2. Gleichungssysteme-iterative Verfahren

1. Gegeben sei das Gleichungssystem

$$\begin{pmatrix} 4 & 1 & 0 \\ 1 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & 4 \end{pmatrix} x = \begin{pmatrix} 0 \\ -6 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

   (a) Man zeige, daß Gesamt- und Einzelschrittverfahren konvergieren.

   (b) Für das Einzelschrittverfahren gebe man eine a-priori-Abschätzung für $\|x^{(10)} - x^*\|_\infty$ an. Der Startvektor sei der Nullvektor.

   (c) Man gebe eine a-priori-Abschätzung an, wieviele Iterationen man mit dem Einzelschrittverfahren und Gesamtschrittverfahren ausführen muß, damit $\|x^{(k)} - x^*\|_\infty < 0.01$.

2. Man diskretiere

$$\begin{aligned} c(-u_{xx} - u_{yy}) + u &= 1 \quad \text{in } \Omega = (0,1) \times (0,1), \\ u &= 0 \quad \text{auf } \Gamma. \end{aligned}$$

   mittels zentralen Differenzenquotienten $N = 4, 8, 16, 32, 64, 128$ und löse das Gleichungssystem

$$K_h \underline{u}_h = \underline{f}_h \tag{1}$$

   mittels

   - Cholesky-Zerlegung,
   - Jacobi-Verfahren, (nicht für $N = 128$)
   - PCG-Verfahren ($W = I$).

   jeweils für $c = 1$ und $c = 10^{-6}$. Stellen Sie die Lösungszeit in Abhängigkeit von N (Anzahl der Gitterpunkte) graphisch dar und vergleichen Sie die Ergebnisse. Wie verhalten sich die Iterationszahlen bei den iterativen Verfahren? (relative Genauigkeit iterative Verfahren 10^{-5})
   Hinweis: Man nutze den `sparse`-Befehl zur Speicherung von K_h.