

# P R O S E M I N A R

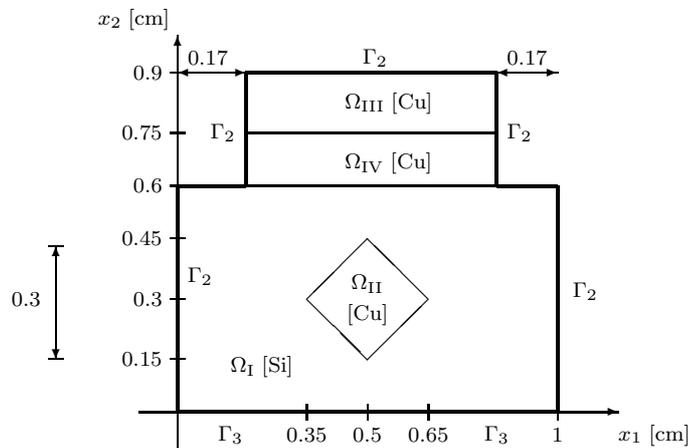
zur Vorlesung

## “Mathematische Modelle in der Technik“

**PS II**      07.11. 2008 (Zeit : 10<sup>15</sup> – 11<sup>45</sup>    Raum : HS 13) : **5** - **8**

### 1.3 Wärmeleitung in einer dünnen Platte

- **Physikalisches Problem** : Gesucht ist das Temperaturfeld  $u(x)$ ,  $x = (x_1, x_2) \in \bar{\Omega} = \bar{\Omega}_I \cup \bar{\Omega}_{II} \cup \bar{\Omega}_{III} \cup \bar{\Omega}_{IV}$ , in einer dünnen Platte „CHIP“ der Art



mit einer Plattendicke von  $d = 0.01$  cm und mit den Daten

- Wärmeleitkoeffizienten

$$\lambda_1(x) = \lambda_2(x) = \lambda(x) := \begin{cases} \lambda_{Si} = 0.01 \left[ \frac{W}{cm K} \right], & x \in \bar{\Omega}_I \\ \lambda_{Cu} = 3.95 \left[ \frac{W}{cm K} \right], & x \in \bar{\Omega}_{II} \cup \bar{\Omega}_{III} \cup \bar{\Omega}_{IV} \end{cases}$$

↑  
isotrop

- $a \equiv 0$  (kein Wärmeaustausch in  $z$ -Richtung),
- Wärmequellen:

$$f(x) := \begin{cases} 0, & x \in \Omega_I \cup \Omega_{III}, \\ 2^k \left[ \frac{W}{cm^3} \right], & x \in \Omega_{II}, \\ -0.4545454 \cdot 2^k \left[ \frac{W}{cm^3} \right], & x \in \Omega_{IV}, \end{cases}$$

wobei  $k =$  letzte Ziffer der Matrikelnummer  $\in \{0, 1, \dots, 9\}$ ,

- Randbedingungen (RB) auf  $\Gamma \equiv \partial\Omega = \bar{\Gamma}_2 \cup \bar{\Gamma}_3$ :

1.  $\Gamma_1 = \emptyset$  (keine RB 1. Art),
2.  $\bar{\Gamma}_2 = \Gamma \setminus \Gamma_3$ :  $\frac{\partial u}{\partial N} = g_2 := 0$  auf  $\Gamma_2$ ,

$$3. \Gamma_3 = \{(x_1, x_2) \mid 0 < x_1 < 1, x_2 = 0\}: \frac{\partial u}{\partial N} = \alpha(g_3 - u) \text{ auf } \Gamma_3$$

mit  $g_3 = 300 \text{ K}$ ,  $\alpha = 0.2 [W/(cm^2 K)]$ .

5] Man leite die stationäre Wärmeleitgleichung zur Bestimmung der Temperaturverteilung  $u(x)$  in der **integralen Form** (= Bilanzform) her.

6] Geben Sie die **klassische Formulierung** (d.h. PDgl. in  $\Omega_I, \Omega_{II}, \Omega_{III}$  und  $\Omega_{IV}$ ; Interfacebedingungen auf  $\bar{\Omega}_I \cap \bar{\Omega}_{II}$  und  $\bar{\Omega}_I \cap \bar{\Omega}_{IV}$ ; Randbedingungen) und die **Variationsformulierung** in der Form

$$\text{Ges. } u \in \mathbf{V}_g : a(u, v) = \langle F, v \rangle \quad \forall v \in \mathbf{V}_0, \quad (1.1)$$

