P R O S E M I N A R

zur Vorlesung

“Mathematische Modelle in der Technik“

PS X 22.01. 2009 (Zeit : $12^{\underline{00}}$ – $13^{\underline{30}}$ Uhr; Raum : HS 13):

3.2 Spezielle Strömungen

3.2.1 Poiseuille Strömung in einem Rohr

Um die Flüssigkeitsmenge

$$Q = \int_{y^2+z^2 \leq R} v(y,z)\,\rho\,dy\,dz \tag{3.4}$$

zu bestimmen, die pro Sekunde durch den Querschnitt (y-z-Ebene) eines Rohrs (die x-Achse liegt in der Mitte des Rohres) der Länge ℓ mit dem Radius R fliesst (siehe Abbildung 1), benötigen wir das Geschwindigkeitsfeld $\mathbf{v}$, das aus den stationären, inkompressiblen Navier-Stokes-Gleichungen

$$-\frac{\mu}{\varrho}\triangle\mathbf{v} + (\mathbf{v}\bullet\nabla)\mathbf{v} + \frac{1}{\varrho}\nabla p = \mathbf{f} := \mathbf{0} \tag{3.5}$$

$$\nabla \bullet \mathbf{v} = 0 \tag{3.6}$$

und der Haftbedingung am Rohrrand hergeleitet werden kann. Es sollen keine äusseren Kräfte wirken, d.h. $\mathbf{f} := \mathbf{0}$. Die Strömung wird nur durch die gegebene Druckdifferenz Δp zwischen den beiden Rohrenden hervorgerufen. Dann hat offenbar die Geschwindigkeit nur eine Komponente in x-Richtung, welche nicht von x anhängt, d.h.

$$\mathbf{v} = \begin{pmatrix} v(y,z) \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}. \tag{3.7}$$

$\boxed{30}$ Man zeige, dass der Druck die Form

$$p(x) = -\frac{\Delta p}{\ell}x + c_0 \tag{3.8}$$

hat, wobei $c_0 \in \mathbb{R}$ eine beliebige Konstante ist, und dass $v(y,z)$ die folgende Poisson-Gleichung mit homogenen Dirichletschen Randbedingungen löst:

$$\begin{aligned} -\triangle v(y,z) &= \frac{\Delta p}{\ell\mu} \quad \forall (y,z) \in (y,z) \in \mathbb{R}^2 : y^2+z^2 < R^2, && (3.9)\\ v(y,z) &= 0 \quad \forall (y,z) \in \mathbb{R}^2 : y^2+z^2 = R^2. && (3.10) \end{aligned}$$

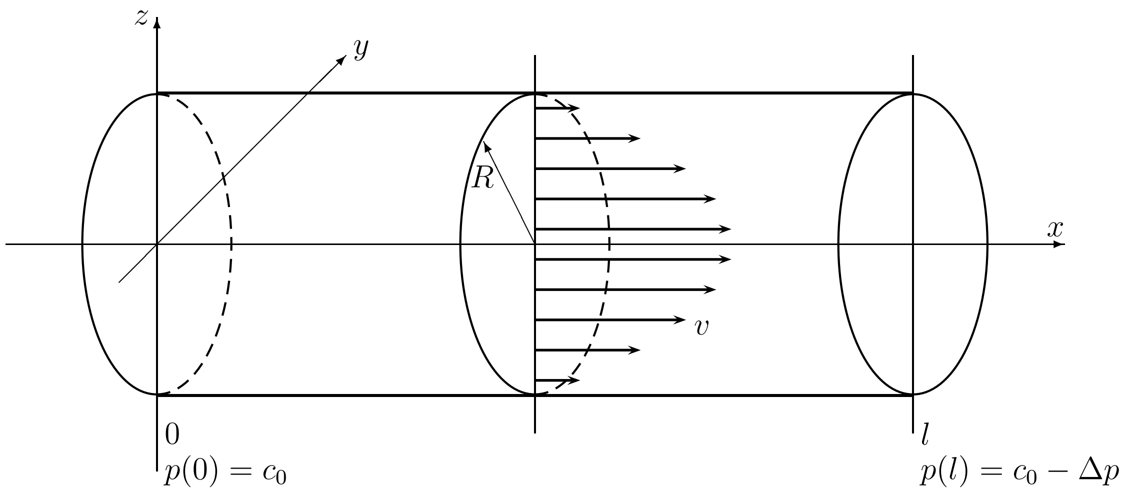

Abbildung 1: Geschwindigkeitsverteilung v einer Flüssigkeit durch ein Rohr.

$\boxed{31}$ Das Randwertproblem (3.9) - (3.10) ist offenbar radialsymmetrisch. Bestimmen Sie die Lösung $v(y, z) = \tilde{v}(r)$, die offenbar nur vom Radius r abhängt, indem Sie das Randwertproblem (3.9) - (3.10) in Polarkoordinaten

$$y = r\cos\varphi \tag{3.11}$$

$$z = r\sin\varphi \tag{3.12}$$

überführen.

$\boxed{32}$ Bestimmen Sie nun die Flüssigkeitsmenge Q, die pro Sekunde durch den Querschnitt des Rohrs fliesst !

3.2.2 Navier-Stokes-Gleichungen in Zylinderkoordinaten

$\boxed{33^\star}$ Schreiben Sie die stationären, inkompressiblen Navier-Stokes-Gleichungen (3.5)-(3.6) in Zylinderkoordinaten

$$x = r\cos\varphi \tag{3.13}$$

$$y = r\sin\varphi \tag{3.14}$$

$$z = z \tag{3.15}$$

für das Geschwindigkeitsfeld $\mathbf{v} = (v_r, v_\varphi, v_z)$ mit den Komponenten v_r, v_φ und v_z in Richtung der Zylinderkoordinaten.