1. Gleichungssysteme-direkte Verfahren

1. Sei

$$T_n = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 & 0 & \vdots \\ \vdots & 0 & & \ddots & & 0 \\ 0 & \dots & 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & \dots & 0 & 0 & -1 & 2 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{n,n}.$$

   Man zeige: $\lambda_i = 4\sin^2 \frac{\pi i}{2n+2}$ ist ein Eigenwert zum Eigenvektor

$$v_i = \sqrt{\frac{2}{n+1}} \left[\sin \frac{ij\pi}{n+1} \right]_{j=1}^{n} \qquad \forall i = 1, \dots, n.$$

2. Sei $\| v \|_2 = 1$. Man bestimme alle $\alpha \in \mathbb{R}$, so daß die Matrix $P = I - \alpha v v^\top$
   (a) eine Projektionsmatrix,
   (b) orthogonal ist.

3. Man zeige, daß für die Konditionszahl bei regulären, quadratischen Matrizen A und B die Beziehungen $\kappa(A) \geq 1$, $\kappa(cA) = \kappa(A)$ und $\kappa(AB) \leq \kappa(A)\kappa(B)$ gelten, $c \in I\!R \backslash \{0\}$. Dabei werde die Konditionszahl über eine beliebige vektorinduzierte Matrixnorm definiert.

4. Sei

$$A = \begin{pmatrix} 4 & -2 & -2 \\ -2 & 10 & 4 \\ -2 & 4 & 6 \end{pmatrix}.$$

   (a) Berechnen Sie die Cholesky-Zerlegung von A.
   (b) Lösen Sie für $b = (10, -2, -12)^\top$ das lineare Gleichungssystem $Ax = b$.