d.h.,  $\mathbf{V}_g = ?$

$\mathbf{V}_0 = ?$

$a(u, v) = ?$

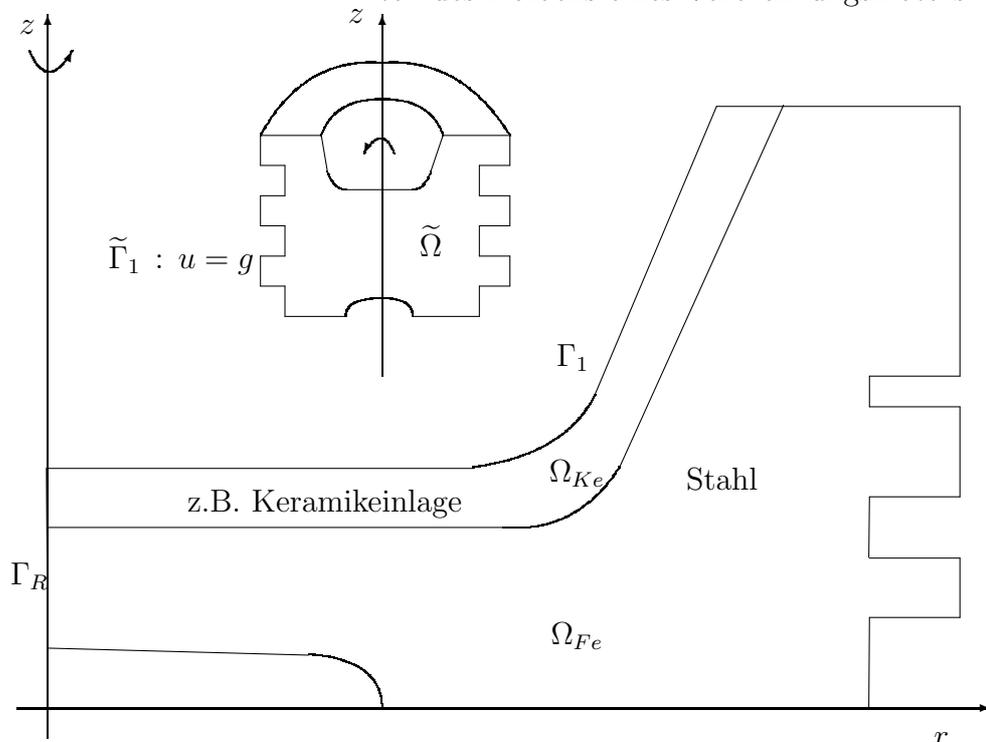
$\langle F, v \rangle = ?$

an.

## 1.4 Weitere 1D und 2D Spezialfälle

### 1.4.1 Rotationssymmetrische Wärmeleitprobleme mit $\varphi$ -unabhängigen Eingangsdaten

- Modellproblem "Kolben" : Betrachten das Wärmeleitproblem für den Ober- teil des Kolbens eines Verbrennungsmotors



unter den Voraussetzungen :

- 1)  $\bar{\Omega} = \int_{\varphi} \bar{\Omega} := \{(r, z, \varphi) : (r, z) \in \bar{\Omega}, 0 \leq \varphi \leq \pi\} = \bar{\Omega} \times [0, 2\pi[$
- 2) Daten  $\{\lambda = \lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3, f, g, \dots\}$  sind  $\varphi$  unabhängig,

wobei  $(x_1, x_2, x_3)$ -Kartesische Koordinaten,  
 $(r, z, \varphi)$  -Zylinderkoordinaten sind.

Die gesuchte Temperaturverteilung  $u(x_1, x_2, x_3) = u(r, z)$  ist damit  $\varphi$ -unabhängig.

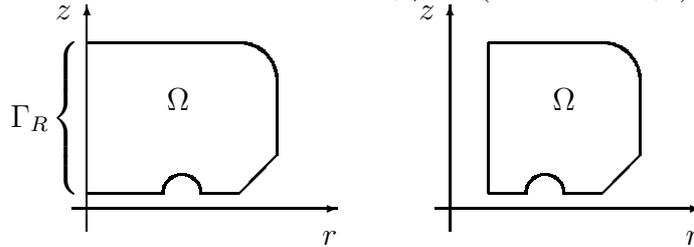
7 Man schreibe die Wärmeleitgleichung

$$\left. \begin{aligned} -\frac{\partial}{\partial x_1} \left( \lambda \frac{\partial u}{\partial x_1} \right) - \frac{\partial}{\partial x_2} \left( \lambda \frac{\partial u}{\partial x_2} \right) - \frac{\partial}{\partial x_3} \left( \lambda \frac{\partial u}{\partial x_3} \right) &= f(x) \quad x \in \tilde{\Omega} \\ \text{mit den Randbedingungen} \\ u &= g_1 \quad \text{auf} \quad \tilde{\Gamma}_1 = \Gamma_1 \times [0, 2\pi) \\ -\lambda \frac{\partial u}{\partial n} &= g_2 \quad \text{auf} \quad \tilde{\Gamma}_2 = \Gamma_2 \times [0, 2\pi) \\ -\lambda \frac{\partial u}{\partial n} &= \alpha(u - g_3) \quad \text{auf} \quad \tilde{\Gamma}_3 = \Gamma_3 \times [0, 2\pi) \end{aligned} \right\} \quad (1.2)$$

für den rotationssymmetrischen Fall  $\tilde{\Omega} = \bar{\Omega} \times [0, 2\pi)$  mit  $\varphi$ -unabhängigen Eingangsdaten  $\{\lambda, f, g_i, \alpha\}$  auf, d.h. durch den Übergang von den kartesischen Koordinaten  $(x_1, x_2, x_3)$  zu Zylinderkoordinaten  $(r, z, \varphi)$  mittels

$$x_1 = r \cos \varphi, \quad x_2 = r \sin \varphi, \quad x_3 = z$$

kann der 3D-RWA in  $\tilde{\Omega} \subset \mathbb{R}^3$  eine 2D-RWA im Gebiet  $\Omega$  zugeordnet werden. Unterscheiden Sie die Fälle  $\Gamma_R \neq \emptyset$  (Rbd. auf  $\Gamma_R$ !) und  $\Gamma_R = \emptyset$  (Gebiet mit Loch).



8 Man schreibe die differentielle Form der Wärmeleitgleichung für das Modellproblem "Kolben" Querschnittsgebiet (2D) auf. Beachten Sie das Vorhandensein eines Interfaces zwischen Stahl und Keramikeinlage (Interface-Bedingung).