P R O S E M I N A R

zur Vorlesung

“Mathematische Modelle in der Technik“

PS XI 29.01. 2009 (Zeit : $12^{\underline{00}}$ – $13^{\underline{30}}$ Uhr; Raum : HS 13):

3.2.3 Die Strömung zwischen zwei rotierenden Zylindern (Couette-Taylor Strömung)

In den Übungsaufgaben 34 und 35 soll das Strömungsfeld (= Geschwindigkeitsfeld $\mathbf{v}$ und Druckfeld p) zwischen zwei unendlich ausgedehnten, koaxialen Zylindern mit den Radien R_1 und R_2, die sich mit der Winkelgeschwindigkeiten ω_1 und ω_2 bewegen, beschimmt werden (siehe Abbildung 2). Zur Lösung dieses Problem bieten sich wieder die Zylinderkoordinaten an. In der Übungsaufgabe 33 haben wir die stationären, inkompressiblen Navier-Stokes-Gleichungen (3.5)-(3.6) in Zylinderkoordinaten für das Geschwindigkeitsfeld $\mathbf{v} = (v_r, v_\varphi, v_z)$ mit den Komponenten v_r, v_φ und v_z in Richtung der Zylinderkoordinaten aufgeschrieben. Offenbar ist nur die φ-Komponente v_φ des Geschwindigkeitsfeld $\mathbf{v}$ von 0 verschieden. Des Weiteren hängen v_φ und auch der Druck p offenbar nicht von φ und z ab, d.h.

$$p = p(r) \quad \text{und} \quad \mathbf{v} = \begin{pmatrix} v_r(r,\varphi,z) \\ v_\varphi(r,\varphi,z) \\ v_z(r,\varphi,z) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ v_\varphi(r) \\ 0 \end{pmatrix}. \tag{3.16}$$

Setzt man diesen Ansatz in die, in der Übungsaufgabe 33 abgeleiteten, stationären, inkompressiblen Navier-Stokes-Gleichungen in Zylinderkoordinaten ein, erhält man einfache zu lösende Bestimmungsgleichungen für $v_\varphi(r)$ und $p(r)$.

$\boxed{34}$ Bestimmen Sie $v(r)$!

$\boxed{35}$ Bestimmen Sie $p(r)$!

3.2.4 Stromfunktion

Let us consider a two-dimensional, steady state (stationary) flow of a highly viscous, incompressible fluid that can be described by the Stokes Equations

$$-\nu\Delta u + \nabla p = f \quad \text{in } \Omega, \tag{3.17}$$

$$\mathrm{div} u = 0 \quad \text{in } \Omega. \tag{3.18}$$

Assume that the velocity u can be represented by a so-called (scalar) stream-function ψ as

$$u = \mathbf{curl}\,\psi \tag{3.19}$$

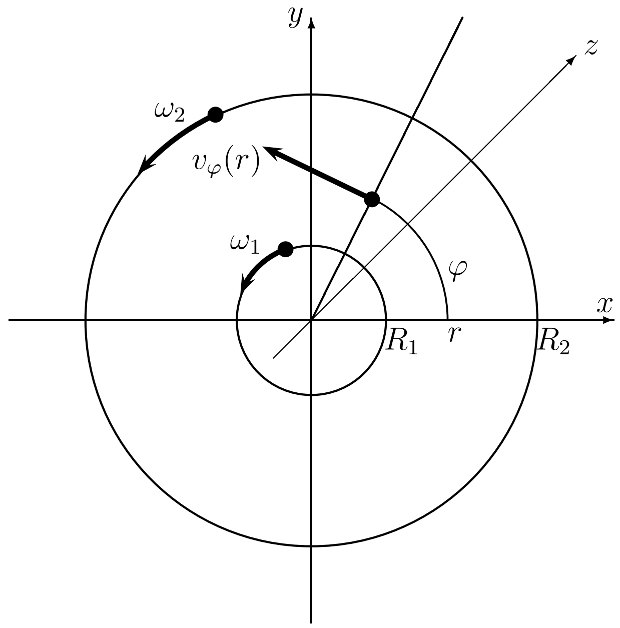

Abbildung 2: Querschnitt durch einen (endlosen) Doppelzylinder mit zwei sich verschieden schnell drehenden Mänteln.

with

$$\mathbf{curl}\,\psi = \begin{pmatrix} \frac{\partial\psi}{\partial x_2} \\ -\frac{\partial\psi}{\partial x_1} \end{pmatrix}$$

$\boxed{36}$ Show that

$$\operatorname{div} u = 0, \tag{3.20}$$

and derive the following relation from the equations (3.17):

$$\nu\Delta^2\psi = \operatorname{curl} f \quad \text{in } \Omega, \tag{3.21}$$

where the so-called scalar curl is now defined by the relation

$$\operatorname{curl} f = \frac{\partial f_2}{\partial x_1} - \frac{\partial f_1}{\partial x_2}. \tag{3.22}$$

$\boxed{37^\star}$ Es sei Ω ein konvexes Gebiet und ψ löse die biharmonische Gleichung (3.21) in Ω und erfülle die Randbedingungen

$$\psi = 0, \tag{3.23}$$

$$\frac{\partial\psi}{\partial n} = 0 \tag{3.24}$$

auf $\partial\Omega$. Man zeige, dass dann ein Druck p existiert, sodass $u = \mathbf{curl}\,\psi$ und p die zweidimensionalen Stokes-Gleichungen (3.17)-(3.18) in Ω lösen und am Rand $\partial\Omega$ die Haftbedingungen $u = 0$ erfüllen.