P R O S E M I N A R

zur Vorlesung

“Mathematische Modelle in der Technik“

PS IX 15.01. 2009 (Zeit : $12^{\underline{00}}$ – $13^{\underline{30}}$ Uhr; Raum : HS 13): 27 – 29

3 Strömungsmechanik

3.1 Transport-Theorem

27 Beweisen Sie das Transport-Theorem (Satz 3.1) für den Fall $d = 1$, d.h. die Formel

$$\frac{d\mathcal{F}}{dt}(t) = \int\limits_{\omega(t)} \left[\frac{\partial F}{\partial t}(x,t) + \frac{\partial (F \cdot v)}{\partial x}(x,t) \right] dx \quad !$$

28* Die Vektorfunktion $\varphi : \Omega(t_0) \times (T_1, T_2) \longrightarrow R^d$ bildet die Lagrange-Koordinaten (X, t) auf die Euler-Koordinaten (x, t) ab, d.h. $x = \varphi(X, t)$. Man zeige für $d = 2$ (für $d = 3$ gibt es ein Extrakreuzel !) die Beziehung

$$\frac{\partial D}{\partial t}(X,t) = D(X,t)\,\mathrm{div}\,(v(x,t)),$$

wobei D die Determinande der Jacobi-Matrix der Abbildung φ ist, d.h.

$$D(X,t) = \det\left(\frac{\partial \varphi_i}{\partial X_j}(X,t)\right).$$

29 Beweisen Sie das Transport-Theorem (Satz 3.1) für den Fall $d = 2$ bzw. $d = 3$, d.h. die Formel

$$\frac{d\mathcal{F}}{dt}(t) = \int\limits_{\omega(t)} \left[\frac{\partial F}{\partial t}(x,t) + \mathrm{div}\,(F \cdot v)(x,t) \right] dx \quad !$$