A (geeignet spektralverschoben) erhalten?

2. Man berechne mittels Vektoriteration (20 Iterationen) den größten Eigenwert der Matrix
$$T_n = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 & 0 & \vdots \\ \vdots & 0 & & \ddots & & 0 \\ 0 & \dots & 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & \dots & 0 & 0 & -1 & 2 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{n,n}$$
   für $n = 4, 8, 16, 32, 64$. Man vergleiche das Resultat mit dem exakten Ergebnis (vgl. Übung1).

3. Let $A \in \mathbb{C}^{n,n}$ be a block triangular matrix:
$$A = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ \mathbf{0} & A_{22} \end{bmatrix}$$
   where $A_{11} \in \mathbb{C}^{j,j}$ and $A_{22} \in \mathbb{C}^{k,k}$, $j + k = n$.

   (a) Let λ be an eigenvalue of A_{11} with eigenvector v. Show that there exists a $w \in \mathbb{C}^k$ such that $\begin{bmatrix} v \\ w \end{bmatrix}$ is an eigenvector of A with associated eigenvalue λ.

   (b) Let λ be an eigenvalue of A_{22} with eigenvector w, and suppose λ is not also an eigenvalue of A_{11}. Show that there is a unique $v \in \mathbb{C}^j$ such that $\begin{bmatrix} v \\ w \end{bmatrix}$ is an eigenvector of A with associated eigenvalue λ.

   (c) Let λ be an eigenvalue of A with associated eigenvector $\begin{bmatrix} v \\ w \end{bmatrix}$. Show that either w is an eigenvector of A_{22} with associated eigenvalue λ or v is an eigenvector of A_{11} with associated eigenvalue λ. (Hint: Either $w \neq \mathbf{0}$ or $w = \mathbf{0}$).

   (d) Combining parts 3a, 3b, and 3c, show that λ is an eigenvalue of A if and only if λ is an eigenvalue of A_{11} or A_{22}.